龙门状元

状元笔记

教材详解

高中数学选修 1-1

RA+BS+JS

龙门书局教育研究中心组编
学科主编：傅荣强　本册主编：张玉芹　刘欣

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

ZHUANG YUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE

龍門書局　龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUANBIJI
JIAOCAIXIANGJIE

高中数学选修 1-1

龙门书局教育研究中心组编

学科主编：傅荣强

本册主编：张玉芹　刘　欣

编　者：倪智慧　李有会　封洪波　高玉莲

龍門書局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解:RA+BS+JS课标本.高中数学.选修1-1/龙门书局教育研究中心组编;傅荣强学科主编;张玉芹,刘　欣本册主编.—北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-2015-6

Ⅰ.状…　Ⅱ.①龙…②傅…③张…④刘…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第066914号

策划编辑:田旭　刘娜　责任编辑:刘娜　唐旸　封面设计:魏晋文化

龍門書局出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
北京龙兴印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2009年5月第一版　开本:890×1240　A5
2011年6月第二次修订版　印张:6 1/2
2011年6月第五次印刷　字数:227 000

定　价:14.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

思路决定未来

状元的成功规律

① 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

② 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之：假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

③ 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

好书可以改变一个人的命运！

① 没有什么比基础更重要！第一秘诀：以教材为中心，夯实基础

曾经有位高考状元跟我说，考试中真正的难题很少，题目不会做或者做错了，多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错，其实对知识点的掌握还是似是而非，往往“知其然不知其所以然”，并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说：平时看的最多的书就是教材，每次看都会有新体会，看教材不是简单的记忆，而是深刻的理解，要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候，每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话，大家都深以为然，教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的"基础知识全解"这个栏目中，我们将知识点按照重要程度采用"能级"区分，每个知识点是应该"记忆"还是"理解"，存在什么样的"误区"，如何进行"延伸拓展"、"思维发散"等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材，真正夯实基础。

② 素质、能力比成绩更重要，方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习，最终要归结在素质的养成和能力的提升上。靠不断地机械地做题，考试是不能提升素质和能力的，最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力，就能生发解决问题的方法与技巧，也就拥有了打开一切的"金钥匙"。拥有素质与能力，也定将能考出相当理想的成绩！

在本书的"方法·技巧·能力"栏目中，我们用案例的方式，帮助你发散拓展、突破思维障碍，学会综合运用、举一反三，破解误区和陷阱，最终实现从知识向能力的转化、迁移，培养你的创造性思维和创新能力。

③ 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师，人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中，我们力求使用最新颖的素材，让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题；我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目，当然也要保留多年沉淀下来的经典题目；我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中，"随风潜入夜，润物细无声"，在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

《状元笔记教材详解》专家团队

龙门专家团队

丛书组编：龙门书局教育研究中心
总　策　划：田　旭
执行编委：刘　娜　王美容
各学科主编：
语文：郭能全　王丽霞　涂木年
数学：李旦久　李新星　傅荣强　王思俭
英语：于　静　张成标　赵炳河　朱如忠　陈　俊
物理：胡志坚　张忠新
化学：曹丽敏　张希顺　朱智铭
生物：姚登江
历史：胡　希　魏　明　张华中
地理：何纪延　王太文
政治：张　清

专家团队：

语文
方钧鹤（江苏省扬州中学副校长，特级教师，教授级高级教师）
蒋念祖（江苏省扬州中学语文教科室主任，教授级高级教师）
郭能全（山东省莱芜二中高级教师）
王丽霞（山东省潍坊市安丘实验中学高级教师，省级教学能手）
涂木年（广东省广州六中语文组组长，特级教师）

数学
王思俭（江苏省苏州中学数学教研组组长，教授级高级教师）
周敏泽（江苏省常州高级中学数学教研组组长，特级教师，中国数学奥赛高级教练）
李旦久（山东省烟台一中中级教师）

