解码三大数学常数

φ π

e

e的密码

2.718,

一个天设地造的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

从17世纪“诞生”以来，像一位正值当打之年的科学泰斗，统御着科学的方方面面。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

迫使人们永无止境地探索。

陈仁政 / 著

科学出版社

内 容 简 介

本书以生动活泼的形式，通俗地介绍了对数的发明、这一发明的重大意义、如何用它来解决实际问题，以及常用对数的诞生和应用；翔实地揭示了自然对数的诸多之谜—它的底 e 为什么与圆周率 π 一样在整个科学中大放异彩？为什么数学家要用 e 作为自然对数的底？以 e 为底的对数为什么叫自然对数？e 究竟是一个什么样的数？……

本书不但把 e 融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究 e 的重要参考书。

您想看凡尔纳小说中的“冒牌大力士”吗？您想独自在拔河比赛中让一群人俯首称臣吗？那就“跟我走吧”，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达 e 的“老家”！

图书在版编目(CIP)数据

e 的密码／陈仁政著．—北京：科学出版社，2011

（解码三大数学常数）

ISBN 978-7-03-030885-6

Ⅰ．e…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．数学－常数－普及读物

Ⅳ．01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 073468 号

责任编辑：李　敏　赵　鹏／责任校对：鲁　素

责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第　一　版　开本：B5（720×1000）

2011 年 5 月第一次印刷　印张：17 1/4

印数：1—6 000　　字数：333 000

定价：38.00 元

丛书序

在美国加州谷歌公司总部的四座办公大楼中，有三座以数学符号命名："Pi"（圆周率 π）、"e"（自然对数的底）和"phi"（黄金分割数 ϕ）。可见这"三大数学常数"在这个大公司中的至尊地位。无独有偶，以色列数学史家伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中，也称它们为"三个最著名的无理数"。

然而，国内除了出版为数不多的关于 π，e 的小册子和个别关于 ϕ 小册子之外，至今还没有以较大篇幅介绍这"数学三圣"的系统丛书。从国外译介到国内的作品也是如此。"苔花如米小，也学牡丹开。"《解码三大数学常数》丛书（以下简称"丛书"）的作者经过断续 29 年的努力，抛出了这套丛书之"砖"，以期引出各界的"玉"。

本丛书除了"数学三圣"和涉及的数学内容之外，还把包括物理、化学、天文、地理、生物、医学、文学、美术、音乐、环保等众多领域的内容有机地结合在数学之中。这不但显示出数学的广泛威力，而且展现出各学科之间的水乳交融；在这个意义上说，"数学三圣"是承载整个科学的"诺亚方舟"。"数学，无处不在。"德国 2008 年科普活动以数学为主题的这个口号，为这种威力和交融画龙点睛。而德国联邦教研部长莎万在这个活动的开幕式上说，应该让公众，特别是让青少年认识数学的丰富多彩和重要意义——数学是所有自然科学的共同语言。

本丛书由浅入深、化难为易，力图把"可怕"变为"可爱"，以消除"数学是可怕的专业"的误解。

本丛书将人文精神融入"好玩的数学"以至整个科学之中。这样，不但精彩纷呈的内容和妙趣横生的情节引人入胜，让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用，而且对提升人的综合素质——特别是锤炼健康心理大有裨益。

本丛书有一千多位各领域的科学家、文学家、艺术家和政治家等“大驾光临”，他们书写的人类可歌可泣的科学史和文化史，为我们留下了形形色色的宝贵财富。现在，先贤们的身影已经越来越模糊，但也越来越清晰——我们正在享受着这些财富带来的无穷福祉。当然，我们在“理所当然”和“习以为常”地享受这些福祉的同时，千万不能忘记这些财富本身的价值和意义：科学精神、科学思想、科学方法……

“天才和我们仅仅相距一步。同时代者往往不理解这一步就是千里，后人又盲目相信这千里就是一步。”对于这些“创造历史”的天才，日本“鬼才”小说家芥川龙之介在随想集《侏儒的话》中说，“同时代为此而扼杀了天才，后代又为此而在天才面前焚香。”我们相信，读者看了这套丛书之后，对这段关于天才与“我们”的精辟名言，能有更深刻的体会，从而“在你的心上，自由地飞翔”，幸福地走过人生的“水千条山万座”而有所作为。正是：“今夜，我在看星光灿烂。明晨，我要画朝霞满天。”

