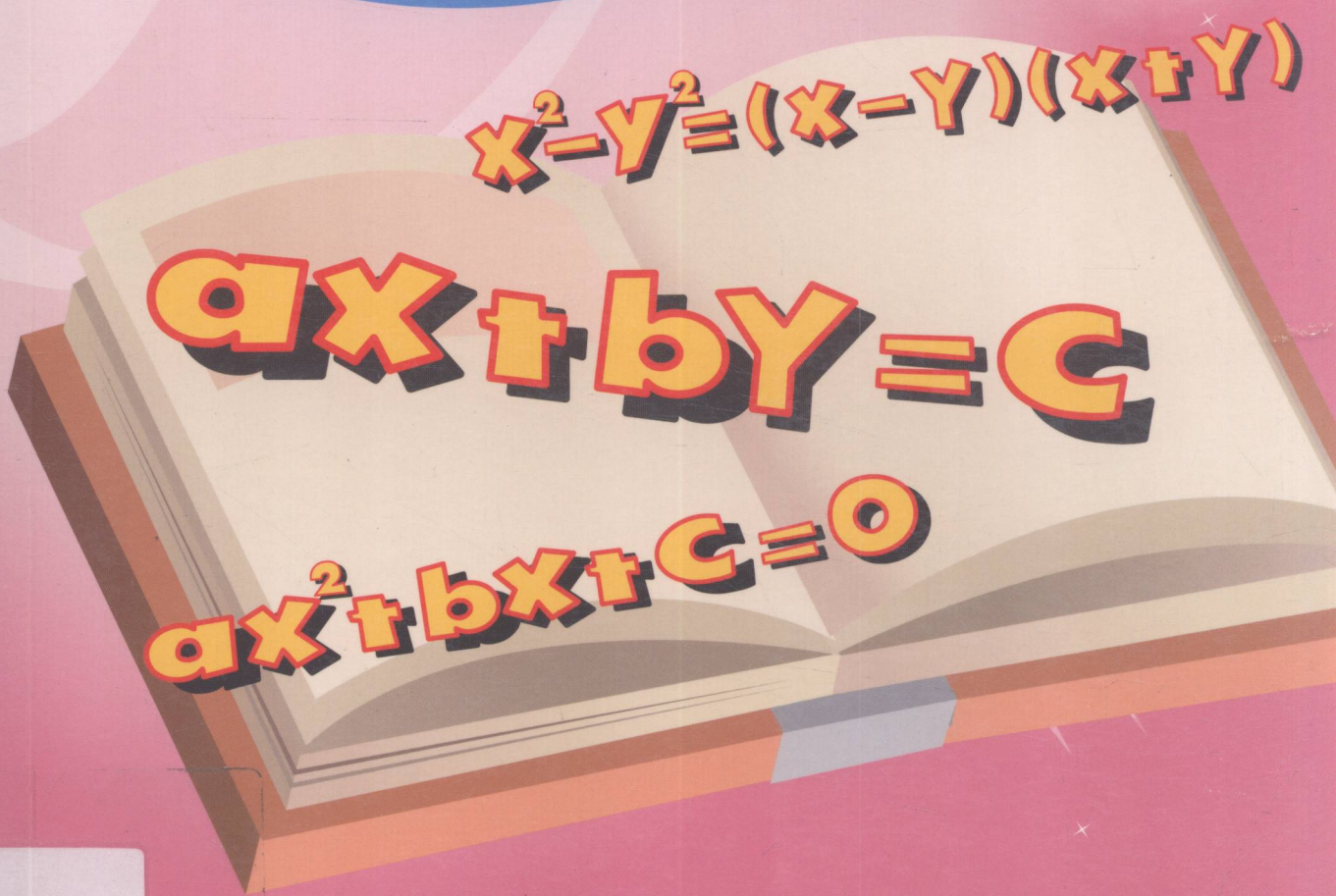
楊維哲教授的數學講堂

人人是資優生，
人人可以是資優生
數學要讀向前，
不是溫故知新

# 代數是什麼?!




資優專家台大 **楊維哲** 教授為中學生編寫的數學專書

62

G634.62
2002

楊維哲教授的數學講堂

人人是資優生，
人人可以是資優生
數學要讀向前，
不是溫故知新

港台书

# 代數是什麼？！

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$ax+by=c$

$ax^2+bx+c=0$

臺北市大同區圖書館藏書

資優專家台大 **楊維哲** 教授為中學生編寫的數學專書

國家圖書館出版品預行編目資料

楊維哲教授的數學講堂：代數是什麼？／楊維哲編著. —二版.—臺北市：五南，2008.01
面；　公分.
含索引
ISBN: 978-957-11-5068-0（平裝）
1.數學教育　2.代數　3.中等教育
523.32　96025118

5Q07

# 楊維哲教授的數學講堂—

## 代數是什麼？

編　　著 — 楊維哲(313.5)
發 行 人 — 楊榮川
總 編 輯 — 龐君豪
主　　編 — 黃秋萍
責任編輯 — 蔡曉雯
封面設計 — 莫美龍
出 版 者 — 五南圖書出版股份有限公司
地　　址：106 台北市大安區和平東路二段 339 號 4 樓
電　　話：(02)2705-5066　傳　　真：(02)2706-6100
網　　址：http://www.wunan.com.tw
電子郵件：wunan@wunan.com.tw
劃撥帳號：01068953
戶　　名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室 / 台中市中區中山路 6 號
電　　話：(04)2223-0891　傳　　真：(04)2223-3549
高雄市駐區辦公室 / 高雄市新興區中山一路 290 號
電　　話：(07)2358-702　傳　　真：(07)2350-236