英语
张成标（山东省济宁市育才中学高级教师，济宁市教学能手）
赵炳河（山东省东营市利津一中高级教师，省级教学能手）
朱如忠（江苏省扬州中学副校长，高级教师）
陈　俊（安徽省安庆教研室特级教师，安徽省学术带头人）
朱尔祥（山东省潍坊一中高级教师）
刘德梁（安徽省安庆一中高级教师）

物理
朱　浩（江苏省苏州中学特级教师，国际物理奥赛金牌教练）
陈连余（江苏省南京市金陵中学特级教师，市学科带头人）
张忠新（山东省潍坊一中高级教师，潍坊市教学能手，全国奥赛优秀指导老师，中国物理学会终身会员）
胡志坚（广东实验中学物理教研组组长，高级教师）

化学
顾德林（江苏省苏州中学特级教师）
朱智铭（北京市平谷中学化学组组长，高级教师）
张希顺（山东省潍坊中学化学组组长，高级教师）
曹丽敏（江苏省常州高级中学化学教研组组长，高级教师，市学科带头人）

生物
王苏豫（江苏省金陵中学教授级高级教师，苏教版生物教材编委会委员）
姚登江（山东省邹城实验中学生物组组长，高级教师）

思想政治
赵浩岭（江苏省扬州中学特级教师）
马维俊（江苏省常州高级中学高级教师）
张　清（山东省烟台一中备课组组长，中级教师）

历史
王　雄（江苏省扬州中学高级教师，教授级高级教师）
魏　明（山东省实验中学高级教师，省级骨干教师，市学科带头人）

地理
何纪延（江苏省苏州中学高级教师）

读者意见调查表

亲爱的读者朋友：

您好！感谢您选购龙门书局的图书（高中数学选修 1-1·RA＋BS＋JS）。为了更好的满足您的学习需求，请将您的想法以及在使用过程中发现的不足和建议反馈给我们，以便不断提高图书质量。

1. 您认为本书的封面：A. 不错 B. 一般 C. 改进的地方________

2. 您认为本书哪些栏目对您学习帮助比较大（ ），您认为本书哪些栏目对您帮助不大（ ）

   A. 基础知识全解　B. 方法能力探究　C. 从教材看高考

   D. 课后习题　F. 教材习题答案

3. 吸引您购买本书的理由（ ）

   A. 知识点讲解全面　B. 方法能力讲解细致　C. 例题选取经典　D. 有易错提示

   E. 有课后练习　F. 有教材与高考的联系　G. 有教材习题答案　H. 其他________

   ____

4. 您所在学校使用的教材版本（如 R、JS 等）

   语文________ 数学________ 英语________ 物理________ 化学________

   生物________ 地理________ 历史________ 政治________

5. 您周边同学使用最多的同步图书________________

   ____

6. 您在学习过程中遇到哪些困难？________________

   ____

7. 您在使用本书时发现的错误（请标明页码、题号）

   ____

   ____

8. 您认为本书需要改进的地方及其他建议________________

   ____

您的个人档案（请务必详细填写）

姓名：　　　　　学校：

年级：　　　　　通讯地址：　　　省　　　市

邮编：　　　　　职业：教师　学生　其他

联系方式：

来信请寄：北京市东城区东黄城根北街 16 号龙门编辑部　王美容（收）

邮编：100717

目 录

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

(RA1.1,BS§1,JS1.1.1)

芝麻开门

在我们的日常生活和数学学习中,都经常涉及表述事物并对其做出判断的问题,表述环节要把问题的条件、探究的结论说清楚,判断环节要把由条件得到结论的推理说明白.本节我们从命题及其关系起步,迈进表述与推理的门槛.

基础知识全解

★★★知识点一　命题

[理解]　用语言、符号或式子表达的、可以判断真假的陈述句叫做命题.其中,可以判定为真的命题叫做真命题,可以判定为假的命题叫做假命题.

