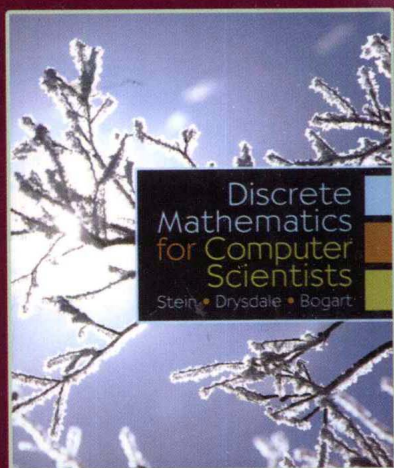


离散数学

Discrete Mathematics for Computer Scientists



英文版

Clifford Stein

[美] Robert L. Drysdale 著

Kenneth Bogart



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

国外计算机科学教材系列

离散数学

(英文版)

Discrete Mathematics for Computer Scientists

Clifford Stein

[美] Robert L. Drysdale 著

Kenneth Bogart

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书从计算机科学的视角,通过讲解各种计算机应用来讨论相关的离散数学基础知识。本书分为计算方法、密码学与数值理论、逻辑与证明、归纳和递归、概率论、图论等几大主题,在文中穿插了大量的计算机应用实例,并在每章给出丰富的练习,可以有效地激发读者的学习兴趣。

本书可作为高等学校计算机相关专业的离散数学课程的双语教材,也可供计算机技术人员学习与参考。

Original edition, entitled DISCRETE MATHEMATICS FOR COMPUTER SCIENTISTS, 9780132122719 by CLIFFORD STEIN, ROBERT L. DRYSDALE and KENNETH BOGART, published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2011 Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

China edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY copyright © 2010.

This edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macau SAR).

本书英文影印版专有出版权由 Pearson Education(培生教育出版集团)授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书在中国大陆地区生产,仅限在中国大陆发行。

本书贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2010-5921

图书在版编目(CIP)数据

离散数学=Discrete Mathematics for Computer Scientists: 英文/(美)斯坦(Stein, C.), (美)德赖斯代尔(Drysdale, R. L.), (美)博加特(Bogart, K.)著. —影印本. —北京:电子工业出版社, 2010.10
(国外计算机科学教材系列)

ISBN 978-7-121-11854-8

I. ①离… II. ①斯…②德…③博… III. ①离散数学—高等学校—教材—英文 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 182614 号

策划编辑:冯小贝

责任编辑:冯小贝

印刷:北京市天竺颖华印刷厂

装订:三河市鑫金马印装有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×980 1/16 印张:32.5 字数:728 千字

印 次:2010 年 10 月第 1 次印刷

定 价:55.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

出版说明

21 世纪初的 5 至 10 年是我国国民经济和社会发展的关键时期,也是信息产业快速发展的关键时期。在我国加入 WTO 后的今天,培养一支适应国际化竞争的一流 IT 人才队伍是我国高等教育的重要任务之一。信息科学和技术方面人才的优劣与多寡,是我国面对国际竞争时成败的关键因素。

当前,正值我国高等教育特别是信息科学领域的教育调整、变革的重大时期,为使我国教育体制与国际化接轨,有条件的高等院校正在为某些信息学科和技术课程使用国外优秀教材和优秀原版教材,以使我国在计算机教学上尽快赶上国际先进水平。

电子工业出版社秉承多年来引进国外优秀图书的经验,翻译出版了“国外计算机科学教材系列”丛书,这套教材覆盖学科范围广、领域宽、层次多,既有本科专业课程教材,也有研究生课程教材,以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求,广大师生可自由选择 and 自由组合使用。这些教材涉及的学科方向包括网络与通信、操作系统、计算机组织与结构、算法与数据结构、数据库与信息处理、编程语言、图形图像与多媒体、软件工程等。同时,我们也适当引进了一些优秀英文原版教材,本着翻译版本和英文原版并重的原则,对重点图书既提供英文原版又提供相应的翻译版本。

在图书选题上,我们大都选择国外著名出版公司出版的高校教材,如 Pearson Education 培生教育出版集团、麦格劳-希尔教育出版集团、麻省理工学院出版社、剑桥大学出版社等。撰写教材的许多作者都是蜚声世界的教授、学者,如道格拉斯·科默(Douglas E. Comer)、威廉·斯托林斯(William Stallings)、哈维·戴特尔(Harvey M. Deitel)、尤利斯·布莱克(Uyless Black)等。

