锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

导数、定积分

品牌连续热销8年

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

导数、定积分

丛书主编　司马文　曹瑞彬

丛书副主编　冯小秋　钟志健

执行主编　江　海

本册主编　周志祥

编　　者　万强华　孙志明　许学龙　曹建峰　毛金才　李庆春　周志祥
朱燕卫　金尤国　胡志彬　丁锁勤　钱　勇　吴志山　何福林
沈桂彬　李小慧　朱时来　王春和　周拥军　王新祝　李家亮
丁　勇　肖亚东　吴淑群　张季锋　李金光

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目(CIP)数据

锦囊妙解创新导学专题. 高中数学. 导数、定积分/司马文,曹瑞彬丛书主编;周志祥本册主编. —北京:机械工业出版社,2010. 10(2010. 11 重印)
ISBN 978-7-111-31902-3

Ⅰ. ①锦… Ⅱ. ①司…②曹…③周… Ⅲ. ①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 178889 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:石晓芬 责任编辑:石晓芬
责任印制:杨 曦
北京蓝海印刷有限公司印刷
2010 年 11 月第 1 版第 2 次印刷
169mm×228mm · 6.75 印张 · 200 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-31902-3
定价:12.00 元

电话服务 网络服务
社服务中心:(010)88361066 门户网:http://www.cmpbook.com
销 售 一 部:(010)68326294 教材网:http://www.cmpedu.com
销 售 二 部:(010)88379649

读者服务部:(010)68993821

前言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚受，在此深表感谢。为了对得起广大读者的信任，对得起自己的职业良心，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书，力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而力求让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付裕如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合“课标解读”、“知识清单”、“易错清单”、“点击高考”、“模拟演练”等栏目设计，突出教材中的重点和难点，并将高考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生的记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔，吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果。选例新颖典型，难度贴近高考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然而细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以“新课程标准”为纲，以“考试说明”与近年考卷中体现的高考命题思路为导向，起点低、落点难，重点难点诠释明了，高考关键热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握“捕鱼之术”，其实就是创新教育的主要目标。本丛书策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助你学到知识，掌握知识，而且能掌握其学习方法，养成创新意识，增强创新能力，那将能让你终身受益。

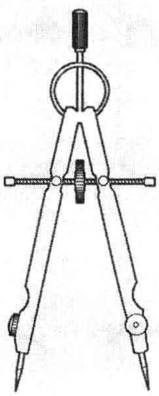
司马文
曹瑞彬

目 录

前 言

第一讲 导数的概念

课标解读



【学习目标】

导数作为微积分的核心概念之一，在高中数学中具有相当重要的地位和作用。

从横向看，导数处于一种特殊的地位。它是解决函数、不等式、数列、几何等多章节相关问题的重要工具，它以更高的观点和更简捷的方法简化了中学数学的许多问题。

从纵向看，导数是对函数知识的深化，对极限知识的发展，同时为以后研究导数的几何意义及应用打下必备的基础，具有承前启后的重要作用。

【知识与技能】

理解导数的概念；掌握用定义求导数的方法；领悟函数思想和无限逼近的极限思想。

【过程与方法】

通过对实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵；通过函数图像直观地理解导数的几何意义。

【情感态度与价值观】

通过导数概念的学习，使学生体验和认同“有限和无限对立统一”的辩证观点，接受用运动变化的辩证唯物主义思想处理数学问题的积极态度。

【重点】

导数概念的形成过程。

【难点】

对导数概念的理解。

知识清单

知识点一

平均变化率和瞬时变化率

1. 平均变化率：函数 $y=f(x)$ 如果自变量 x 在 $x\neq x_0$ 处有增量 Δx，那么函数 y 相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

2. 瞬时变化率：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，当自变量 x 在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时，函数值相应地改变 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 c（也就是说平均变化率与某个常数 c 的差的绝对值越来越小，可以小于任意小的正数），那么常数 c 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率。

例1 已知自由落体运动的位移和时间的关系式满足：$s=\frac{1}{2}gt^2$，

(1)计算 t 从 3s 到 3.1s 、3.001s、3.0001s 各时间段内的平均速度；

(2)求 $t=3$s 时的瞬时速度；

(3)求 t_0 时刻的瞬时速度。

【分析】 本题解题的关键在于对平均速度和瞬时速度概念的理解。平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$。