例如,我国有四个直辖市,这就是一个命题,它是真命题.该命题为真可由我国有北京、上海、天津、重庆四个直辖市来判定.

又如,直线 $x+y-1=0$ 经过原点,这也是一个命题,它是假命题.这个命题为假可由 $0+0-1\neq 0$ 来判定.

再如,函数 $y=\lg x$ 的定义域是什么? x 是偶数,它们都不是命题.前者不是陈述句,后者虽然是陈述句,但无法判断它的真假.

〈点拨〉　有些命题具有"若 p,则 q"的形式,我们称 p 为命题的条件,q 为命题的结论.此类命题还可写成"如果 p,那么 q"的形式.

例如,若 $x=\frac{\pi}{6}$,则 $\sin x=\frac{1}{2}$,这个命题的条件与结论分别是 p:$x=\frac{\pi}{6}$,q:$\sin x=\frac{1}{2}$.

【例1】　(原创题)命题的本质有二:一是它是陈述句;二是可以判断真假.

判断下列语句是不是命题,对是命题的要指出它的真假:

(1)空集是任何集合的子集;

(2)$x=1$ 时,$\ln x=0$;

(3)函数 $y=3^x$ 是增函数;

(4)如果直线 a//直线 b,直线 b//直线 c,那么直线 a//直线 c;

(5)直线 $x+y+\sqrt{2}=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切;

(6)如图1-1-1所示,如果输入 A 的值是2,那么输出的值是22;

(7)在频率分布直方图中,纵坐标是频率;

(8)向桌面投掷1枚硬币2次,向上的面都是正面的概率是 $\frac{1}{2}$;

(9)函数 $y=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$;

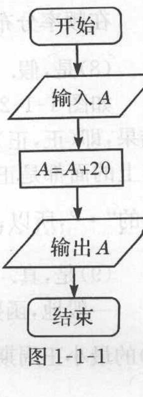


图1-1-1

(10)向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},1)$ 共线；

(11)4 是数列 $\{2n-1\}$ 中的项；

(12)如果 a、b 是正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$；

(13)$x-y=0$.

思路分析：先按“命题是可以判断真假的陈述句”来判定各语句是不是命题，然后再指出其中命题的真假.

规范解答：(1)是，真.

这是有规定的，即规定 $\varnothing\subseteq A$，其中 A 是任意的集合.

(2)是，真.

对 $a>0,a\neq1$，总有 $\log_a 1=0$，所以 $\ln1=0$.

(3)是，真.

对函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq0)$ 来说，$0<a<1$ 与 $a>1$ 时，它分别是减函数与增函数，所以 $y=3^x$ 是增函数.

(4)是，真.

这是公理.

(5)是，真.

圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心是点 $(0,0)$、半径是 1.

根据点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$ 的距离公式 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，可求得点 $(0,0)$ 到直线 $x+y+\sqrt{2}=0$ 的距离是 1，它刚好等于半径，据此就可以判定直线与圆相切.

(6)是，真.

图中所示的程序框图是顺序结构，自上而下执行时，先是 $A=2$，然后把 $A+20$ 赋给 A，A 的输出值就是 22.

(7)是，假.

在频率分布直方图中，纵坐标是$\frac{频率}{组距}$.

(8)是，假.

如图 1-1-2 所示，投掷 1 枚硬币 2 次，共有 4 个结果，即(正，正)、(正，反)、(反，正)、(反，反)，其中向上的面都是正面包含 1 个结果，即(正，正)，见图中的“·”，所以，其概率 $P=\frac{1}{4}$.

