

微积分

主 编 孙明岩



東北大學出版社
Northeastern University Press

微 积 分

主 编 孙明岩
副主编 于 丹 扶先辉

东北大学出版社

· 沈阳 ·

© 孙明岩 2010

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分 / 孙明岩主编. —沈阳: 东北大学出版社, 2010.8 (2011.9 重印)
ISBN 978-7-81102-841-6

I. ①微… II. ①孙… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 151257 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市池陆广告印刷有限公司

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 184mm×260mm

印 张: 23.5

字 数: 602 千字

出版时间: 2010 年 8 月第 1 版

印刷时间: 2011 年 9 月第 2 次印刷

责任编辑: 刘宗玉 石玉玲

责任校对: 郎 坤

封面设计: 唯 美

责任出版: 唐敏志

ISBN 978-7-81102-841-6

定价: 42.00 元

前 言

大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善。知止而后有定，定而后能静，静而后能安，安而后能虑，虑而后能得。物有本末，事有终始。知所先后，则近道矣。

——《大学》

我国正在创建和谐社会。联系数学的功能，万物皆可用数表示，这些数本身具有的内涵，是与它们一种基本的和谐密切相关的。从古代起，人类就一直没有停止过对物质或时空微分单元的思考，并且大多数停留在球体的形相上。微积分学起源于资本主义工业革命，工业的发展要求精确刻画各种运动——机械运动、天体运动、流体与气体运动等——的规律性，为此研究变量的数学——微积分学——诞生了。17 世纪，牛顿、莱布尼茨建立了微积分学，又经过一个多世纪才形成现在的微积分学体系。经济学与现代数学关系密切，据统计，自 1969 年起建立的诺贝尔经济学奖的得主有半数以上得益于有效地应用现代数学知识，现代数学已成为经济学研究的强有力的工具，因此，作为现代数学基础的微积分学也是经济管理等专业的一门重要基础课。

目前，微积分学涉及几乎所有的科技领域，例如海岸长度是否是可测的，基因剪切是如何让同一段 DNA 编码多样化的。但在这些领域，微积分学对实际生产、生活的影响，即便是当代大学生也不一定能了解。我们在大学阶段应不应该向独立本科院校的学生介绍这些领域最前沿的现状和发展前景？应不应该以通俗、生动的语言讲解微积分学对这些科技领域的深刻影响，培养他们把科学当做一种纯粹的爱好的没有功利色彩，以使他们对创新有足够的热情？

《微积分》作为独立本科院校的微积分学教材，在编写过程中，立足独立本科院校特色，以应用为目的，本着“联系实际、深化概念、注重应用”的教学原则，突出强调数学概念与实际问题的联系。不过多强调灌输其逻辑的严密性、思维的严谨性，不追求过分复杂的计算和变换，而重视数学应用意识，以培养学生灵活运用和解决问题、分析问题的能力。《微积分》采用“实例教学法”编写，由实例引入数学知识，再将数学知识应用到各种实际问题中。用大量的实例反映数学的应用，加深学生对数学知识的理解，从而使数学源于实际，又反作用于实际。章、节例题设计实用，每节有思考题和习题，复习题方便教与学。编写的内容力求简洁易懂、突出实用性，在教学中可根据不同专业和学时多少在内容上有所取舍。充分考虑独立本科院校学生的数学基础，较好地处理了初等数学与微积分的过渡与衔接。适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明，帮助学生理解有关概念和理论。

本书另一特色是在微积分里引入了数学实验，数学实验的目的是提高学生学习数学的积极性，提高学生对数学的应用意识，并培养学生用所学的数学知识和计算机技术提高认识问题和解决实际问题的能力。不同于传统的数学学习方式，本书强调以学生动手为主的数学学习方式。在数学实验中，计算机的引入和数学软件包的应用，为数学的思想与方法注入了更多、更广泛的内容，使学生摆脱了繁重的乏味的数学演算和数值计算，促进了数学同其他学科之间的结合，从而使学生有时间去做更多的创造性工作。