为确保教材的选题质量和翻译质量,我们约请了清华大学、北京大学、北京航空航天大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、哈尔滨工业大学、华中科技大学、西安交通大学、国防科学技术大学、解放军理工大学等著名高校的教授和骨干教师参与了本系列教材的选题、翻译和审校工作。他们中既有讲授同类教材的骨干教师、博士,也有积累了几十年教学经验的老教授和博士生导师。

在该系列教材的选题、翻译和编辑加工过程中,为提高教材质量,我们做了大量细致的工作,包括对所选教材进行全面论证;选择编辑时力求达到专业对口;对排版、印制质量进行严格把关。对于英文教材中出现的错误,我们通过与作者联络和网上下载勘误表等方式,逐一进行了修订。

此外,我们还将与国外著名出版公司合作,提供一些教材的教学支持资料,希望能为授课老师提供帮助。今后,我们将继续加强与各高校教师的密切联系,为广大师生引进更多的国外优秀教材和参考书,为我国计算机科学技术教学体系与国际教学体系的接轨做出努力。

电子工业出版社

教材出版委员会

主 任	杨芙清	北京大学教授 中国科学院院士 北京大学信息与工程学部主任 北京大学软件工程研究所所长
委 员	王 珊	中国人民大学信息学院教授 中国计算机学会副理事长，数据库专业委员会主任
	胡道元	清华大学计算机科学与技术系教授 国际信息处理联合会通信系统中国代表
	钟玉琢	清华大学计算机科学与技术系教授、博士生导师 清华大学深圳研究生院信息学部主任
	谢希仁	中国人民解放军理工大学教授 全军网络技术研究中心主任、博士生导师
	尤晋元	上海交通大学计算机科学与工程系教授 上海分布计算技术中心主任
	施伯乐	上海国际数据库研究中心主任、复旦大学教授 中国计算机学会常务理事、上海市计算机学会理事长
	邹 鹏	国防科学技术大学计算机学院教授、博士生导师 教育部计算机基础课程教学指导委员会副主任委员
	张昆藏	青岛大学信息工程学院教授

前 言

写作动机和版本说明

许多大学都开设了离散数学课程。选修这门课程的学生来自很多专业，最主要的是计算机专业。作为达特茅斯大学课程项目数学学科的一部分，以及来自美国国家自然科学基金(9552462)的支持，我们开设了一门离散数学课程，从而直接满足计算机专业学生的需求。在考虑选择离散数学的哪些分支作为计算机专业学生的学习内容，以及如何选择这些分支的时候，我们有了两个认识。

首先，传统的离散数学课程并没有彻底地覆盖到很多我们认为对计算机科学很重要的知识点。例如，用于求解递推关系的递归树和定理，用于计算平均运行时间和分析随机算法的概率论，还有结构归纳法等。

其次，对于我们认为对计算机科学很重要的离散数学中每一个知识点，都有很多对应的计算机科学中的生动主题，这些主题容易理解，可以安排到计算机科学专业的前一、两门课程中。我们认为这样安排有助于回答很多学生在学习应用数学课程时都会反复问到的老问题：“为什么我们要学习这些？”因此我们选择编写这样一本针对计算机专业的教材，目的就是以计算机科学中的问题为驱动，提供必备的数学方法。这样学生就可以较早地理解这些问题。

在许多大学的计算机学院中，离散数学都是学生学习的第一门专业课。甚至它已成为学习第一门计算机课程的先决条件。在这种情况下，教师们处于两难境地——要么只是纯数学性地讲述概念，很少涉及到可见的计算机科学方面的应用；要么就是讲解一些计算机科学的例子以给学生带来一些相关认识。前者会招致很多学生的抱怨，在学习第一门计算机课程之前，他们不得不学习太多“无关”的数学知识。后者使教授们(他们经常也是数学家)不得不努力地解释很多高级的计算机科学概念，比如哈希算法、二叉树和递归问题，但学生此时甚至还没有编写过一个程序。即便在最理想的情况下，这样的教学方法都显著地降低了可以教给学生的数学知识的深度。在分析之后我们得出一个不同的教学方法，那就是设立一门时间安排稍稍靠后的离散数学课程。我们并不假设学生已经学习了微积分，但是假设学生已经掌握并熟练使用总和记号、对数和指数函数等。如果学生已经掌握了学习微积分之前的必修课程，那么会更有帮助。这门课程打算安排在学生学习了计算机科学导论课程之后，那时学生已经学习了递归程序。理想情况下，这门课程可以安排在

