■ 高等学校理工科数学类规划教材配套用书

工科数学分析同步辅导

大连理工大学数学科学学院 组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材配套用书

工科数学分析同步辅

大连理工大学数学科学学院 组编

主编 金正国

编者 金正国 金光日 蒋志刚 张海文

庞丽萍 张学胜 李 林

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析同步辅导/大连理工大学数学科学学院组编. —大连:大连理工大学出版社,2010.12
ISBN 978-7-5611-5948-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①大… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 234943 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:11.375 字数:384 千字
2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:骁 杰
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-5948-4 定 价:25.00 元

前　言

工科数学分析是理工科大学生的主要基础课。通过本课程的学习,可掌握一元函数微积分、多元函数微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数和常微分方程等相关知识的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能,为学习后继专业课程奠定坚实的基础。

大连理工大学数学科学学院在多年教学改革的基础上,组织编写了理工科数学类规划教材《工科数学分析》。它不仅吸取了传统教材和教学改革长处,而且改变了传统的以“定义、定理、证明、例题”顺序进行的课堂教学模式,代之以提出实际问题,分析讨论,引入新的教学方法,最后解决问题的模式。为了帮助学生更好地学习工科数学分析,我们编写了这本《工科数学分析同步辅导》,旨在帮助、指导学生理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法,提高应试能力和数学思维水平。

本书以《工科数学分析 》(第二版)(大连理工大学数学科学学院主编)的章节为序,按节编写,与教学保持同步,每节内容一般分四部分编写:

内容提要　对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理,提出深入理解基本概念和定理需要注意的问题,解答读者学习中可能出现的疑难问题,特别指出各类考试中经常考查的重要知识点。

释疑解惑　针对初学者还不能完全适应大学的学习方式,对一些概念的理解不够准确等共性问题,进行释疑解惑,分析点拨。希望读者由此受到数学抽象性、逻辑性和严谨性的熏陶。

例题解析　对本节涉及的习题按内容划分为几个基本题型,对每个基本题型选择适量的不同难度、不同风格的例题。有些例题选自近几年考研试题。通过例题解析,探索解题要点、技巧、关键和易

错之处。

习题选解 选择教材中的部分习题(约占全部习题的一半)给予解答。对选择的题目既注意题型齐全,又保证有一定难度,解题过程保留了解题依据和关键步骤。

本书的编写力求突出以下特点:

(1)对基本知识力求系统化,便于读者整体地理解和掌握,形成清晰、稳固的认知结构,这是提高解题能力和数学思维水平的基础。

(2)精选典型例题,重在分析思路和提炼方法,并在灵活性、严密性、准确性、简洁性等方面作出表率,真正提高读者的应变能力、思维能力、分析问题和解决问题的能力。

(3)顺应课程体系改革的新要求和素质教育的新形势,力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思维方法,通过例题讲解、习题解答,在提高读者的解题能力、应试能力的同时,提高其综合数学素养。

本书不仅是学生同步学习的优秀辅导书,也是广大教师的得力数学参考书。

本书由大连理工大学数学科学学院组织编写。金正国任主编并负责统稿,参加本书编写工作的人员有:李林、张学胜、张海文、金正国、金光日、庞丽萍、蒋志刚。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此,向这些书籍的编著者表示感谢。由于编著者水平有限,书中不足之处在所难免,诚恳希望读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编著者

于大连理工大学

2010 年 12 月

目　录

第1章　函数、极限与连续

本章的重点是极限，主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1　函　数

内容提要

1. 集合

具有某种特定性质的事物的总体称为集合，组成这个集合的事物称为集合的元素.

集合的运算有并、交、差：

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

$$A\backslash B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

全集：研究事物过程中涉及的事物的全体称为全集，记为 I.

余集或补集：$I\backslash A$ 称为 A 的补集.