法律顧問　得力商務律師事務所　張澤平律師

出版日期　2007 年 10 月初版一刷
　　2008 年 2 月二版一刷
定　　價　新臺幣 220 元

原書名：數學怪傑台大教授揚維哲開講：代數

※版權所有・欲利用本書內容，必須徵求本公司同意※

# PREFACE

# [序言]

這本小書是我們的中學數學資優序列的第一冊，主題當然是代數。

退休之後，很幸運的到濱江國中與一群小孩子每週有兩節見面的機會，兩年下來，我已準備了許多講義，這就是這序列的直接動機。當然這些小孩子給我許多快樂，尤其當我作了某種嘗試，果然成功時；但是也經常有挫折感！不是我的教法的問題，（我一定是第一流的教師，放心！）也不是學生學習的問題，（這群小孩子，在輔導室眼中是數學菁英！）而是更大一點的環境，有些問題！

我覺得：他她們，最重要的資源就是「時間」，而這些可憐的資優生，資源被嚴重地剝奪了！有人說：問題出在父母「太關心孩子！」我的說法是：「這不是問題，因為我從前也很關心孩子」；問題出在：父母「太關心孩子的升學！」（就多了三個字！）

我不是勸家長「不要關心孩子的升學」，否則就是「荒謬的高調」了！但是，對家長，我有誠懇的建議：你對孩子，應該要有一點點自信，你對教育，也要有點常識！甚麼常識？「注重效率」！你常聽到「錢要用到刀口上」，對的！那麼，孩子的時間（精力），也要用在刀口上吧。

我發現：幾乎所有的教師，所出的作業習題，量太多，都遠超過學生所需！遠超過學生所能負荷！更加可恨的是：這些教師，並不是花精神出作業，而是一個命令，家長就得買那些「講義」（=測驗卷，書店出的！），學生就要做！這是最輕鬆的害人法，而受害者以及他她們的父母還千恩萬謝！

作業之外還有考試，小考小測，越考得多，家長就相信這個老師越認真！？我認為應該規定：「（一節課 45 分鐘，）只要一個測驗 5 分鐘，老師薪水就應該扣一成一，考一刻鐘，就扣薪 $\frac{1}{3}$。」許多家長只相信「多」：多做習題演練，多多考試演練，多多補習，把能夠考的東西都練習過，這是為了我家孩子將來的考試勝利，最好的戰略。