陈仁政

2011 年 4 月 30 日

目　　录

第1章　激情相约爱丁堡
——对数使科学家延寿

在能够对科学作出贡献的所有因素中，观念的冲破是最伟大的。

——英国物理学家约瑟夫·约翰·汤姆森

“混沌初分盘古先，太极两仪四象悬……”

可能，人类茹毛饮血的年代就有了数学，那我们就从数学运算谈起。

1.1　从第一级到第三级——数学运算“步步高”

山洞口坐着一个失明的老人，他的眼睛是被俄底修斯刺瞎的。

这个不幸的老人，就是独眼巨人波吕斐摩斯。他每天只有一件事：照料他的羊群。

早晨，母羊外出吃草，每出去一只，他就从石子堆中捡起一颗石子。

傍晚，母羊归来，他就扔下一颗石子。当他把早晨捡起的石子全部扔光的时候，他就知道全部母羊已经返洞归家。显然，他用的是“一一对应”的计数方法。

这是约公元前八九世纪古希腊著名盲诗人荷马，写在《荷马史诗》中的故事。俄底修斯和波吕斐摩斯都是希腊神话中的人物。

但是，用一一对应计数法，既不能解决有多少只羊的问题，也不能解决一群羊增加或减少几只之后，有多少只羊的问题。于是自然数计数的方法应运而生——它解决了前一个问题。数的加法和减法也发明出来了——它解决了后一个问题。

当然，我们知道，加法和减法不但有数的加法和减法，而且包括集合的加法和减法。

人类最古老的文字中就有用符号表示的第一级运算——加法和减法。例如，古埃及艾哈麦斯纸草书中就有了加法和减法的符号。艾哈麦斯是大约公元前 20 世纪或公元前 17 ~ 前 16 世纪的埃及祭司和数学家，他的加号“ʌ”是向右走的两只腿，他的减号“ʌ”是向左走的两只腿。后来，经过各国许多数学家的努力，才有今天的加号“＋”和减号“－”。

今天的加号“＋”和减号“－”，最早是 15 世纪的最后 20 年由德国人首先使用的。在德国德累斯顿城图书馆，保存着 1486 年的手稿卷 C · 80，其中就有这两个符号。而最早（1489 年）在印刷的书（在莱比锡出版）中使用它们的，则是出生在捷克的德国数学家维德曼。

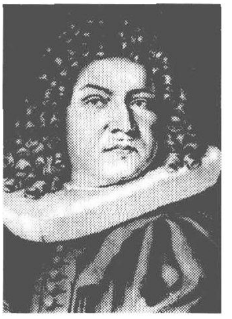
1690 年，大名鼎鼎的德国数学家莱布尼茨还发明了一个“概念加号”——“⊕”。它和“概念减号”——“⊖”或“－”表示逻辑概念演算和逆运算。在内涵方面，$A \oplus B$ 表示既 A 且 B 的那个性质；在外延方面，$A \oplus B$ 表示属于 A 或属于 B 的那个类。

但是，在遇到“连加”或“连减”的时候，加法或减法的效率就低了。于是第二级运算——乘法和除法，以及乘号和除号又应运而生了。

在西方，“×”被称为和数学毫无关系的“圣安德鲁斜十字”。安德鲁是耶稣的 12 门徒之一，由于他被钉在斜十字架上处死，所以斜十字被称为圣安德鲁斜十字。1631 年，英国数学家奥特雷德，首先在他的《数学之钥》一书中使用了现代意义上的“×”。

用小圆点“·”表示乘号是为了避免乘号“×”和字母“X”混淆，它的发明者是莱布尼茨。他在 1698 年 7 月 29 日给瑞士数学家雅格

布·伯努利（1654—1705）即詹姆斯·伯努利，或他的弟弟约翰·伯努利（1667—1748）的一封信中，首先使用“·”表示乘号。



雅格布·伯努利

不过，有时“·”和“×”的含义是不同的，例如，在向量代数中，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的“数量积”，即“点积”，也就是“内积”；而$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的“矢量积”，即“叉积”，也就是“外积”。