【解析】 (1) $t\in[3,3.1]$，$\Delta t=3.1-3=0.1(\mathrm{s})$，$\Delta t$ 指时间改变量；

$\Delta s=s(3.1)-s(3)=\frac{1}{2}g(3.1)^2-\frac{1}{2}g3^2=2.989(\mathrm{m})$，$\Delta s$ 指时间改变量；

$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2.989}{0.1}=29.89(\mathrm{m/s})$。其余各段时间内的平均速度（略）。

(2)由(1)可知，某段时间内的平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 随 Δt 变化而变化，Δt 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 越接近于一个定值。由极限定义可知，这个值就是 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限，$t=3$s 时的瞬时速度。

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g3^2}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}(6+\Delta t)=3g=29.4(\mathrm{m/s})。$$

(3)取一邻近于 t_0 的时刻 t，运动时间为 Δt，则平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{g}{2}(t+t_0)$。当 $t\to t_0$ 时，取极限得瞬时速度 $v=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s-s_0}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{g(t_0+t)}{2}=gt_0$。

变式 求函数 $y=\frac{4}{x^2}$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率。

【分析】利用瞬时变化率的定义求解。

【解析】$\Delta y=\frac{4}{(x_0+\Delta x)^2}-\frac{4}{x_0^2}=-\frac{4\Delta x(2x_0+\Delta x)}{x_0^2(x_0+\Delta x)^2}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-4\cdot\frac{2x_0+\Delta x}{x_0^2(x_0+\Delta x)^2},$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-4\cdot\frac{2x_0+\Delta x}{x_0^2(x_0+\Delta x)^2}\right]=-\frac{8}{x_0^3}。$$

点评 理清瞬时速度和瞬时变化率的概念,它们都是一种特殊的极限,为学习导数的定义奠定了基础。

知识点二
导数的概念

1. 导数:当 Δx 趋近于 0 时,$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$趋近于常数 c。可用符号"→"记作:当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to c$ 或记作 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=c$,符号"→"读作"趋近于"。函数在 x_0 的瞬时变化率,通常称作 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数,并记作 $f'(x_0)$。

2. 导函数:如果 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点 x 都是可导的,则称 $f(x)$在区间(a,b)内可导。这样,对开区间(a,b)内每个值 x,都对应一个确定的导数 $f'(x)$。于是,在区间(a,b)内,$f'(x)$构成一个新的函数,我们把这个函数称为函数 $y=f(x)$的导函数,记为 $f'(x)$或 y'。

【说明】

(1)函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,是指 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$有极限。如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$不存在极限,就说函数 $f(x)$在点 x_0 处不可导,或说无导数;

(2)Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量,可正可负但不能为 0,而 Δy 是函数值的改变量,可以是 0;

(3)$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$,而$[f(x_0)]'$是常数 $f(x_0)$的导数,即$[f(x_0)]'=0$。

例2 若 $f'(x_0)=-3$,则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$等于 ( )

A. -3 B. -6 C. -9 D. -12

【分析】本题考查的是对导数定义的理解,根据导数定义直接求解即可。

【解析】解法一:$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)=-6。$$

解法二:$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2\lim\limits_{2h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2f'(x_0)=-6$。

故选 B。

点评 导数的定义要活学活用,关注导数定义和 Δx 的不同表示形式。

例3 已知 $y=x^3-2x+1$，求 y'，$y'|_{x=2}$。

【分析】本题重点考查利用导数的定义求已知函数的导数。

【解析】方法一：$\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1-(x^3-2x+1)$

$$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+1-x^3+2x-1$$

$$=(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+(3x^2-2)\Delta x,$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2-2$，

$\therefore\ y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2-2]=3x^2-2$。

$\because\ y'=3x^2-2$，$\therefore y'|_{x=2}=3\times 2^2-2=10$。

方法二：$\Delta y=(2+\Delta x)^3-2(2+\Delta x)+1-(2^3-2\times 2+1)=(\Delta x)^3+6(\Delta x)^2+10\Delta x$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+6\Delta x+10$，$\therefore y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+6\Delta x+10]=10$。

点评 如果题目中要求 y'，那么求 $y'|_{x=2}$ 时用方法一简便；如果只要求 $y'|_{x=2}$，用方法二比较简便。

巩固 求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$。

【解析】$\because\ \Delta y=\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}=\dfrac{(x_0+\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}$

$$=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}},$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0+\Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}},$$

$$\therefore f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0+\Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}。$$

小结 求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的步骤可归纳为：

(1)求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

上述求导方法可简记为：一差、二化、三极限。

例4 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性。

【分析】本题考查函数的可导性。

【解析】$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$，$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1$，