数据结构课程之后或者与之同时进行，我们只是把数据结构的知识作为示例来讲解。因此，数据结构课程并不是离散数学的先导课程。

我们认为这样的安排有几个好处：

- 学生已经有了一些问题求解、算法和编写代码的经验。
- 学生已经学习了或准备学习几个重要的计算机科学的概念，例如哈希算法、递归、排序、搜索和基本的数据结构。
- 学生已经熟悉了足够多的计算机科学知识，他们已经了解了很多实用的例子，例如：
 - 哈希算法可以激发对于概率论的学习兴趣。
 - 对于递归程序的分析，例如归并排序和快速排序，可以有助于学习递归关系及其求解。
 - 分析如何在最短的时间内找到一系列元素中的最小元素，有助于研究期望和调和数之间的线性关系。
 - 二叉树可以用于结构归纳法的教学，也可以作为图论的例子来学习。

依照我们的教学经验，离散数学可以作为算法课程的先修课程，学生经常会在学完离散数学之后就选修算法课程。这样，他们就可以马上应用刚刚学过的数学知识。

我们的教育理念

这本教材是由以课后习题形式出现的实践项目来驱动的，并且本书对这些习题进行了充分的解释和扩展。学生学习本书的最有效方法，应该是在阅读这些习题的解释之前认真地实践。这些实践主要是课堂上的分组练习，因此如果是课外去做这些习题，建议仍然是分组来做。设计这门课程和这本教材的目的，是为了帮助学生开发自己的数学思维。通过研究本科生是如何学习数学的，我们有了以下几个结论：

- 那些主动思考(经常称为“主动学习”或“积极学习”)正在学习的内容的学生，比起那些非主动学习的学生，能够更有效地记住所学的概念。而且在脱离学习环境之后，主动学习的学生更能掌握和应用这些知识。
- 相比于一位老师执教整个班级，在一个仅由同学所组成的小组里，学生更容易相互提问交流，直到他们掌握了所讨论的主题。(尽管如此，情况并不总是这样。在小组中提问之前，许多学生需要轻松的感觉，否则他们对发言的畏惧还可能会减慢其他人的讨论节奏。我们试图让学生感觉更舒适，方法就是允许学生自由选择自己参加的小组，而且在他们的拍档准许或者需要时，还可以换到另外一个组。)
- 最后，向别人阐述自己的想法，有助于学生先在头脑中组织自己的想法，也使得学生对于数学语言更加熟悉。

这本书配有丰富的资料，可以作为一周 4 学时的一学期课程。在达特茅斯大学，我们把这本书用于一门节奏更快的课程，即一周上三天，九周左右就完成了大部分的教学(除了最后几节和标注为星号的一些内容)。

证明的作用

撰写本书的一个目的是为了给学生介绍一些推理的背景知识，在他们的计算机课程上可能要用到。我们认为，学生应该通过讨论和尝试推理来学习推理。为了讨论推理，需要有一门共同的语言，把推理的组成部分归类，并且提供一个讨论的框架。有鉴于此，我们在逻辑部分加入了一章，既给学生提供了这门语言，又在他们遇到推理难点时给予帮助。为了在这一章讨论一些更有意义的知识点，在学生学习了组合和数论的推理证明之后，我们介绍了这些知识点。这样学生就有一些具体的推理例子，可以用来阐明逻辑抽象。我们已经意识到，这不是一般离散数学教材里的教学顺序，但是思考这些具体的推理例子，可以更有效地掌握推理规则。

我们把逻辑的章节放在数学归纳法之前，这样就可以用逻辑语言来讨论和分析数学归纳法。

数学归纳法

计算机科学中的归纳推理经常使用“子问题”这个概念，但这些子问题并不是“更小的问题”。因此我们同样重视强归纳与弱归纳。本书还把结构归纳法用于树和图。我们试图利用学生学习递归的经验来帮助理解归纳法并深入学习归纳推理。特别是在建立一个归纳推理时，通常更适合的做法是从一个大问题开始逐步递归地把它分解成一些小问题，而不是从小问题开始去试图“构建”更大的问题。