我要說的是：對於你的孩子的考試，這個戰略是不太高明的！而對於你的孩子的讀書學習，這個戰略不但是不太高明，其實是非常糟糕！這是「糟蹋資優」最有效的戰略。

可是這種心態卻是那麼普遍！我用教科書的爭議做例子來說明。三十年前，高中數學有四種教科書，有人統計其「市場佔有率」，結果，四種書的佔有率，加起來是 195%。你想：這個加法有沒有問題？沒有問題，因為大部分的學校用兩種課本。（我一個正常人、正常的老師，實在無法理解，要如何使用兩種教科書。若是英文，一本Reading＝閱讀文章，一本Grammar＝文法，兩本合起來才是一科；而「實驗本」與「東華本」卻是講完全一樣的題材！）「用」兩種課本，意思只是買兩種課本，家長多花錢，而且更感謝學校的校長，或教務主任，或學科主席，那個做此決定的人。沒有一個家長出面抗議（或者「質詢」一下？）。家長自動地認為：學校一定是為我們孩子著想！

萬一有個家長真的出面質詢，老師或者別的家長一定辯稱：我們判斷將來的聯考，出題者也許用「實驗本」，也許用「東華本」，因為這樣，兩種都用才安全！這樣的家長，對教育沒有常識，因此受欺，也因為這樣的家長，對教育沒有常識，那個做此決定的人，敢欺負你。

實際上，聯考的根據應該是課程標準，不是課本；課本都經過審訂合格，合乎課程標準；因此應付聯考，絕對沒有問題，斷然不會說，這個考題，這本教科書才有那本沒有。四種教科書，也許有「好」、「壞」（如：是否流暢可讀），那是擇定課本的人之判斷，當然權力就是責任。獨獨「選擇兩種教科書」，絕對是「不負責任」！



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

那現在是這個郝市長要替你作決定：一綱一本。他是一舉兩得。最主要的目的是「奪權」，教育部說「一綱多本」，我就是說「一綱一本」，而且是我說了算，我贏！請看今日之域中，竟是誰家天下。另一方面，這是「譁眾取寵」：我是為眾多的家長們著想！減輕你們的負擔，不用買那麼多種教科書。

六百多年前，洪武皇帝為了眾多的應考（作官）的聯考生著想，欽定一本四書集注，大大減輕考生的負擔，不用買那麼多種教科書。真是皇恩浩蕩！現在尺度不同，（大明十八省，有中華民國的版圖三分之一；考試標的也不同：一則考上了可以當官發財，一則考上了可以讀高中，將來可以「更容易」應考下一個考試！）但是服務百姓的熱忱（=三作牌精神）是一樣的。可以譁眾取寵的根據，只是：「對教育毫無常識的家長，可欺！應欺！」。

對教育，要有點常識：如果讓孩子覺得讀書那麼痛苦，書當然讀不好；其實每個孩子天生都是資優的。小孩子需要有「時間的餘裕」，才能夠優哉悠哉的學習，效率才會高。題目不必多，可以稍微難一些，讓他們用心思考，這就達到教育的目的：他們會變得有自信，做事情（如考試）能認真堅決。

初中是資優生智慧發展的關鍵期，思考方式由具體操作轉向抽象連繫，而數學科則是最關鍵的學科。數學科是最特別的學科，因為它是全然可以「獨立學習」的！關心子女教育，關心子女升學的家長，常常已體認到數學非常重要，結果是讓孩子補習過頭，習題演練過頭。這些家長的心裡還常有一個理由：「雖然我家孩子，看起來資質不差，但是考試難免作錯，總拿不到滿分；所以可見磨練不夠！」

學數學，最好的複習方式是：「讀向前」！數學不是「溫故知新」：一次方程式讀得再多，作了一萬道習題，也「知」不了二次方程式。數學通常是「讀新自然溫故」。讀新的題材，強迫你在腦中搜索有關的記憶，找出關聯的與有用的知識；於是你的理解就更深一層，你就更會活用。甚至於連計算上的粗心，也隨著成熟度的提升而漸漸可以改善。