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1$，

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

变式 已知 $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b, x>0 \\ 0, \quad x=0 \\ \cos x+1, x<0 \end{cases}$，当 a、b 取值何值时，$f'(0)$ 存在，其值为多少？

【分析】本题根据可导性求参数值。

【解析】$x=0$ 是此分段函数的分界点，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a\sin x+b)=b$，

$\therefore$ 当 $b=2$，a 取任意实数时，$f'(0)$ 存在，其值为 2。

点评 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$、$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 都存在且相等。

知识点三

导数的几何意义

1. 曲线的切线

如图 1-1，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图像，点 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上一点。作割线 PQ，当点 Q 沿着曲线 C 无限地趋近于点 P，割线 PQ 无限地趋近于某一极限位置 PT。我们就把极限位置上的直线 PT 叫做曲线 C 在点 P 处的切线。

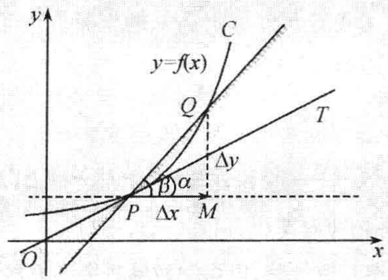


图 1-1

2. 确定曲线 C 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率

因为曲线 C 是给定的，根据解析几何中直线的点斜式方程的知识，只要求出切线的斜率就够了。设割线 PQ 的倾斜角为 β，切线 PT 的倾斜角为 α，既然割线 PQ 的极限位置上的直线 PT 是切线，所以割线 PQ 斜率的极限就是切线 PT 的斜率 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

我们可以从运动的角度来得到切线，所以可以用极限来定义切线，以及切线的斜率。那么以后如果我们碰到一些复杂的曲线，也可以求出它在某一点处的切线了。

例5 如图 1-2 所示，已知曲线的方程为 $y=x^2+1$，那么求此曲线在点 $P(1,2)$ 处的切线的斜率，以及切线的方程。

【分析】根据定义先求出 $x=1$ 时的导数 $f'(1)$，再写出切线的方程。

【解析】$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+1-(1^2+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2,$$

∴切线的斜率为 2,切线的方程为 $y-2=2(x-1)$,即 $y=2x$。

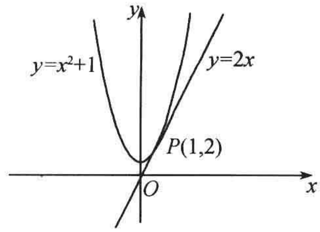


图 1-2

巩固1 求曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角。

【分析】要求切线的倾斜角,也要先求切线的斜率,再根据斜率 $k=\tan\alpha$,求出倾斜角 α。

【解析】$\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+\Delta x)^3-(1+\Delta x)^2+5-\left(\frac{1}{3}-1+5\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(\Delta x)^3-\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{3}(\Delta x)^2-1\right]=-1,$$

∵$\alpha\in[0,\pi)$,∴$\alpha=\frac{3}{4}\pi$。∴切线的倾斜角为$\frac{3}{4}\pi$。

巩固2 $y=x^3$在点 P 处的切线斜率为 3,求点 P 的坐标。

【解析】设点 P 的坐标(x_0,x_0^3),则有

$$3=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=3x_0^2,$$

∴$3x_0^2=3$,$x_0=\pm1$,∴P 点的坐标是$(1,1)$或$(-1,-1)$ 。

点评 已知切点求切线斜率只有一解,但已知切线斜率求切点不一定唯一。

易错清单

例1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1),x\leqslant 1\\ \frac{1}{2}(x+1),x>1\end{cases}$,判断 $f(x)$在 $x=1$ 处是否可导。

【错解】∵$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[(1+\Delta x)^2+1]-\frac{1}{2}(1^2+1)}{\Delta x}=1$,∴$f'(1)=1$。

【正解】分段函数在“分界点”处的导数,必须根据定义来判断是否可导。

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}[(1+\Delta x)^2+1]-\frac{1}{2}(1^2+1)}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(1+\Delta x+1)-\frac{1}{2}(1+1)}{\Delta x}=\frac{1}{2},$$

∴ $f(x)$在 $x=1$ 处不可导。

注：$\Delta x \to 0^+$，指 Δx 逐渐减小趋近于 0；$\Delta x \to 0^-$，指 Δx 逐渐增大趋近于 0。

点评 函数在某一点的导数，是一个极限值，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$\Delta x \to 0$ 包括 $\Delta x \to 0^+$ 与 $\Delta x \to 0^-$，因此，在判定分段函数在“分界点”处的导数是否存在时，要验证其左、右极限是否存在且相等，如果都存在且相等，才能判定这点存在导数，否则不存在导数。