本书由孙明岩担任主编，于丹、扶先辉担任副主编，参加编写工作的有杨建平（第二章）、于丹（第一章、第三章）、黄叶文（第七章、第九章）、孙明岩（第四章、第五章、第六章、第八章），数学实验由于丹和黄叶文共同编写。《微积分》结构框架由主编完成，副主编参加了审稿和定稿工作，在此表示谢意。

限于编者的水平，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

2010 年 3 月

目 录

第一章 预备知识	1
第一节 集合与区间.....	1
第二节 基本初等函数的图像及其基本特征.....	2
第三节 方程和不等式.....	5
数学实验一 Mathematica 入门	7
第二章 极限与连续	14
第一节 函数	14
第二节 极限的定义	22
第三节 极限的运算法则	26
第四节 无穷小量与无穷大量	28
第五节 两个重要极限公式	30
第六节 函数的连续性	32
第七节 常用经济函数	36
数学实验二 一元函数微分学	42
第三章 导数与微分	59
第一节 导数的基本概念	60
第二节 函数的求导法则	68
第三节 高阶导数	76
第四节 函数的微分	78
数学实验三 一元函数微分学	85
第四章 微分中值定理与导数的应用	95
第一节 微分中值定理	95
第二节 洛必达法则	99
第三节 泰勒公式.....	105
第四节 函数的单调性与极值.....	108
第五节 最值问题.....	116
第六节 函数的作图.....	120
数学实验四 一元函数微分学.....	125
第五章 不定积分	142
第一节 不定积分的概念与性质.....	142

第二节 换元积分法	149
第三节 分部积分法	157
第四节 几种特殊类型函数的积分	160
数学实验五 函数作图	171
第六章 定积分	188
第一节 定积分的概念	188
第二节 微积分基本公式	196
第三节 定积分的换元法	200
第四节 定积分的分部积分法	203
第五节 定积分的应用	206
第六节 反常积分初步	213
数学实验六 一元函数积分学定积分的算法	217
第七章 多元函数微积分	229
第一节 空间解析几何简介	229
第二节 空间曲面及空间曲线	231
第三节 多元函数的概念	238
第四节 二元函数的极限与连续性	240
第五节 偏导数与全微分	244
第六节 多元复合函数与隐函数的微分法	249
第七节 偏导数的应用	254
第八节 二重积分	262
数学实验七 空间图形的画法	270
第八章 无穷级数	298
第一节 数项级数的概念和性质	298
第二节 正项级数及其敛散性判别法	303
第三节 一般常数项级数	309
第四节 幂级数	312
第五节 函数的幂级数展开	320
数学实验八 无穷级数	324
第九章 微分方程简介	337
第一节 微分方程的基本概念	337
第二节 一阶微分方程	340
第三节 可降阶的二阶微分方程	348
第四节 微分方程在经济学中的应用	353
数学实验九 微分方程	357
参考文献	369

第一章 预备知识

数学受到高度尊崇的另一个原因在于：恰恰是数学，给精密的自然科学提供了无可置疑的可靠保证，没有数学，它们无法达到这样的可靠程度。

——爱因斯坦

为了使具有不同数学基础的同学能在同一起点学习本课程的内容，在学习本课程内容之前，我们先复习一下在经济数学中常用的一些初等数学知识，数学基础好的同学可跳过本章，直接进入下一章的学习。

第一节 集合与区间

一、常用集合的有关符号

$\emptyset$ 表示空集.

$\mathbf{N}$ 表示非负整数集，即自然数集. $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集.

$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

$\mathbf{R}$ 表示实数集.

$A \subseteq B$ 表示集合 A 是集合 B 的子集.

$A \cup B$ 表示集合 A 与集合 B 的并集.

$A \cap B$ 表示集合 A 与集合 B 的交集.

$A - B$ 表示属于集合 A 不属于集合 B 的集合.

二、区 间

(1) 将满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a, b 为端点的闭区间，记做 $[a, b]$. 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.