本著如上所說的認識，我們這序列的小書，不是遵照課程標準而寫的教科書，而是副教科書，是給中學資優生獨力向前邁進的補充讀物。不但是不必送審，事實上，不論課程標準怎麼改，我們這序列的小書，都可以保持功能！

對象讀者說是「初中資優生」，其實我根本認為「人人是資優生」，「人人可以是資優生」，即使段考六十分，只要你自認為不笨就夠了！對於資優生，我的建議是：你有教科書，你不必等老師上課教！自己就可以讀；書上有「隨堂練習」加「自我評量」，你就全部做！除此之外，你不須再做額外的習題！你應該拒絕額外的習題！讀完了一冊課本，就向老師或輔導室求取下一冊來讀！

另一方面，閱讀我們的這個序列，也是一個可行的辦法：獨立自修，書的最前面可能是你已經學會了的材料，那就輕快讀過或跳過；（一個簡單的辦法是，選做一兩題習題，你馬上可以判斷，這是否需要讀；）等到找出你的「出發點」之後，就開始認真讀，不要跳來跳去！（數學是有系統的！）習題就必須認真做，寫在很正經的簿子上，練習「清晰地表達你的思路」，而不是練習「快=潦草」。

在過去的四、五年，我在台大有很有趣的經驗：平常學期，我教「資優微積分」，到了暑假，我教「資劣微積分」；資優微積分的正式稱呼是「微積分優」（Honour Course of Calculus），並非學生「資優」，只是表示學生的「學習動機強烈」；「資劣微積分」，並非學生「資劣」，只是對授課教授的嘲謔。（暑修班，有些學生不到一成，是為了將來留學，自己在暑假加選，這一定是動機強烈，是資優生；其它絕大多數都是必修課被當的重修生。）不論如何，我認真教，而學生的學習效果也非常可喜！（他們並不資劣，只是預備知識有缺，而且「學習動機低下」，一上了台大，先學會翹課，就被當了；但是到了暑修，對很多人是破釜沈舟，學習動機不須懷疑。）

結論是，對我來說，「資優，資劣」，並無區別！只有一個區別：你假定他她們有多少預備知識。因為這個緣故，我甚至於認為：如果你是一個家長，而你的孩子正就讀七年級八年級，而似乎「大腦的數學細胞不足」，你可以叫他或她，讀這一小冊。（畢竟，在這個階段，談不上甚麼預備知識，一切從零開始！）你不必煩惱一綱一本或一綱多本甚或無綱多本，（煩惱那個真是作虛功！）叫他「慢慢地讀這本書，一題一題作！」，你會發現他進步很快。

## 謝詞

這一序列小冊子的出現，我們必須感謝這些人：

首先是一些濱江人，我只枚舉領導的蘇萍校長，李世宏主任，羅月娥主任，以及李玉華主任，她他們盡力給我舒適的濱江環境；我把蘇輝湟，我的學生，也列在這裡，因為他認真地做我的助教。

感謝活潑可愛的濱江學生，給予這個沒有孫子的教授，很大的快樂。

有些濱江家長，非常熱心的幫助我！盛情可感！

濱江辦了兩次寒假的數學營，最簡單的整數論及最簡單的解析幾何，就變成這系列的另兩冊，那麼我還要再次感謝那些濱江人，尤其輔導室與數學科的同仁。

最後我要特別感謝我最好的兩個朋友：建中退休教師吳隆盛，與「同室」蔡聰明教授，他們長期地在數學教育方面，有深入的觀察與思考，而經由長期的討論，影響到我，有時是糾正我。他們也願意幫我校讀這些小書。