伪代码的使用

我们描述算法时，既有文字叙述，也使用了伪代码。这些伪代码，对于学习过 Java、C 或者 C++ 的读者来说是易读的，对于那些有其他语言编程经验的读者来说也可以理解。我们并不要求代码满足所有语言的语法规则，但努力做到使代码清晰明确。例如，当表述“交换变量 x 和 y 的值”时，书中写为“交换 x 和 y ”，而不是编写三行代码。类似地，可能会写成“如果点 i 、 j 和 k 不共线”，而并不关心更细节化的计算过程。下面是本书的一些特殊约定：

- 代码块以缩排方式表示。没有 `begin`、`end` 标志或者许多语言中都用到的“{”和“}”。
- `for` 循环写为“`for  $i = 1$  to  $n$` ”，表示变量 i 的范围是从 1 到 n 。
- 当 `while` 后面的布尔表达式为真时，`while` 循环体会重复执行。

- repeat 循环具有这样的形式：“repeat...until”。位于 repeat 和 until 之间的代码至少会执行一次，而且会重复执行，直到 until 后面的布尔表达式为真。
- if 语句有下面两种形式：
 - if(表达式) 代码块
 - if(表达式) 代码块 1 else 代码块 2
 对于第一种形式，当且仅当表达式的值为真时，代码块执行；对于第二种形式，当表达式的值为真时，代码块 1 执行；当表达式的值为假时，代码块 2 执行。
- 数组用 “[]” 标注。
- 赋值用 “=” 表示，而比较相等用 “==” 表示。
- x 递增和递减的简写分别用 “ $x++$ ” 和 “ $x--$ ” 来表示。
- 逻辑算子“否定”用 “!” 来表示，也就是说 “!true” 就是 “false”，当 x 不比 y 小时， $!(x < y)$ 的值是真。逻辑“与”用 “&&” 表示，逻辑“或”用 “||” 表示。

修订版本的变化

这一版与最初版本相比，最明显的改变是

- 最初版本讨论了等价关系，但只是作为集合论的一部分。将自反、对称和传递性质安排到了附录里，没有讨论偏序和全序。这一版介绍了关系的概念，与之相关还介绍了函数、等价关系、偏序和全序。同时还讲解了自反、对称和传递的关系是等价关系，自反、反对称和传递的关系是偏序。
- 这一版包括了结构归纳法。而且扩充了递归和归纳之间的关系的章节，使用了一些不同的例子。
- 去掉了递归关系这章的某些小节，或者将其移到附录中。这些小节介绍了估计递归的上下限，扩展了数字关系的定义域，但除了一个底数的幂的形式，主定理仍然是必不可少的。我们认为它们妨碍了本章的流畅性，而且关注于吹毛求疵的细节，对于大多数学生来说，并不需要了解这些。
- 条件概率一节中增加了贝叶斯定理。
- 增加了新的问题，以覆盖到新的主题。

此外，还有一些小细节的修改(比如，介绍了使用“乘 x 并减去”的方法来得到几何级数的闭型)。

教师可用的教辅资源

下面的教辅资源仅提供给授课的教师使用。请访问 Pearson 的教师资源中心 (www.pearsonhighered.com/irc)，联系当地的 Addison-Wesley/Pearson 销售代表，或者发邮件到