(2) 将满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a, b 为端点的开区间，记做 (a, b) . 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

(3) 将满足不等式 $a \leq x < b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a, b 为端点的右开左闭区间，记做 $[a, b)$. 即 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.

(4) 将满足不等式 $a < x \leq b$ 的所有实数 x 的集合叫做以 a, b 为端点的左开右闭区间，记做 $(a, b]$. 即 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

以上定义的 4 个区间统称为有限区间. 以下定义的 5 个区间统称为无穷区间.

(5) $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$ 表示满足不等式 $x > a$ 的全体实数.

(6) $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$ 表示满足不等式 $x \geq a$ 的全体实数.

- (7) $(-\infty, a) = \{x | x < a\}$ 表示满足不等式 $x < a$ 的全体实数.
 (8) $(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$ 表示满足不等式 $x \leq a$ 的全体实数.
 (9) $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 表示全体实数. 其中, “ $+\infty$ ” 读做 “正无穷大”, “ $-\infty$ ” 读做 “负无穷大”.

第二节 基本初等函数的图像及其基本特征

一、基本初等函数

基本初等函数是指以下的五类函数, 在中学这些函数已经学习过, 这一节我们将其归类进行总结. 为了后面经济数学的学习, 有必要了解和掌握好它们.

1. 幂函数 $y = x^a$ (a 为任意常数)

$y = x^a$ 的定义域和值域因 a 的不同而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 内都有定义, 且图像经过点 $(1, 1)$. 图 1.1 给出了常见的几个幂函数的图像.

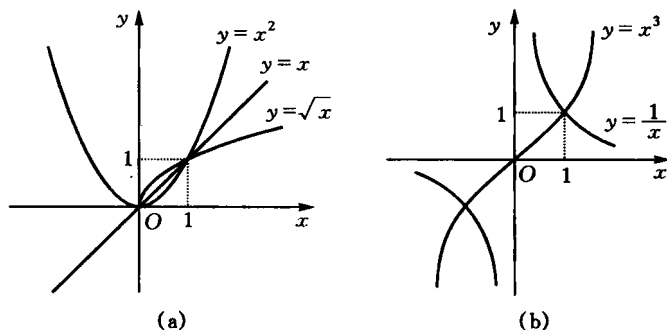


图 1.1 常见的幂函数的图像

幂函数与分式、根式的关系如表 1.1 所示.

表 1.1 幂函数与分式、根式的关系

幂函数表示	分式表示	根式表示
$x^{-\frac{m}{n}}$ (m, n 为正整数)	$\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$
$x^{\frac{m}{n}}$ (m, n 为正整数)	$x^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{x^m}$

从表 1.1 中可以看出, 幂函数和分式、根式可以相互转换.

例如, 幂函数转换成根式: $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$; 幂函数转换成分式: $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

$y = a^x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(0, +\infty)$. 它的图像过点 $(0, 1)$ 且全部在 x 轴上方, 当 $0 < a < 1$ 时, 图像是减函数且无界; 当 $a > 1$ 时, 图像是增函数且无界. 如图 1.2 所示.

特别值得注意的是指数函数与幂函数的区别:

在幂函数 $y=x^a$ 中, 底数为自变量, 指数 a 是常数; 而在指数函数 $y=a^x$ 中, 底是常数 a , 指数为自变量.

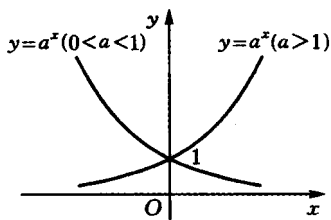


图 1.2 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)

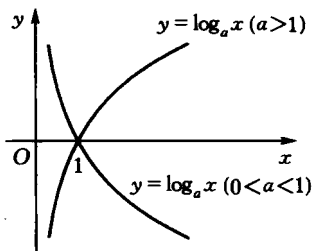


图 1.3 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)

3. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)

其定义域是 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 图像过点 $(1, 0)$; 当 $0 < a < 1$ 时, 图像在 $(0, +\infty)$ 内是减函数且无界; 当 $a > 1$ 时, 图像在 $(0, +\infty)$ 内是增函数且无界. 如图 1.3 所示.