# CONTENTS

# [目錄]


序言

01 CHAPTER

## 算術的複習 1

1.1 楔子——代數與算術 ..... 1
1.2 加減乘除 ..... 2
1.3 負數 ..... 5
1.4 除法 ..... 7
1.5 除法——速度 ..... 12
1.6 比例 ..... 15
1.7 圓周率定律 ..... 23
1.8 指數 ..... 28
1.9 近似值與科學記法 ..... 32

02 CHAPTER

## 一次方程式 35

2.1 一元一次方程式 ..... 35
2.2 一元一次方程式的應用 ..... 40
2.3 聯立一次方程 ..... 42
2.4 變形的聯立二元一次方程 ..... 45

2.5 聯立三元一次方程 ..... 46
2.6 聯立一次方程式的應用 ..... 50

03 CHAPTER

## 多項式 53

3.1 由單項式到多項式 ..... 53
3.2 式子的運算——加減 ..... 57
3.3 式子的運算——交叉相乘法 ..... 58
3.4 二次式之因式分解——交叉相乘法 ..... 64
3.5 幾個公式 ..... 67
3.5.1 平方公式 ..... 67
3.5.2 二項式公式 ..... 68
3.5.3 割圓恆等式 ..... 70
3.6 分離係數法的應用 ..... 71
3.6.1 乘法 ..... 71
3.6.2 帶餘除法 ..... 72
3.6.3 綜合除法 ..... 73
3.7 變數代換法因式分解 ..... 75
3.8 進一步的分解因式 ..... 78
3.8.1 因式定理的應用 ..... 78
3.8.2 平方公式 ..... 79
3.8.3 平方差與立方差公式 ..... 80

04 CHAPTER

## 二次方程式 83

4.1 數系的五則與數線 ..... 83

4.2 附錄——開方法的算術 ..... 87
4.3 二次方程式——純開平方 ..... 91
4.4 二次方程式——配方法 ..... 92
4.5 二次方程式——公式解 ..... 95
4.6 根與係數的關係 ..... 97
4.7 無理方根的簡單計算 ..... 100
4.8 虛根 ..... 105

05 CHAPTER

二次方程式論的衍生 109

5.1 代換的妙法 ..... 109
5.2 嘗試有理分數根 ..... 110
5.3 分式方程 ..... 111
5.4 二次根式方程 ..... 117
5.4.1 根分式方程 ..... 122
5.4.2 三次根式的方程 ..... 125
5.5 二元一、二次聯立方程 ..... 126
5.6 二元二次聯立方程 ..... 129
5.6.1 設法得出一次的方程 ..... 129
5.6.2 觀察對稱性 ..... 135
5.7 更多元的雜題 ..... 137

索 引 143

習題解答 159



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# CHAPTER 1

# 算術的複習

## 1.1 楔子——代數與算術

### 【x】

很多人都聽說過：代數就是「出現有$x$的算術」。或者說：代數就是「一堆公式，出現有$x$」。

### 【和差問題】

有趣而且最簡單的問題是：有一大一小的兩個數，相加得「和」（sum）23，相減得「差」（difference）9，求兩數！

$$\begin{cases} 大+小=23 \\ 大-小=9 \end{cases}$$

兩式相加：大＋大＝32，大＝16

兩式相減：小＋小＝14，小＝7

所以你已經在作代數了！雖然只有一個小小的「習慣」，（或者說「規定」），你的答卷上寫：

令大數為$x$，小數為$y$，於是：

$$\begin{cases} x+y=23 \\ x-y=9 \end{cases}$$

兩式相加：$2*x=32$，$x=16$

兩式相減：$2*y=14$，$y=7$

當然你已經得到和差問題的公式：

$$若\begin{cases}x+y=s\\x-y=d\end{cases}，則\begin{cases}x=\dfrac{s+d}{2}\\y=\dfrac{s-d}{2}\end{cases}$$

所以代數比算術簡單！（下一節起複習一些算術。）

## 1.2 加減乘除

### 【四則運算】

當然你懂得加減乘除！知道不可以用零去除任何數！

### 【加法與減法】

我們最先學的運算是「加法」。而我們的「理解」，剛開始是「個數」的相加：「2 個柑子與 3 個柑子，合起來有 5 個柑子」，「2 顆荔枝與 3 顆荔枝，合起來有 5 顆荔枝」，這是很具體的，而且可以具體地「點算操作」！