computing@aw.com 以获取如何得到这些资源的方式^①。

- 带有习题解答的教师手册
 - 教学建议
 - 课外习题的解答
 - 课堂使用的练习讲义
 - 详细的课堂讨论资料，鼓励学生在课堂上分组练习
- PPT 文档

致谢

许多人参与了本书最初版本的编写工作。我们感谢奥克兰大学的 Eddie Cheng、斯基德莫尔大学的 Alice Dean、史密斯学院的 Ruth Hass 和波多黎各大学的 Italo Dejter，他们审阅了本书草稿的一个早期版本，提出了经过深思熟虑的建议。随着本书的继续编写，作者和 Neal Young、Prasad Jayanti、Tom Shemanske、Rosa Orellana、April Rasala、Amit Chakrabarti 及 Carl Pomerance 在达特茅斯大学讲授离散数学时使用了本书早期的一些版本。他们每个人都为本书的出版提出了宝贵的建议，在此表示感谢。我们特别感谢 Carl Pomerance，他在教学的过程中提出了很多富有见地的评注。当我们准备撰写这本书的时候，Qun Li 是一名研究生助教，他的工作是确认我们提出的问题确实有解。Li 的工作就是给教师提供习题解答的核心内容。在我们使用本书草稿进行教学的时候，来自达特茅斯大学计算机科学与数学学院的研究生助教们给予了很多帮助，使我们可以了解到学生正在学习什么和没有学习什么，并且帮助确认了大部分习题的答案。以担任助教工作的先后为序，他们是 S. Agrawal、Elishiva Werner-Reiss、Robert Savell、Virgiliu Pavlu、Libo Song、Geeta Chaudhry、King Tan、Yurong Xu、Gabriella Dumitrascu、Florin Constantin、Alin Popescu 和 Wei Zhang。多年来我们的学生给予了很多反馈，尤其是 Eric Robinson 仔细阅读了本书的终稿，并细致分析难懂的段落。

我们还要感谢那些对本书出版有极大帮助的人们。下面这些评阅专家提出了很多中肯的建议：肯特州立大学的 Michael Rothstein、明尼苏达大学双城分校的 Ravi Janardan、卡内基-梅隆大学的 Klaus Sutner、纽约州立大学 Genesco 分校的 Doug Baldwin、华盛顿大学的 Stuart Reges 和 Richard Anderson、宾州州立大学的 Jonathan Goldstine。Pearson 的销售代表 Sandra Hakanson 最早提出 Pearson 的 Addison-Wesley 可能对这本书感兴趣。Sandra 帮助我们与 Michael Hirsch 主编取得了联系，他同意出版这本书并启动了出版进程，本书的许多改进也来自于他的建议。Addison-Wesley 的其他一些人士也对本书的出版做出了贡献，包括 Stephanie Sellinger (助理编辑)、Jeff Holcomb (执行编辑)、Heather McNally (策划编辑) 和 Elena Sidorova (封面设计)。Laserwords 公司的 Bruce Hobart 负责本书的编辑和校对等工作。

^① 请参见书后的“教学支持说明”。

三位作者之一的每一位都要感谢其他两位，感谢他们为本项目所付出的时间，这些时间原本会用于其他的学术活动。由于需要大量的时间和精力把我们的专业观点有机地结合起来，这本书获得了美国国家自然科学基金(9552462)的资助，这样我们才能承担这个项目。我们相信本科生教务部门的工作人员表现出了很强的洞察力，在制订贯穿全部课程的数学科学及其应用的计划时，他们仔细了解了本科生的需要，还有不同学科课程之间协作发展的困难之处。我们感谢这个计划对于本科教育及学科发展中不同学科协作的正面影响。

Clifford Stein

Scot Drysdale

Brief Contents

List of Theorems, Lemmas, and Corollaries	xix
Preface	xxi
CHAPTER 1 Counting	1
CHAPTER 2 Cryptography and Number Theory	59
CHAPTER 3 Reflections on Logic and Proof	117
CHAPTER 4 Induction, Recursion, and Recurrences	161
CHAPTER 5 Probability	249
CHAPTER 6 Graphs	359
APPENDIX A Derivation of the More General Master Theorem	449
APPENDIX B Answers and Hints to Selected Problems	461
Bibliography	477
Index	479

Contents

List of Theorems, Lemmas, and Corollaries	xix
Preface	xxi
CHAPTER 1 Counting	1
1.1 Basic Counting	1
The Sum Principle	1
Abstraction	3
Summing Consecutive Integers	3
The Product Principle	4
Two-Element Subsets	6
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	7
<i>Problems</i>	8
1.2 Counting Lists, Permutations, and Subsets	10
Using the Sum and Product Principles	10
Lists and Functions	12
The Bijection Principle	14
k -Element Permutations of a Set	15
Counting Subsets of a Set	16
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	18
<i>Problems</i>	20
1.3 Binomial Coefficients	22
Pascal's Triangle	22
A Proof Using the Sum Principle	24
The Binomial Theorem	26
Labeling and Trinomial Coefficients	28
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	29
<i>Problems</i>	30