注: (1) 对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数, 它们的图像关于 $y=x$ 对称.

(2) 以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数, 简记 $y=\ln x$, 在实际问题中常遇见, 是微积分中研究的重要函数之一.

4. 三角函数

三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数 6 种函数.

我们将前四种三角函数的图像和常用的主要特征归类如下.

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ (如图 1.4 所示)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 所以是有界函数; 图像关于原点对称, 为奇函数.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$ (如图 1.4 所示)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 是有界函数; 图像关于 y 轴对称, 是偶函数.

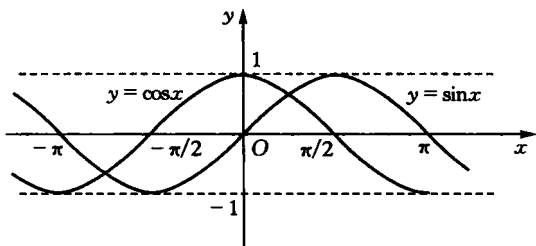


图 1.4 正弦函数 $y=\sin x$ 及余弦函数 $y=\cos x$

(3) 正切函数 $y=\tan x$ (如图 1.5(a))

定义域是 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 的一切实数, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 是无界函数; 图像关于原点对称, 为奇函数.

(4) 余切函数 $y = \cot x$ (如图 1.5(b))

定义域为 $x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的一切实数, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 是无界函数; 图像关于原点对称, 为奇函数.

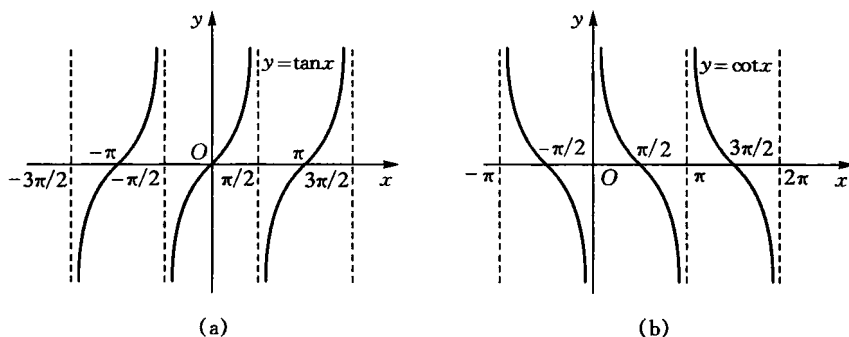


图 1.5 正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$

关于函数 $y = \sec x$ 和 $y = \csc x$, 在这里不作详细讨论.

5. 反三角函数

常见的反三角函数有反正弦函数、反余弦函数、反正切函数和反余切函数.

反正弦函数 $y = \arcsin x$

反余弦函数 $y = \arccos x$

反正切函数 $y = \arctan x$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

二、常用的三角函数公式

为了便于后面的学习, 我们将特殊三角函数的值和后面学习中常用的三角函数公式归纳如下, 以供查阅.

1. 同角三角函数关系公式

$$(1) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$(2) \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$(3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

2. 倍角公式的几种表示形式

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(3) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(4) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

3. 积化和差

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$(3) \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$(4) \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

4. 特殊三角函数值

特殊三角函数值如表 1.2 所示.

表 1.2

特殊三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

第三节 方程和不等式

在日常生活和实际工作中,常遇到一个或多个变量之间的关系用等号或不等号联系起来,怎样通过已知数量求未知数量,这就是本节要讨论的方程和不等式.

一、方 程

含有未知数的等式叫做方程.能够使方程左右两边相等的未知量的取值叫做方程的解.方程的解又叫做方程的根.

求方程的解的过程叫做解方程.

1. 一元一次方程

形如 $ax+b=0$ ($a \neq 0$) 的方程叫做一元一次方程.

一元一次方程可以化成 $ax = -b$ ($a \neq 0$), 得到方程的解 $x = -\frac{b}{a}$.