2. 区间和邻域

开区间：　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$

闭区间：　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

左开右闭的区间：　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

左闭右开的区间：　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

邻域：设 x_0 是给定的实数，δ 是任一正数，则称数集

$$\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x||x-x_0|<\delta\}$$

为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，它是以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 去掉中心点 x_0 的邻域称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

3. 函数及其性质

设有非空数集 X 和实数集 $\mathbf{R}$，f 是一个确定的法则(或关系)，对于每个 $x\in X$，都有唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之相对应，并且将与 x 对应的 y 记作 $y=f(x)$，则称 f 是定义在 X 上的一元函数，简称为函数，称 x 为自变量，y 为因变量.

定义域：x 的取值范围 X 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$ 或 D.

值域：当 x 遍取 X 中一切值，函数值 $y=f(x)$ 的变化范围称为函数 f 的值域，记作 $R(f)$ 或 R_f.

函数有如下性质：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

4. 复合函数与反函数

复合函数：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D$，称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量. 函数 g 与 f 构成的复合函数通常记为 $f\cdot g$，即 $(f\cdot g)(x)=f[g(x)]$. 两个函数能够构成复合函数的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_1 内.

反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一的 $x\in D(f)$，使 $y=f(x)$，则说 x 也是 y 的函数，我们将这个函数记作 $x=f^{-1}(y)$，并把它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 而 $y=f(x)$ 则称为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数. 显然 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$. 即 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

反函数存在定理：若函数 $y=f(x)$ 在 $D(f)$ 上单调，则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，而且反函数也是单调的.

直接函数和它的反函数图像关于直线 $y=x$ 对称.

5. 初等函数与非初等函数

基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数，称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

函数的表现形式有：显函数，隐函数.

释疑解惑

【问 1-1-1】 怎样判断一个函数是不是周期函数?

答 判断一个函数是不是周期函数,有时可以使用下列方法:

1. 设周期函数的定义域为 D,周期为 T. 若 $x_0\in D$,则 $x_0\pm T\in D$,从而 $\{x_0\pm nT\}\in D$(n 为整数). 因此,D 既无上界也无下界. 反之,若某函数的定义域是有上界或下界的,则此函数必非周期函数.

2. 若 $f(x)$为周期函数,则函数 $f(x)-f(x_0)$的零点(即方程 $f(x)-f(x_0)=0$ 的根)必呈周期性. 反之,若 $f(x)-f(x_0)$的零点不呈周期性,则 $f(x)$必非周期函数.

【问 1-1-2】 如果函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间(a,b)内都无界,那么函数 $f(x)g(x)$在(a,b)内一定无界吗?

答 不一定. 例如,$f(x)=\tan x$, $g(x)=\cot x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内都无界,但 $f(x)g(x)=1$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是有界的.

例题解析

【例 1-1-1】 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$,求 $f(x-2)$.

分析 这类题,依据函数表示法的无关特性,利用变量代换,得到关于函数的另一恒等式,得出所求函数的表达式.

解 利用函数表示法的无关特性,令 $t=x+2$,则 $x=t-2$,代入原方程得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$. 所以,$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$.

$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$$

【例 1-1-2】 设 $f(x)=\begin{cases}-x^3 & x\geqslant 0\\ -e^x & x<0\end{cases}$,$\varphi(x)=\ln x$,求 $f[\varphi(x)]$.

分析 关键是要正确理解记号 $f[\varphi(x)]$所表示的函数的结构.

解
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^3(x) & \varphi(x)\geqslant 0\\ -e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<0\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^3(x) & x\geqslant 1\\ -x & 0<x<1\end{cases}$$

【例 1-1-3】 试说明函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 4-x & 2<x\leqslant 4\end{cases}$是一个初等函数.

分析　关键理解初等函数的意义.

解　由于 $f(x)=2-|x-2|=2-\sqrt{(x-2)^2}$，$x\in[0,4]$，所以由初等函数的定义知 $f(x)$是一个初等函数.

习题选解

1. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明　设 $x\in(A\cap B)^C$，从而 $x\notin A\cap B$，故 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，从而 $x\in A^C$ 或 $x\in B^C$，即 $x\in A^C\cup B^C$.