现在，在中国用“×”或“·”都符合规定，通常在字母前或括号前可以略去。而欧洲大陆派（如德国、法国、俄罗斯）规定用“·”表示乘号，其他国家则用“×”表示乘号。

今天用的除号“÷”，被称为“雷恩记号”。它是瑞士数学家雷恩在 1659 年出版的一本代数书中，首先引用的。随着 1668 年这本书被译为英文，这个记号逐渐通用。

莱布尼茨是另一种除号——“:”的发明者。他是在 1666 年的论文《组合的艺术》中，用“:”作除号的，至今仍在使用。莱布尼茨不但是微积分的发明者之一，也是一位数学符号大师——我们知道，他发明的几乎所有的微积分符号，我们至今还在使用。

莱布尼茨

第二级运算已经进步了，但是人们发现在“连乘”或“连除”的时候，还需要第三级运算。这就是乘方、开方和对数。

我们知道，乘方有开方和对数两种逆运算，而加法和乘法分别只有减法和除法各一种逆运算，这是第三级运算和第一、二级运算的不同之处。

现在用的乘方中指数符号的滥觞，是苏格兰数学家詹姆斯·休姆。他于 1636 年居住在巴黎的时候，用小的罗马数字放在字母的右上角表示指数。1637 年，法国数学家笛卡儿完成了现代乘方中

的指数符号——在字母或数字的右上角用小的阿拉伯数字表示指数。

但是，笛卡儿的指数只是正整数，而法国数学家、物理学家和经济学家奥雷斯姆，荷兰数学家西蒙·斯蒂文、英国数学家沃利斯等，则先后使用或提到过分数指数和负数指数。法国数学家丘凯则最早使用了负数指数和零指数，符号与现代的比较接近。而现行的分数指数符号和负数指数符号，则出自大名鼎鼎的牛顿之手。1676 年 6 月 13 日，他给英国皇家学会秘书奥尔登伯格转给莱布尼茨的信中，创设了这种指数。

虚数指数的发明者，是一位最先使用虚数的意大利业余数学家法格纳诺。他在 1719 年将 π 定义为 $2i\ln\frac{1-i}{1+i}$的时候，就用了虚数指数。

1679 年，莱布尼茨在一封写给荷兰数学家、物理学家惠更斯的信里，在一个方程中引入了变指数。

在历经无数次变革之后，现代方根符号“$\sqrt{\ }$”由法国数学家卢贝尔在 1732 年首先使用 $\sqrt[3]{25}$之后，才逐渐流行，并用于各次方根。

随着乘方运算的出现，指数函数也出现了。数学家们用“exp”或“Exp”表示指数函数。例如，有时用“exp$x$”表示“e^x”这个指数函数。

可以想象，乘方的一种逆运算——开方的诞生，是“顺理成章”的。可是，乘方的另一种逆运算——对数的出生，就有些“难产”了。

1.2 “在离天很近的地方”——斯蒂费尔的遗憾

“1533 年 10 月 3 日是世界末日!”16 世纪初，一个人这样预言。

听了他的宣传，他的追随者毁掉或消耗掉所有的财物，惶惶不安地等待着这一天的来临。但是，“世界末日”并没有如期而至。由于这一蛊惑人心的言论和传播被视为异端邪说的新教，他被当局投入监狱。

这个趣闻轶事的主角——“他”，就是德国数学家斯蒂费尔。

斯蒂费尔是德国厄斯林根地区的新教牧师，后来又在著名的哥尼斯

堡大学里担任神学和数学的讲师。


斯蒂费尔

作为数学讲师，斯蒂费尔当然懂得一一对应的方法，于是在 1544 年，他就写了一本名叫《整数的算术》的书。在这本书中，他就几乎用这种方法建造了一座数学丰碑。

斯蒂费尔在书中欣喜地写道：“关于整数的这些奇妙性质，可以写成整本整本的书……”那么，斯蒂费尔发现了整数的什么“奇妙性质”，使他这样惊喜万分呢？我们还是先来看看他在书中的表 1-1 里的两个数列吧。

表 1-1

…	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	…
…	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

容易看出，表 1-1 的上一列，是一个通项公式为 2^n（n 为整数）的等比数列——他称为“原数”。下一列是一个整数构成的等差数列——他称为与原数对应的“代表人物”。这里说的代表人物，德文是 Exponent 或 exponent，也可翻译成“代表者”，而我们把它叫做“代言人”。