2. 一元二次方程

只含有一个未知量,并且未知量的最高次幂是二次的方程叫做一元二次方程,它的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$).

一元二次方程的解法主要有因式分解法和公式法.

一元二次方程的求根公式: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

下面举例说明求一元二次方程根的因式分解法和公式法.

例 1.3.1 解方程 $2x^2 - x - 6 = 0$.

解一 原方程分解因式化为

$$(x-2)(2x+3)=0,$$

则有

$$x-2=0 \text{ 或 } 2x+3=0,$$

解得 $x_1=2, x_2=-\frac{3}{2}$.

解二 因为 $a=2, b=-1, c=-6$, 所以

$$b^2-4ac=(-1)^2-4\times 2\times (-6)=49,$$

由公式法得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times (-6)}}{2\times 2}=\frac{1+7}{4},$$

从而得到原方程的两个根为

$$x_1=2, x_2=-\frac{3}{2}.$$

二、直线方程

形如 $ax+by+c=0$ 的二元一次方程的图形是一条直线 (其中 a, b 不能同时为零). 特别地:

当 $a=0, b\neq 0$ 时, $y=-\frac{c}{b}$ 表示过点 $(0, -\frac{c}{b})$ 且平行于 x 轴的一条直线;

当 $b=0, a\neq 0$ 时, $x=-\frac{c}{a}$ 表示过点 $(-\frac{c}{a}, 0)$ 且垂直于 x 轴的一条直线.

本书中求直线方程常用的方法:

(1) 已知直线的斜率 k 和直线上的一点 (x_1, y_1) , 由直线的点斜式, 可写出方程:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

(2) 若直线平行于 y 轴, 且过点 $(x_1, 0)$, 则有 $x=x_1$.

(3) 若直线平行于 x 轴, 且过点 $(0, y_1)$, 则有 $y=y_1$.

三、不等式

含有不等关系的式子叫做不等式. 能够使不等式成立的未知量的值叫做不等式的解.

1. 一元一次不等式

含有一个未知量, 并且未知量的最高次幂是一次的的不等式, 叫做一元一次不等式.

解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤类似.

例 1.3.2 解不等式 $\frac{3x-1}{2}\leq\frac{6x-5}{3}$.

解 去分母得

$$3(3x-1)\leq 2(6x-5),$$

去括号得

$$9x-3\leq 12x-10,$$

移项, 合并得

$$-3x\leq -1,$$

即

$$x \geq \frac{7}{3}.$$

2. 一元一次不等式组

含有相同未知量的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组. 同时满足不等式组中每一个不等式的解，叫做这个不等式组的解.

例 1.3.3 解不等式组
$$\begin{cases} 8x - 5 \leq 3x + 2, \\ \frac{x}{3} \leq 2x + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

解 由第一个不等式得

$$x \leq \frac{7}{5},$$

由第二个不等式得

$$x \geq -\frac{3}{20},$$

所以不等式组的解为

$$-\frac{3}{20} \leq x \leq \frac{7}{5}.$$

3. 一元二次不等式

含有一个未知量，并且未知量的最高次幂是二次的不等式，叫做一元二次不等式. 解一元二次不等式常与解一元二次方程结合在一起，具体解法见表 1.3.

表 1.3 一元二次不等式的解法

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	有两个不同的实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实根 $x = -\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$	解为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$	解为 $x \neq -\frac{b}{2a}$ 的全体实数	解为全体实数
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$	解为 $x_1 < x < x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

例 1.3.4 解不等式 $x^2 - x - 6 > 0$.

解 解方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 得两个不等实根

$$x_1 = -2, x_2 = 3,$$

所以，不等式 $x^2 - x - 6 > 0$ 的解为 $x < -2$ 或 $x > 3$.