设 $x\in A^C\cup B^C$，从而 $x\in A^C$ 或 $x\in B^C$，从而 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，即 $x\notin A\cap B$，故 $x\in(A\cap B)^C$.

7. 有一长 1 m 的细杆，记作 OAB，OA 段长 0.5 m，其线密度(单位长度细杆的质量)为 2 kg/m，AB 段长 0.5 m，其线密度为 3 kg/m. 设 M 是细杆上任意一点，OM 的长度为 x，质量为 m，试将 m 表示为 x 的函数.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 0.5$ 时，M 点落在 OA 段，从而 $m=2x$；当 $0.5<x\leqslant 1$ 时，M 点落在 AB 段，从而 $m=0.5\times 2+3(x-0.5)=1+3(x-0.5)$，故

$$m=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ 1+3(x-0.5) & 0.5<x\leqslant 1\end{cases}$$

13. 判断下列函数的单调性：

(1)$f(x)=2^{-x}$；　(2)$f(x)=1-x^2$；　(3)$f(x)=x+\lg x$.

解　(1)当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$且 $x_1>x_2$ 时，由于 $2^{x_1}>2^{x_2}$，从而 $2^{-x_2}>2^{-x_1}$，从而在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)=2^{-x}$ 单调减少；

(2)当 $x_1>x_2>0$ 时，由于 $x_1^2>x_2^2$，从而 $1-x_2^2>1-x_1^2$，故在$(0,+\infty)$内，$f(x)=1-x^2$ 单调减少；

当 $x_1<x_2<0$ 时，由于 $x_1^2>x_2^2$，从而 $1-x_2^2>1-x_1^2$，故在$(-\infty,0)$内 $f(x)=1-x^2$ 单调增加；

(3)当 $x_1>x_2>0$ 时，由于 $\lg x_1>\lg x_2$，从而 $x_1+\lg x_1>x_2+\lg x_2$，故在$(0,+\infty)$内 $f(x)=x+\lg x$ 单调增加.

19. 下列函数是由那些简单函数复合而成：

(1)$y=(1+x^3)^{\frac{1}{4}}$；　　(2)$y=\lg\cos\sqrt{1+x^2}$；

(3)$y=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$；　　(4)$y=5^{\frac{1}{x}}$.

解　(1)由 $f(u)=u^{\frac{1}{4}}$ 及 $g(x)=1+x^3$ 复合而成；

(2)由 $f(u)=\lg u, g(v)=\cos v$、$h(t)=\sqrt{t}$ 及 $s(x)=1+x^2$ 复合而成；

(3)由 $f(u)=\arctan u, g(v)=\sqrt[3]{v}$ 及 $h(x)=\dfrac{x-1}{2}$ 复合而成；

(4)由 $f(u)=5^u$ 及 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

22. 已知 $f(x)=10^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的表达式，并写出它的定义域.

解　$f[\varphi(x)]=10^{\varphi^2(x)}=1-x$，从而 $\varphi^2(x)=\lg(1-x)$，即 $\varphi(x)=\sqrt{\lg(1-x)}$，其定义域为 $x\leqslant 0$.

23. 求下列函数的反函数，并写出定义域：

(1) $y=3^{2x-5}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\leqslant x\leqslant 2.\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$

解　(1)两边取对数可得其反函数为 $y=\dfrac{\log_3 x+5}{2}$，定义域为 $x>0$；

(2)反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，定义域为 $x\neq -1$；

(3)当 $x<-1$ 时，$f(x)<-1$；当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-1\leqslant f(x)\leqslant 8$；当 $x>2$ 时，$f(x)>8$，从而反函数为

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & x<-1\\ \sqrt[3]{x} & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{x+16}{12} & x>8\end{cases}$$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

1.2　极　限

内容提要

1. 数列及其极限

如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}^+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数

x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 就叫做数列，简记为数列 $\{x_n\}$. 数列也可以看做定义为正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数 $f: n \to \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^+$. 通常称为整标函数.

数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项叫做数列的一般项.

极限定义 1 设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它有多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$.