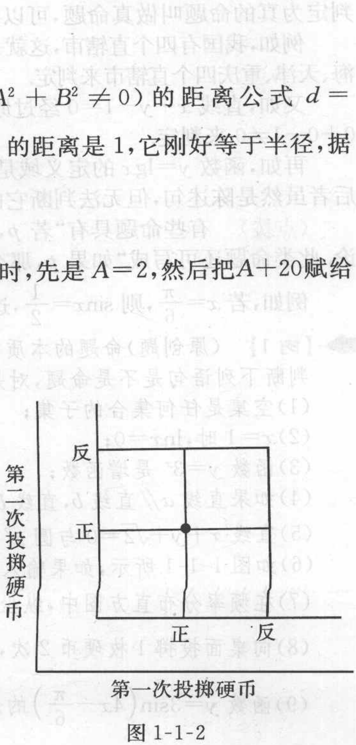


图 1-1-2

(9)是，真.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0,\varphi\neq0)$ 的最小正周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

(10)是,真.

$b=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,所以,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线.

一般地,$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$时,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线.

(11)是,假.

数列$\{2n-1\}$即1,3,5,…,但4不是这个数列中的项.

(12)是,真.

这是均值不等式.

(13)不是.

在x与y的值不明确的时候,无法判断它们的差是否为0.

反思 本例以命题为载体,勾起了许多回忆,不少知识点被融入了其中,内容、时间跨度都比较大,这是上下贯通、左右协调、前后衔接、立体交叉式的学习,有助于拓展你的思维、发展你的思想,常温故才能知新.

【变式1】 写出下列命题的条件p与结论q,并指出命题的真假:

(1)如果$a>1$,那么函数$y=\log_a x$是$(0,+\infty)$上的增函数;

(2)若直线l//平面α,则l与α内的任一直线平行或异面;

(3)圆C_1与C_2外切时,它们的圆心C_1、C_2的距离等于它们的半径r_1与r_2之和;

(4)一个算法在计算机上不可执行时,它是没有意义的;

(5)当事件A与B互斥时,事件$A+B$的概率为$P(A+B)=P(A)+P(B)$;

(6)$0<\alpha<\pi$时,$\sin\alpha>0$;

(7)非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(8)当$b-a=c-b$时,a、b、c成等差数列;

(9)当$a>1$时,$a^{1.11}>a^{1.1}$;

(10)当直线l_1、l_2的斜率k_1与k_2相等时,l_1//l_2或l_1与l_2重合.

规范解答:(1)p:$a>1$,q:函数$y=\log_a x$是$(0,+\infty)$上的增函数;真.

(2)p:直线l//平面α,q:l与α内的任一直线平行或异面;真.

(3)p:圆C_1与C_2外切,q:$|C_1C_2|=r_1+r_2$(也可表示为$C_1C_2=r_1+r_2$);真.

(4)p:一个算法在计算机上不可执行,q:这个算法没有意义;真.

(5)p:$A\cap B=\varnothing$,q:$P(A+B)=P(A)+P(B)$;真.

(6)p:$0<\alpha<\pi$,q:$\sin\alpha>0$;真.

(7)p:非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直,q:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;真.

(8)p:$b-a=c-b$,q:a、b、c成等差数列;真.

(9)p:$a>1$,q:$a^{1.11}>a^{1.1}$;真.

(10)p:$k_1=k_2$,q:l_1//l_2或l_1与l_2重合;真.

反思 从本例应该得到四点启示:

第一，正确地分辨一个命题的条件与结论，有助于提高读题的能力;

第二，结合当前的学习回顾以往的知识，有助于知识的系统化，更有助于培养自己完整的思想体系;

第三，不是所有的命题都能写成“若 p，则 q”的形式，例如，我国是发展中国家;

第四，在上下文不至于造成误解时，条件、结论的书写要力求简洁. 例如，第 (10) 小题就是这样处理的.

【变式 2】 改写下列命题为“若 p，则 q”的形式，并指出命题的真假:

(1)对定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$，当 $f(-x)=-f(x)$时，它是奇函数;

(2)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆;

(3)在数列$\{a_n\}$中，当 $a_{n+1}-a_n$ 是常数时，这个数列是等差数列;

(4)对有斜率的两条直线 l_1 与 l_2，当它们的斜率 k_1、k_2 满足 $k_1k_2=-1$ 时，$l_1\perp l_2$.