数学实验一 Mathematica 入门

看到“数学实验”这几个字不禁会问：做数学题不是靠一张纸、一支笔就行了吗？怎么像物理、化学一样要做实验了呢？这是计算机技术和数学软件引入教学后出现的新事物，是数学教学体系、内容和方法改革的一项尝试. 几年前，设置数学实验课的构想一出现，立即在数学教育界引起反响. 1995 年，在国家教委组织实施的“高等教育面向 21 世纪教学内

容和课程体系改革”计划中,“理科非数学类专业高等数学课程体系和内容改革”项目的总体构想报告,把“数学实验”列为高校非数学类专业的数学基础课之一,一些学校积极创造条件准备付诸实施.

开设数学实验课主要是培养学生综合运用数学知识分析和解决实际问题的能力.

数学实验的基本内容是数值计算、符号演算、图形描绘,还有取自应用领域的各种实际问题 and 科学研究中的基础问题,介绍如何通过建模方法将实际问题转化为数学问题,讲述解决问题的方法,包括解析的方法和数值的方法,并且介绍各种常用的数学软件.通过在计算机上做实验,使学生掌握用数值模拟的方法解决实际问题的全过程.

本书中,主要选择高等数学中的一些基本问题作为实验内容,并采用数学软件 Mathematica 作为实验平台.

Mathematica 是由美国的 Wolfram 公司开发的一个功能强大的计算机数学系统,以符号演算见长,也具有高精度的数值计算功能和强大的绘图功能.高等数学实验的大部分计算和绘图作业都需要使用 Mathematica 辅助完成.本书介绍的命令可以适用于 Windows 操作系统下的 Mathematica4.0.

下面介绍 Mathematica4.0 的具体用法.

Mathematica 中,大写和小写是有区别的,如 Name, name, NAME 等是不同的变量名或函数名.

系统所提供的功能大部分以系统函数的形式给出,内部函数一般写全称,而且一定是以大写英文字母开头的,如 $\text{Sin}[x]$, $\text{Conjugate}[z]$ 等.

乘法既可以用 $*$, 又可以用空格表示,如 $2\ 3 = 2 * 3 = 6$, $x\ y$, $2\ \text{Sin}[x]$ 等;乘幂可以用 $^$ 表示,如 $x^{0.5}$, $\text{Tan}[x]^y$.

自定义的变量可以取几乎任意的名称,长度不限,但不可以数字开头.

当你赋予变量任何一个值时,除非你明显地改变该值或使用 $\text{Clear}[\text{变量名}]$ 或“变量名 = .”取消该值为止,它将始终保持原值不变.

一定要注意四种括号的用法. $()$: 圆括号表示项的结合顺序,如 $(x + (y^x + 1/(2x)))$; $[]$: 方括号表示函数,如 $\text{Log}[x]$, $\text{BesselJ}[x, 1]$; $\{\}$: 花括号表示一个“表”(一组数字、任意表达式、函数等的集合),如 $\{2x, \text{Sin}[12\ \text{Pi}]\}$, $\{1 + A, y * x\}$; $[[]]$: 双方括号表示“表”或“表达式”的下标,如 $a[[2, 3]]$, $\{1, 2, 3\}[[1]] = 1$.

Mathematica 的语句书写十分方便,一个语句可以分为多行写,同一行可以写多个语句(但要以分号间隔).当语句以分号结束时,语句计算后不做输出(输出语句除外),否则将输出计算的结果.

一、数的表示及计算

(1) 在 Mathematica 中,你不必考虑数的精确度(除非你指定输出精度),Mathematica 总会以绝对精确的形式输出结果.例如:你输入 $\text{In}[1] := 378/123$,系统会输出 $\text{Out}[1] := 126/41$,如果想得到近似解,则应输入 $\text{In}[2] := \text{N}[378/123, 5]$,即求其 5 位有效数字的数值解,系统会输出 $\text{Out}[2] := 3.073$.

(2) 另外,Mathematica 还可以根据前面使用的数字的精度自动地设定精度.