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

2. 函数极限

极限定义 2 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它有多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$；

如果这样的常数不存在，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

如果 $x>0(x<0)$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty(x\to-\infty)$），那么上述定义中的 $|x|>X$ 可以改为 $x>X(x<-X)$，可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A)$ 的定义.

一般地说，如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$，则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线.

极限定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它有多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$，那么常数 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 或 $f(x)\to a(x\to x_0)$. 如果 a 不存在，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

当 x 从左侧逼近 x_0（记作 $x\to x_0^-$），这时 $x<x_0$，在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 中，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$ 或 $f(x_0^-)=a$ 或 $f(x_0-0)=a$. 类似地，当 x 从右侧逼近 x_0

(记作 $x \to x_0^+$),这时 $x > x_0$,在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 中,将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 < x < x_0 + \delta$,那么 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ 或 $f(x_0^+) = a$ 或 $f(x_0 + 0) = a$.

左极限与右极限统称为单侧极限. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = A$.

3. 无穷小与无穷大

无穷小:如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的极限为零,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小.

特别地,以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小.

无穷大:设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它有多么大),总存在正数 δ(或正数 X),只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$),对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)| > M$,则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大.

释疑解惑

【问 1-2-1】 怎样证明数列发散?

答 证明数列 $\{x_n\}$ 发散的常用方法是:

(1)找出 $\{x_n\}$ 的一个发散的子列;

(2)找出 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列.

【问 1-2-2】 下列说法对吗? 为什么?

(1)无穷小量是很小的数,无穷大量是很大的数;

(2)无穷小量实际上就是 0;

(3)无穷大量是无界量;

(4)无界变量就是无穷大量.

答 (1)都不对. 无穷小量是指极限为 0 的变量,任何很小的数(零除外)都不是无穷小量;无穷大量是指极限为无穷大的变量,任何很大的数都不是无穷大量.

(2)不对,数 0 是无穷小量,但无穷小量不仅仅是数 0.

(3)对,由定义即知.

(4)不对,无界变量不一定是无穷大量,例如,$y = \begin{cases} x & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$,在 $x \to$

$+\infty$时，y是无界变量，但却不是无穷大，因为无穷大要求变量x从某时刻以后都毫无例外地有$|y|>M$，这里M是任意给定的正数.

【问 1-2-3】 怎样证明数列不是无穷大？

答 证明数列$\{x_n\}$不是无穷大的常用方法是找出一个收敛的子列. 因为若$\{x_n\}$是无穷大，则它的任何子列都是无穷大. 所以若某子列收敛，即该子列不是无穷大，于是原数列也不是无穷大.

例题解析

【例 1-2-1】 证明(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0(a>1)$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析 利用极限定义，数列的递推关系及单调有界原理.

证明 (1)令$x_n=\dfrac{n}{a^n}$，则$x_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{a}x_n$. 由于$a>1$，故有$\dfrac{n+1}{na}<1$，当$n$充分大以后，从而$\{x_n\}$单调减少，但$x_n>0$，从而$\{x_n\}$有下界，故$\{x_n\}$收敛. 由极限运算的法则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)由(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0(a>1)$，对于任意给定的正数$\varepsilon$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$，因而存在$N$，当$n>N$时，有$\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$. 即$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$. 而$\sqrt[n]{n}\geqslant1(n=1,2,\cdots)$，所以当$n>N$时，必有$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【例 1-2-2】 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？又当$x\to+\infty$时，这个函数是否为无穷大？为什么？

分析 要正确理解无穷大的概念及无界函数的概念.

解 $y=x\cos x$在$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$时，$y=0$；在$x=2n\pi\ (n=1,2,\cdots)$时，$y=2n\pi$. 即在$x\to+\infty$时，$y$是无界变量，但却不是无穷大，因为无穷大要求变量$x$从某时刻以后都毫无例外地有$|y|>M$，这里$M$是任意给定的正数. 而$y$在$x\to+\infty$时，永远有零点.

习题选解

1. 用函数极限的定义证明：

(1)$\lim\limits_{x\to2}(3x+1)=7$；　(2)$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}=0$；