规范解答:(1)若函数 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上，且 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$是奇函数;真.

(2)若 $D^2+E^2-4F>0$，则方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆;真.

(3)在数列$\{a_n\}$中，若 $a_{n+1}-a_n$ 是常数，则数列$\{a_n\}$是等差数列;真.

(4)若 $k_1k_2=-1$，则 $l_1\perp l_2$;真.

反思 由本例应当得到两点启示:

第一，写命题要灵活一些，不要太呆板. 例如，第 (1) 小题可把“大前提”写在“若”字的前面，即对定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$，若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$是奇函数. 又如，第 (4) 小题我们写成了“若 $k_1k_2=-1$，则 $l_1\perp l_2$”. 这不至于引起误解.

第二，讨论真命题，这是一个难得的温故机会，抓住它乃明智之举，可使你的学习在知新中巩固、在回忆中提高. 例如，通过第 (2) 小题，我们既练习了改写命题又回顾了圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，该方程还可以表示为 $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)(D^2+E^2-4F>0)$，这就是 $D^2+E^2-4F>0$ 时方程表示圆的充足理由.

★★★知识点二　四种命题

[掌握]　对“若 p，则 q”形式的命题来说，交换 p，q 或者否定 p、q，其结果仍是命题，并且，这些命题之间有着内在的联系.

*(1)在两个命题中，如果第一个命题的条件(或题设)是第二个命题的结论，且第一个*命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题;如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆命题.

(2)一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定，这样的两个命题叫做互否命题;把其中一个命题叫做原命题，另一个就叫做原命题的否命题.

(3)一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，这样的两个命题叫做互为逆否命题；把其中一个命题叫做原命题，另一个就叫做原命题的逆否命题.

〈点拨〉 一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用$\neg p$ 和$\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定. 四种命题的形式就是：

原命题：若 p，则 q；

逆命题：若 q，则 p；

否命题：若$\neg p$，则$\neg q$；

逆否命题：若$\neg q$，则$\neg p$.

【例2】 (原创题)据原命题可以写出它的逆命题、否命题和逆否命题，探究此类问题，意在探究交换条件与结论、否定条件与结论对命题的形式以及真假产生了哪些影响. 例如，原命题是一个定理，如果它的逆命题是真命题，那么这个定理就有逆定理，否则这个定理没有逆定理，但它可以有逆命题，且逆命题为假. 要注意，逆否命题是原命题既否定又交换的产物.

解答下列各题：

(1)设 $a>0$，且 $a\neq1$. 给出命题 A：如果 $a>1$，那么函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 写出 A 的逆命题 B、否命题 C 和逆否命题 D.

(2)给出命题 M：如果 $a_n=4n+1$，那么数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 写出 M 的逆命题 N，并指出 N 的真假.

思路分析：把原命题理解为“若 p，则 q”，逆命题、否命题和逆否命题就是“若 q，则 p”、“若$\neg p$，则$\neg q$”和“若$\neg q$，则$\neg p$”.

规范解答：(1)B：如果函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，那么$a>1$；

C：如果 $0<a<1$，那么函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数；

D：如果函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数，那么 $0<a<1$.

(2)N：如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，那么 $a_n=4n+1$；假.

反思 由本例应当得到三点体会.

第一，要积累否定常识. 例如，第 (1) 小题中已经约定了 $a>0$ 且 $a\neq1$，所以，对“$a>1$”的否定是“$0<a<1$”，这类似于求补集. 又如，“是”的否定是“不是”，所以，在第 (1) 小题的解答中，我们把“函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数”的否定写成了“函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数”.

第二，在第 (2) 小题中，当数列 $\{a_n\}$ 是等差数列时，a_n 有可能等于 $4n+1$，但绝对不是 a_n 一定等于 $4n+1$，还有 $a_n=n$，$a_n=3n-5$，…很多可能.