斯蒂费尔发现，如果要计算 16×128 的话，可以用下面的一种巧妙方法。

先找到 16 的代言人 4，再找到 128 的代言人 7，然后把 4 和 7 相加，就得到了 16×128 的新代言人 11，最后找到 11 对应的新数 2 048。这个 2 048，就是 16×128 的答案。

如果把斯蒂费尔的方法用今天的数学语言来表示，就是这样一个对应关系：

$$
\begin{array}{ccccc}
m & \times & n & = & mn \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\log_2 m & + & \log_2 n & = & \log_2(m+n)
\end{array}
$$

真是美妙极了，计算乘法变成了计算比乘法更简单的加法！对此，

当然我们很容易理解，因为 $x^a \times x^b = x^{a+b}$。所以，表 1-1 实际上是底数为 2 的、最原始的对数表。

美妙的感觉还没有完——用它们还可以做除法哩！

举例来说吧，算 2 048 ÷ 128 的时候，只要用它们各自的代言人 11 和 7 相减，就得到新代言人 4，再由 4 找到对应的新原数 16 就是答案。当然，我们知道，这是因为 $x^a / x^b = x^{a-b}$。

一句话说完，利用这两个数列，就可以把较复杂的乘除法变成加减法。大致同时，法国数学家舒开也意识到这一点。

对于我们来说，斯蒂费尔的这个结论已经没有什么神奇之处，因为一眼就能看出，斯蒂费尔的代言人，就是原数以 2 为底的对数。例如，$\log_2 64 = 6$ 等。

我们还可以看出，斯蒂费尔实际上已经掌握了对数运算法则 $\log_2(MN) = \log_2 M + \log_2 N$ 和 $\log_2(M/N) = \log_2 M - \log_2 N$。

遗憾的是，在斯蒂费尔的时代，还没有分数指数的概念；那么，不是数列中的数要进行运算（如 17 × 127 和 2 049 ÷ 257）又怎么办呢——它们没有“代言人”呀！

这些问题，把斯蒂费尔弄得焦头烂额，不知“云横秦岭家何在”。他只好说：“这个问题太狭窄了，所以不值得研究。”从此就“雪拥蓝关马不前”——把它搁到一边。

当然，斯蒂费尔也不是全然无功，他用的代言人这个词，后来被数学界正式采用，就是现在我们说的“指数（函数）”Exp 或 exp。而且，他还把这种对应关系推广到负指数、分指数的情形。

阿基米德

“在离天很近的地方，总有一双眼睛在守望”，这是歌曲《神奇的九寨》中的一句。可惜的是，斯蒂费尔在离天那么近的地方，却没能望见那神奇的“天堂”，已经走到发明天堂边缘上的脚又缩了回去，而把机会留给比他更

具慧眼的来者——约翰·纳皮尔。

不过，斯蒂费尔也不必懊悔。因为在他之前近两千年，比他更光辉夺目的巨星、古希腊数学家阿基米德，虽然也注意到类似关系的表 1-2 中的两个数列。可是，他也不知道，在高远的云端，还有对数那如花似玉般的容颜！

表 1-2

1	10	10^2	10^3	10^4	…
0	1	2	3	4	…

不过，阿基米德，特别是斯蒂费尔的前驱性工作，成了我们下面要说的纳皮尔发明对数的“巨人肩膀”。

1.3　教授与贵族——激情相约爱丁堡

1.3.1　“巨人肩上”的对数

弹指一挥间，半个世纪过去了。阿基米德、斯蒂费尔的前驱性工作，在大约 1594 年开始绽花结果。经过多年的潜心研究，苏格兰数学家、物理学家和天文学家约翰·纳皮尔站在这些的巨人的“肩膀”上，发明了对数，也成了“巨人”。

在大约 20 年以后的 1614 年 6 月，居住在豪华庄园梅尔契斯顿堡的贵族约翰·纳皮尔，在苏格兰首府爱丁堡出版了大作《奇妙的对数定律说明书》。

这本 200 余页的书，公布了纳皮尔发明的对数的一些详情，和他编制的间隔为 1′的 7 位（一说 8 位）正弦对数表——世界上第一个三角函数的对数表，以及对数的性质、对数表的说明、使用规则和实例。