當然也很快就有「逆運算」即「減法」的出現！例如：「7 顆荔枝，吃掉 3 顆，只剩 4 顆」，或者，「冰箱裡原本 7 個柑子，拿出來 3 個，（3 人，各吃了 1 個！）只剩 4 個柑子」。

漸漸「抽象化」，而得到：

$$2+3=5；7-3=4$$

從「具體」到「抽象」，這個進步，其實是很大很重要的一大步！

### 【量綱與單位】

我們也學會：「不同類的東西不能相加」！若有「3 個柑子，與 5 顆荔枝」，你把它們加成 3+5=8，並無意義！

更進一步，你也知道：3 公尺和 6 公斤，不能相加，因為，「公尺」是長度，「公斤」是重量，不同類！以下，這裡所謂的「類」別，我們將用一個很文雅的稱呼，「量綱」。所以，「長度」與「重量」，是不同的量綱，因此不能相加！

但是，2.3 公尺與 4.2 呎，卻是可以相加的！當然不是用 2.3+4.2=6.5。實際上，它們是「同量綱」，都是長度！但不是同樣的單位！必須換算！

因為 1 呎=0.3048 公尺，4.2 呎≈1.280 公尺，就算出

2.3 公尺+4.2 呎≈3.580 公尺

在日常生活中，在學習理化時，我們經常要用到單位換算。這當然是乘（除）法運算的最簡單（最常用到！）的應用。

**例題 1** 計算 3+4+3+3+3+4+3+4+4+3=？

**解** 3 出現 6 次，4 出現 6 次，因此=3∗6+4∗4=18+16=34

我們用到加法可締律，所以((3+4)+3)+⋯=3+((4+3)+⋯)

我們用到加法可換律，所以 3+((4+3)+⋯)=3+((3+4)+⋯)

於是乎經過極繁瑣的步驟，終於變成(3+3+3+3+3+3)+(4+4+4+4)；

但是，你一點兒也沒有感覺到其間的繁瑣！（你已經完全習慣了！）

你的工作只剩下「點算」！

## 【乘法】

於是，再用：乘法是加法的速算，就得到答案了！

**例題 2** 計算 3+4+7+6+8+9+2+1+6+5+4+5=？

**解** 用鉛筆，把「互補成對」的鉤連起來：(3，7)，(4，6)，(8，2)，(9，1)，(6,4)，(5,5)，得到答案：60；你的工作只剩下「點算」！這也是用到可換律、可締律！

**例題 3** 計算 25∗35∗12∗2=？

**解** 乘法也有可換律、可締律！

最少要記得：

2∗5=10；4∗25=100；（美國有硬幣 quater=25cents）

$15*2=30$，$35*2=70$，$45*2=90$，或者：$\frac{3}{2}=1.5$，$\frac{7}{2}=3.5$

所以：上式$=25*35*(4*3)*2=(25*4)*(35*2)*3=100*70*3=21000$

## 【分配律】

在四則運算中，也許最重要的是「乘法對加法的分配律」：

$$(x+y)*z=x*z+y*z$$

推廣為：

$$(x+y)*(u+v)=x*u+y*u+x*v+y*v$$

**例題4** $12*13=156$

**解** 縱式寫法是

$$\begin{array}{rr} & 1\ \ 3 \\ *) & 1\ \ 2 \\ \hline & 2\ \ 6 \\ 1\ \ 3 & \\ \hline 1\ \ 5\ \ 6 & \end{array}$$