第三，学习普遍规律，不要被命题的真假所误导. 例如，在第 (1) 小题中，A、B 都是真命题，在第 (2) 小题中，M 是真命题，N 是假命题，这就告诉我们，原命题是真命题时，其逆命题可能是真命题，也可能是假命题.

【变式1】 写出下列条件的否定：

(1)$x\geqslant0$；

(2)a、b、c 都小于$\frac{1}{3}$；

(3)$x_1,x_2,\cdots,x_n$中至少有一个等于y；

(4)x、y、z中至多有一个正数.

规范解答：(1)$x<0$.

(2)a、b、c中至少有一个大于等于$\frac{1}{3}$.

(3)$x_1,x_2,\cdots,x_n$都不等于y.

(4)x、y、z中至少有两个正数.

反思 正确地使用否定用语对探究四种命题以及其他逻辑问题至关重要.否定条件是挺难的事儿，掌握它，需要时间，更需要积累.在本例中，第(1)小题，$x\geqslant0$的否定是$x<0$,对此可以类比集合的补集去理解；第(2)小题，a、b、c都小于$\frac{1}{3}$，$a\geqslant\frac{1}{3}$就否定了它，同理，$b\geqslant\frac{1}{3}$与$c\geqslant\frac{1}{3}$都能否定它，所以，对"a、b、c都小于$\frac{1}{3}$"的否定确定为"a、b、c中至少有一个大于等于$\frac{1}{3}$"；第(3)小题，$x_1,x_2,\cdots,x_n$中至少有一个等于y，其含义是有1个等于y或有2个等于y或……直到有n个等于y，其否定就是"$x_1,x_2,\cdots,x_n$都不等于y"；第(4)小题，x、y、z中至多有一个正数，其含义是没有正数或者有一个正数，所以，它的否定是"x、y、z中至少有两个正数".

【变式2】 解答下列各题：

(1)判断命题"若$\cos A=\cos B$,则$A=B$"的真假；

(2)写出(1)中的命题的逆命题、否命题和逆否命题,并指出这三个命题的真假.

规范解答：(1)假.

例如,$\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}\neq\frac{3\pi}{2}$.

(2)逆命题：若$A=B$,则$\cos A=\cos B$;真.

否命题：若$\cos A\neq\cos B$,则$A\neq B$;真.

逆否命题：若$A\neq B$,则$\cos A\neq\cos B$;假.

反思 判定一个命题是假命题，不需要证明，只要找出一个反例就可以了，第(1)小题就是这样处理的.

★★★知识点三 四种命题的关系

[理解] 四种命题的关系如图1-1-3所示.

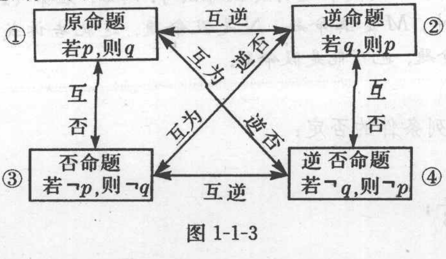


图1-1-3

〈点拨〉 要注意，在命题的四种形式中，谁是原命题是相对的，而不是绝对的. 例如，如果设图中的④是原命题，那么它的逆命题、否命题、逆否命题依次是③、②、①.

[记忆] 四种命题的真假性的关系：

两个命题互为逆否命题时，它们有相同的真假性.

两个命题互为逆命题或否命题时，它们的真假性没有关系.

【例3】 (原创题)学习四种命题的关系，要悟出这样一个道理：

当一个命题的真假不易判断时，往往可以通过判断原命题的逆否命题的真假来判断原命题的真假.

已知 $a^2+b^2=2$，求证：$a+b\leqslant 2$.

思路分析：把本例视为一个真命题，通过证明它的逆否命题为真来完成本例.

规范解答：先证明"若 $a+b>2$，则 $a^2+b^2\neq 2$".