例2 已知曲线 $y=2x-x^3$，求过点 $A(1,1)$的曲线的切线方程。

【错解】把点 $A(1,1)$当成了切点，所以点 A 处切线的斜率为 $k=f'(1)=-1$，即切线方程为 $x+y-2=0$。

【正解】设切点坐标为$(x_0, 2x_0-x_0^3)$，从而切线方程为 $y-2x_0+x_0^3=(2-3x_0^2)(x-x_0)$，

把$(1,1)$代入得 $1-2x_0+x_0^3=(2-3x_0^2)(1-x_0)$，得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\dfrac{1}{2}$。

所以，当 $x_0=1$ 时，切点为$(1,1)$，切线方程为 $x+y-2=0$；

当 $x_0=-\dfrac{1}{2}$时，切点为$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{8}\right)$，切线方程为 $5x-4y-1=0$。

点评 曲线上一点处的切线，该点就是切点；而过一点作曲线的切线，该点不一定是切点。

点击高考

考情分析：了解导数概念的某些实际背景(如瞬时速度、加速度、光滑曲线切线的斜率等)。掌握函数在一点处的导数的定义和导数的几何意义。理解导函数的概念。

命题趋势：本节在高考中主要以选择题、填空题等主观题目的形式考查导数的基本概念和几何意义，一般难度不大，属于高考题中的中低档题。

1.(2007 全国)物体运动方程为 $s=\dfrac{1}{4}t^4-3$，则 $t=5$ 时的瞬时速度为 (　　)

A. 5　　　B. 25　　　C. 125　　　D. 625

【解析】$v=s'=t^3$，$t=5$ 时，$s=125$。

【答案】C

2.(2007 全国)已知直线 $y=2x+1$ 与曲线 $y=x^3-x+b$ 相切，则 b 的值为________。

【解析】设切点为$(x_0, x_0^3-x_0+b)$，$y'=3x^2-1$，∴有 $y-(x_0^3-x_0+b)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$，$3x_0^2-1=2$，∴$x_0=\pm1$。又有 $x_0^3-x_0+b-2x_0=1$，即 $1-b=x_0^3-3x_0$，∴$b=3$ 或-1。

【答案】$b=3$ 或-1

3.(2008 北京)(理)如图 1-3，函数 $f(x)$的图像是折线段 ABC，其中 A、B、C 的坐标分别为$(0,4)$，$(2,0)$，$(6,4)$，则 $f(f(0))=$________，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$________。(用数字作答)

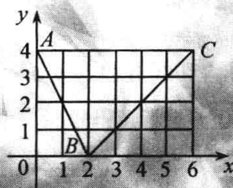


图 1-3

【解析】(1) $f(0)=4$，$f(4)=2$，∴$f(f(0))=f(4)=2$。

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=-2$。

【答案】2；-2

4.(2008 全国)抛物线 $y=x^2$ 上点 A 处的切线与直线 $3x-y+1=0$ 的夹角为 $45°$，则点 A 的坐标是 ( )

A. $(-1,1)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$

C. $(1,1)$　　D. $(-1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$

【解析】本题主要考查导数概念的灵活应用以及两条直线的夹角公式。

设切线的斜率为 k，$\left|\frac{k-3}{1+3k}\right|=1$，从而 $k=-2$ 或 $k=\frac{1}{2}$。

$\because y'=2x$，$\therefore 2x=-2$ 或 $2x=\frac{1}{2}$。

解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{4}$，即点 A 的坐标为 $(-1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$。

【答案】D

5.(2008 辽宁)(理)设点 P 为曲线 C：$y=x^2+2x+3$ 上的点，且曲线 C 在点 P 处的切线的倾斜角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则点 P 横坐标的取值范围为 ( )

A. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　B. $[-1,0]$　C. $[0,1]$　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

【解析】$k=y'=2x+2$。$\because \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$\therefore 0\leqslant k\leqslant 1$，即 $0\leqslant 2x+2\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$。

【答案】A

6.(2009 全国)与直线 $x-y+1=0$ 平行，且与曲线 $y=\frac{x^2}{3}-1$ 相切的直线方程为________。

【解析】$k=y'=\frac{2}{3}x=1$，$\therefore x=\frac{3}{2}$，即切点为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$，$\therefore$ 直线方程为 $y+\frac{1}{4}=x-\frac{3}{2}$，即 $4x-4y-7=0$。