1.4	Relations	32
	What Is a Relation?	32
	Functions as Relations	33
	Properties of Relations	33
	Equivalence Relations	36
	Partial and Total Orders	39
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	41
	<i>Problems</i>	42
1.5	Using Equivalence Relations in Counting	43
	The Symmetry Principle	43
	Equivalence Relations	45
	The Quotient Principle	46
	Equivalence Class Counting	46
	Multisets	48
	The Bookcase Arrangement Problem	50
	The Number of k -Element Multisets of an n -Element Set	51
	Using the Quotient Principle to Explain a Quotient	52
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	53
	<i>Problems</i>	54
CHAPTER 2	Cryptography and Number Theory	59
2.1	Cryptography and Modular Arithmetic	59
	Introduction to Cryptography	59
	Private-Key Cryptography	60
	Public-Key Cryptosystems	63
	Arithmetic Modulo n	65
	Cryptography Using Addition mod n	68
	Cryptography Using Multiplication mod n	69
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	71
	<i>Problems</i>	72

2.2	Inverses and Greatest Common Divisors	75
	Solutions to Equations and Inverses mod n	75
	Inverses mod n	76
	Converting Modular Equations to Normal Equations	79
	Greatest Common Divisors	80
	Euclid's Division Theorem	81
	Euclid's GCD Algorithm	84
	Extended GCD Algorithm	85
	Computing Inverses	88
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	89
	<i>Problems</i>	90
2.3	The RSA Cryptosystem	93
	Exponentiation mod n	93
	The Rules of Exponents	93
	Fermat's Little Theorem	96
	The RSA Cryptosystem	97
	The Chinese Remainder Theorem	101
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	102
	<i>Problems</i>	104
2.4	Details of the RSA Cryptosystem	106
	Practical Aspects of Exponentiation mod n	106
	How Long Does It Take to Use the RSA Algorithm?	109
	How Hard Is Factoring?	110
	Finding Large Primes	110
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	113
	<i>Problems</i>	114
CHAPTER 3	Reflections on Logic and Proof	117
3.1	Equivalence and Implication	117
	Equivalence of Statements	117
	Truth Tables	120
	DeMorgan's Laws	123

	Implication	125
	If and Only If	126
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	129
	<i>Problems</i>	131
3.2	Variables and Quantifiers	133
	Variables and Universes	133
	Quantifiers	134
	Standard Notation for Quantification	136
	Statements about Variables	138
	Rewriting Statements to Encompass Larger Universes	138
	Proving Quantified Statements True or False	139
	Negation of Quantified Statements	140
	Implicit Quantification	143
	Proof of Quantified Statements	144
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	145
	<i>Problems</i>	147
3.3	Inference	149
	Direct Inference (Modus Ponens) and Proofs	149
	Rules of Inference for Direct Proofs	151
	Contrapositive Rule of Inference	153
	Proof by Contradiction	155
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	158
	<i>Problems</i>	159
CHAPTER 4	Induction, Recursion, and Recurrences	161
4.1	Mathematical Induction	161
	Smallest Counterexamples	161
	The Principle of Mathematical Induction	165
	Strong Induction	169
	Induction in General	171
	A Recursive View of Induction	173

	Structural Induction	176
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	178
	<i>Problems</i>	180
4.2	Recursion, Recurrences, and Induction	183
	Recursion	183
	Examples of First-Order Linear Recurrences	185
	Iterating a Recurrence	187
	Geometric Series	188
	First-Order Linear Recurrences	191
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	195
	<i>Problems</i>	197
4.3	Growth Rates of Solutions to Recurrences	198
	Divide and Conquer Algorithms	198
	Recursion Trees	201
	Three Different Behaviors	209
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	210
	<i>Problems</i>	212
4.4	The Master Theorem	214
	Master Theorem	214
	Solving More General Kinds of Recurrences	217
	Extending the Master Theorem	218
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	220
	<i>Problems</i>	221
4.5	More General Kinds of Recurrences	222
	Recurrence Inequalities	222
	The Master Theorem for Inequalities	223
	A Wrinkle with Induction	225
	Further Wrinkles in Induction Proofs	227
	Dealing with Functions Other Than n^c	230
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	232
	<i>Problems</i>	233