当 $a+b>2$ 时，有

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]>\frac{1}{2}(2^2+0^2)=2,$$

所以

$$a^2+b^2\neq 2.$$

以上表明"若 $a^2+b^2=2$，则 $a+b\leqslant 2$"的逆否命题为真命题，

所以，原命题成立.

反思 像本例这样证明问题，反映出来一种数学思想，那就是等价转化思想. 它告诉我们，讨论某一个问题有困难时，可转至探究与之等价的问题，其效果是一样的.

【变式】 已知正实数 a、b、c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$，求证：$a$、$b$、$c$ 中至少有两个不小于1.

规范解答：a、b、c 中至多有一个不小于1，它包含下面两种情况：

①a、b、c 均小于1，即 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$，这时 $\frac{1}{a}>1$，$\frac{1}{b}>1$，$\frac{1}{c}>1$，

所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>3\neq 2.$$

②a、b、c 中有两个小于1，不妨设 $0<a<1$，$0<b<1$，$c\geqslant 1$，这时 $\frac{1}{a}>1$，$\frac{1}{b}>1$，

所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>2+\frac{1}{c}\neq 2.$$

综上，原命题的逆否命题成立，

所以，原命题成立.

反思 本例我们是通过证明原命题的逆否命题成立来完成的，这是一种策略. 要注意，"至少有两个"的否定是"至多有一个"，"="的否定是"≠"，这两点清楚了，你才能写出原命题的逆否命题.

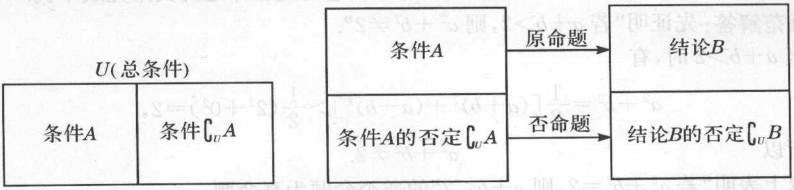
模糊点·易错点·障碍点

在本节中，我们探究的核心问题是命题.

探讨命题，模糊点、易错点、障碍点集中地体现在否定上了.尽管否命题中含有对条件、结论的否定成分，但是，否定与否命题还不是一回事，否定是指对某一个条件实施一分为二，否命题是指对一个命题的条件与结论都进行否定之后形成的一个新命题，这两个问题都可以借助集合得到解释.

如图 1-1-4(1)，设全集 U 表示总条件，$A\subseteq U$，这时 A 与 $\complement_U A$ 互为否定.

例如，$U=(-\infty,+\infty)$，$A=(-\infty,1)$，$\complement_U A=[1,+\infty)$.



(1) (2)

图 1-1-4

如图 1-1-4(2)，原命题为"若 A，则 B"时，否命题是指"若 $\complement_U A$，则 $\complement_U B$"，它由对条件 A 的否定与对结论 B 的否定二者合成.

例如，$x>1$ 时，$x+1>2$，这是一个命题，它的否命题是"$x\leqslant 1$ 时，$x+1\leqslant 2$".

1.条件的否定

【案例1】 写出下列语句的否定，并举出相应的例子：

(1)大于等于；

(2)不等于；

(3)是；

(4)都是(或称全是)；

(5)不全是；

(6)最多有一个；

(7)最少有两个；

(8)最多有三个.

分析与解答：(1)小于.例如，$x\geqslant 1$，它的否定是 $x<1$.

(2)等于.例如，$A\neq\dfrac{\pi}{3}$ 的否定是 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(3)不是.例如，这个算法结构是条件结构，其否定是这个算法结构不是条件结构.

(4)至少有一个不是.例如，数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 都是等比数列，它的否定是数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 至少有一个不是等比数列.

(5)都是(或全是).例如，a、b、c 不全是 0，它的含义是 a、b、c 至少有一个不是零，它的