【答案】$4x-4y-7=0$

7.(2006 全国)已知曲线 $y=2x-x^3$ 上一点 $M(-1,-1)$，

求：(1)点 M 处的切线方程；

(2)点 M 处的切线与 x 轴、y 轴所围成的平面图形的面积。

【解析】(1) $y'=2-3x^2$，

$k_{切}=y'|_{x=-1}=2-3(-1)^2=-1$，

$\therefore$ 切线方程为 $y+1=-(x+1)$，即 $x+y+2=0$。

(2)如图 1-4，对 $x+y+2=0$，令 $x=0$，则 $y=-2$，令 $y=0$，则 $x=-2$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$。

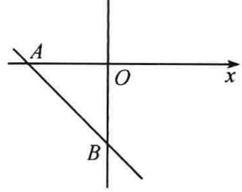


图 1-4

模拟演练

1. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图像上取一点(1,2)及附近一点$(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$为 ( )

A. $\Delta x+\frac{1}{\Delta x}+2$ B. $\Delta x-\frac{1}{\Delta x}-2$ C. $\Delta x+2$ D. $2+\Delta x-\frac{1}{\Delta x}$

2. 已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的导数为 1，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1+x)}{3x}=$ ( )

A. 3 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

3. 一质点做直线运动，由始点起经过 ts 后的距离为 $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$，则速度为零的时刻是 ( )

A. 4s 末 B. 8s 末 C. 0s 与 8s 末 D. 0s，4s，8s 末

4. 在函数 $y=x^3-8x$ 的图像上，其切线的倾斜角小于$\frac{\pi}{4}$的点中，坐标为整数的点的个数是 ( )

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

5. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+x$ 在点$\left(1,\frac{4}{3}\right)$处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 ( )

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 曲线 $y=x^3$ 在点(1，1)处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为__________。

7. 点 P 在曲线 $y=x^3-x+\frac{2}{3}$ 上移动，在点 P 处的切线的倾斜角为 α，则 α 的取值范围是__________。

8. 已知函数 $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2+m$($m$ 为常数)图像上点 A 处的切线与 $x-y+3=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则 A 点的横坐标为__________。

9. 若抛物线 $y=x^2-x+c$ 上一点 P 的横坐标是-2，抛物线在点 P 处的切线恰好过坐标原点，则 c 的值为__________。

10. 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$。

(1)求曲线在点(2,4)处的切线方程；

(2)求曲线过点(2,4)的切线方程。

答案

1. **解析**：$2+\Delta y=(1+\Delta x)^2+1$，$\Delta y=2\Delta x+\Delta x^2$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$。选 C。

2. **解析：**$f'(1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{3x}=\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{-2x}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$。选 B。

3. **解析：**$s=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$，$v=s'=t^3-12t^2+32t=0$，$t(t-4)(t-8)=0$，$t=0$ 或 4 或 8。选 D。

4. **解析：**$\because \alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore 0\leqslant k<1$。$\because k=y'=3x^2-8$，$\therefore 0\leqslant 3x^2-8<1$，$\dfrac{8}{3}\leqslant x^2<3$。又$\because x,y\in\mathbf{Z}$，$\therefore$无解。选 D。

5. **解析：**$y=\dfrac{1}{3}x^3+x$，$y'=x^2+1$，在$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$处切线的斜率 $k=2$，切线方程为 $y-\dfrac{4}{3}=2(x-1)$，$\therefore$截距 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$。选 A。

6. **解析：**如图 1-5，$y=x^3$ 在点$(1,1)$处的切线斜率 $k=y'=3x^2=3$，

$\therefore$切线方程为 $y=3x-2$，$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times 4=\dfrac{8}{3}$。

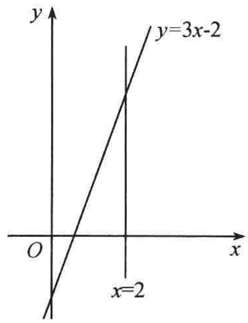


图 1-5

7. **解析：**$k=y'=3x^2-1\geqslant -1$，$\therefore \alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$。