其實這個計算法已經用到分配律！就等於說：

$x=10$，$y=2$，$u=10$，$v=3$

**註** 所有的縱式乘法都用到分配律！

**習題**（縱式計算）：

(1) $234*13579$

(2) $121212*98759$

(3) $16731232632\div 4456908$

(4) $47382176*125$

# 1.3 負數

## 【負數的意義】

例如說：甲乙兩店有複雜的金錢來往，年度末要計算清楚，那麼就一款一款的計算！若是規定：甲欠乙的金額為正，計算出

$$23+41-37-62+27-11-43=-62$$（單位：萬元）

那麼，甲欠乙 $-620000$ 元，意思是：乙欠甲 62 萬元！

## 【座標】

例如說：古時候，縱貫線只是從屏東到花蓮（不理會支線！），那麼鐵路局可以擇定某站，例如彰化，為基準點（＝原點）；任何一站就給以一個「座標」，以「鐵路距離」計算！但是這就須要確定「正負向」，例如說以「往北」為正，鐵路局稱為「上行」！（其實基隆再上行，就是先「往東」，轉成「往南」了！）這時，台北的座標為正，但高雄的座標為負；溫度計的刻度也是有正負！「負的溫度」代表「零下」。

如果你喜歡下棋，就知道：棋力也有「座標」，也就是「段位」：2 段比 1 段「強」，3 段比 2 段「強」，等等，9 段比 8 段「強」；（7 段以上才稱「高手」。）但是不入段的呢？用「級」：1 級比 2 級「強」，2 級比 3 級「強」，等等；所以我認為應該規定：「零段」＝「零級」，那麼：「$-3$ 段」＝「3 級」；「$-4$ 段」＝「4 級」；就非常方便了！

## 【負號與減號，直線上的座標】

$4-3$ 大概讀成「四減三」，而 $-3$ 大概讀成「負三」，後者是把負號看成「形容詞」，而前者是把減號看成「動詞」。

我們也可以用座標來思考。畫一條直線，在其上選好一點 $O$，稱之為原點，另外再選一點 $A$，稱之為基準點，或單位點；這就完成了這條直線上的一個座標系！例如說，如果在線上另有 $B$，$C$，$D$ 諸點，而長度 $OA=AB=BC$，那

麼我們就說：（對於這個座標系來說！）$B$的座標是2，$C$的座標是3，$D$的座標是4，等等，或者更乾脆些：$B$就是2，$C$就是3。

$$B=2，C=3，D=4，A=1，O=0$$

如果畫成橫線，而（習慣上）$A$在$O$的右側，那麼在這一側的點，（座標）都是正的！而在另一側（左側）的點，（座標）都是負的！因此$-3$就代表了一點！

那麼，減號是「動作」：從$D$點，「往左移動3（步）」，就到達$A$點：$4-3=1$。

## 【減法】

人們把減法看成是加法的反運算是非常自然、非常簡單的一件事。計算$4-3$，原意是：要找一個數，使得「它加上3」，會得到4；

用代數的寫法，就是：求$x$，使得：$x+3=4$。

我們所說的「自然數」，就是1，2，3，…，這些正整數，剛開始是為了「點算」，因此並不包含「零」！發明「零」，是為了讓$x+4=4$有解答，同樣地，發明負數$-3$，是為了讓$x+4=1$有解答！

如果以我們剛剛所舉的座標直線為例子，假設某人的「步幅」相當均勻，而他的一步可以取做座標直線上的「單位長度」，即是上述的$OA=AB=BC=CD=1$；那麼，代數上，「求$x$，使得：$x+3=4$」，就可以解釋為：它從某一位置$x$，（往右）走了4步，到達$C=3$的位置，求本來的位置$x$。（當然這就是在$O$的左側，與$O$相距一步處。）

## 【括號】

你只要練習「負負得正」，以及括號！在小學時，老師常常強調：括號有三種，「大括號是紐括號，中括號是框括號，小括號是括弧」；實際上毋寧說這是錯誤的說法！一切記號，都是「規約」，都是「約定俗成的」！是「寫的人」與「看的人」之間的約定！所以：

- 大概「不出這三種」！
- 括號的功用就是強迫你「先做這件事！」，所以順序上是由內到外！絕



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com