8. **解析：**$k=y'=6x^2-x=0$，$\therefore x=0$ 或$\dfrac{1}{6}$。

9. **解析：** $k=y'=2x-1$，在 $x=-2$ 处的斜率 $k=-5$，

$\therefore$有 $y-6-c=-5(x+2)$，即$-6-c=-10$，$c=4$。

10. **解析：**(1)$\because y'=x^2$，$\therefore$在点$(2,4)$处的切线的斜率 $k=y'|_{x=2}=4$，

$\therefore$曲线在点 $P(2,4)$处的切线方程为 $y-4=4(x-2)$，即 $4x-y-4=0$。

(2)设曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$ 与过点$(2,4)$的切线相切于点$\left(x_0,\dfrac{1}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}\right)$，

则切线的斜率 $k=y'|_{x=x_0}=x_0^2$，

$\therefore$切线方程为 $y-\left(\dfrac{1}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$，即 $y=x_0^2x-\dfrac{2}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}$。

$\because$点$(2,4)$在切线上，$\therefore 4=2x_0^2-\dfrac{2}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}$，即 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，

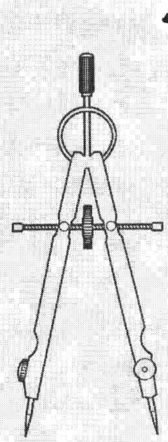
$\therefore x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=0$，$\therefore x_0^2(x_0+1)-4(x_0+1)(x_0-1)=0$，

$\therefore (x_0+1)(x_0-2)^2=0$，解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=2$。

故所求的切线方程为 $4x-y-4=0$ 或 $x-y+2=0$。

第二讲　导数的运算

课标解读



1. 导数的运算是全章内容的基础，一切与导数相关的问题都依赖于准确无误的求导运算，所以我们必须熟记基本函数的求导公式；掌握两个函数和、差、积、商的求导法则；会求某些简单复合函数的导数。

2. 对于函数求导，一般要遵循先化简、再求导的基本原则。求导时，不但要重视求导法则的应用，而且要特别注意求导法则对求导的制约作用。在实施化简时，首先必须注意变换的等价性，避免不必要的运算失误。

3. 复合函数求导法则像链条一样，必须一环一环套下去，而不能丢掉其中的一环。必须正确分析复合函数是由哪些基本函数经过怎样的顺序复合而成的，分清其间的复合关系。

知识清单

知识点一

几种常见函数的导数

由导数定义本身,给出了求导数的最基本的方法,但由于导数是用极限来定义的,所以求导数总是归结到求极限,这在运算上很麻烦,有时甚至很困难。为了能够较快地求出某些函数的导数,我们将研究比较简捷的求导数的方法,重点是掌握几个常见函数的求导公式。对于基本初等函数,有下面的求导公式:

(1)$C'=0$ (5)$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$

(2)$(x^n)'=nx^{n-1}$ (6)$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$

(3)$(\sin x)'=\cos x$ (7)$(e^x)'=e^x$

(4)$(\cos x)'=-\sin x$ (8)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

例1 求下列函数的导数:

(1)$y=x^{\frac{2}{3}}$; (2)$y=\dfrac{1}{x^5}$; (3)$y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$。

【分析】利用幂函数的求导法则进行求导。

【解析】(1)$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$。(2)$y'=(x^{-5})'=-5x^{-6}$。(3)$y'=(x^{\frac{7}{8}})'=\dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$。

变式 (1)已知 $y=x^3$,求 $f'(2)$。(2)已知 $y=\dfrac{1}{x^2}$,求 $f'(3)$。

【解析】(1)$\because y'=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$,$\therefore f'(2)=3\times(2)^2=12$。

(2)$\because y'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$,$\therefore f'(3)=-2\times(3)^{-3}=-2\times\dfrac{1}{27}=-\dfrac{2}{27}$。

例2 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程。

【分析】利用三角函数的求导法则求切线的斜率。

【解析】$\because f(x)=\cos x$,$\therefore f'(x)=-\sin x$,$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$曲线在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线斜率为$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$所求直线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,即$\sqrt{3}x+2y-1-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}=0$。

变式 已知点 P 在曲线 $y=\cos x$,$0\leqslant x\leqslant2\pi$ 上,在点 P 处的切线的斜率大于 0,求点 P 的横坐标的取值范围。

【解析】设点 P 的横坐标为 x_0,则点 P 处的切线的斜率为 $y'|_{x=x_0}=-\sin x_0$。

依题意得$-\sin x_0>0$,$\therefore\sin x_0<0$。$\because 0\leqslant x\leqslant2\pi$,

$\therefore\pi<x_0<2\pi$,$\therefore$点 P 的横坐标的取值范围为$(\pi,2\pi)$。