Mathematica 与众不同之处还在于它可以处理任意大、任意小及任意位精度的数值，如 $100 \sim 7000$ ， $2^{(-2000)}$ 等数值可以很快地求出，但在其他语言或系统中这是不可想象的，你不妨试一试 $N[\text{Pi}, 1000]$ 。

Mathematica 还定义了一些系统常数，如上面提到的 Pi （圆周率的精确值），还有 E （自然对数的底数）、 I （复数单位）、 Degree （角度一度， $\text{Pi}/180$ ）、 Infinity （无穷大）等，不要小看这些简单的符号，它们包含的信息远远大于我们所熟知的它们的近似值，它们的精度也是无限的。

二、“表”及其用法

“表”是 Mathematica 中一个相当有用的数据类型，它既可以作为数组，又可以作为矩阵。除此以外，你可以把任意一组表达式用一个或一组 $\{\}$ 括起来，进行运算、存储。可以说表是任意对象的一个集合。它可以动态地分配内存，可以方便地进行插入、删除、排序、翻转等几乎所有可以想象到的操作。

如果建立了一个表，可以通过下表操作符 $[[\]]$ （双方括号）来访问它的每一个元素，如定义 $\text{table} = \{2, \text{Pi}, \text{Sin}[x], \{\text{aaa}, A * I\}\}$ 为一个表，那么 $\text{table}[[1]]$ 就为 2， $\text{table}[[2]]$ 就是 Pi ，而 $\text{table}[[3,1]]$ 表示嵌套在 table 中的子表 $\{\text{aaa}, A * I\}$ 的第一个元素，即 aaa ， $\text{table}[[3,2]]$ 表示 $\{\text{aaa}, A * I\}$ 的第二个元素，即 $A * I$ 。总之，表每一层次上并列的部分用逗号分割，表可以无穷嵌套。

可以通过 $\text{Append}[\text{表}, \text{表达式}]$ 或 $\text{Prepend}[\text{表}, \text{表达式}]$ 把表达式添加到表的最前面或最后面，如 $\text{Append}[\{1, 2, 3\}, a]$ 表示 $\{1, 2, 3, a\}$ ；还可以通过 $\text{Union}[\text{表}1, \text{表}2, \dots]$ ， $\text{Join}[\text{表}1, \text{表}2, \dots]$ 来把几个表合并为一个表。两者不同之处在于 Union 在合并时删除了各表中重复的元素，而后者仅是简单的合并。还可以使用 $\text{Flatten}[\text{表}]$ 把表中所有子表“抹平”合并成一个表，而 $\text{Partition}[\text{表}, \text{整数 } n]$ 把表按每 n 个元素分段作为子表，集成一个表。如 $\text{Flatten}[\{1, 2, \{\text{Sin}[x], \text{dog}\}, \{\{y\}\}\}]$ 表示 $\{1, 2, \text{Sin}[x], y\}$ ，而 $\text{Partition}[\{1, 2, \text{Sin}[x], y\}, 2]$ 把表每两个分段，结果为 $\{\{1, 2\}, \{\text{Sin}[x], y\}\}$ ；还可以通过 $\text{Delete}[\text{表}, \text{位置}]$ 、 $\text{Insert}[\text{表}, \text{位置}]$ 来向表中按位置插入或删除元素，如要删除上面提到的 table 中的 aaa ，可以用 $\text{Delete}[\text{table}, \{3, 1\}]$ 来实现； $\text{Sort}[\text{表}]$ 给出了表中各元素的大小顺序， $\text{Reverse}[\text{表}]$ 、 $\text{RotateLeft}[\text{表}, \text{整数 } n]$ 、 $\text{RotateRight}[\text{表}, \text{整数 } n]$ 可以分别将一个表进行翻转、左转 n 个元素、右转 n 个元素等操作， $\text{Length}[\text{表}]$ 给出了表第一个层次上的元素个数， $\text{Position}[\text{表}, \text{表达式}]$ 给出了表中出现该表达式的位置， $\text{Count}[\text{表}, \text{表达式}]$ 则给出表达式出现的次数。各种表的操作函数还有很多，这里就不再一一介绍了。

三、图形函数

Mathematica 的图形函数十分丰富，用寥寥几句就可以画出复杂的图形，而且可以通过变量和文件存储和显示图形，具有极大的灵活性。

图形函数中最有代表性的函数为 $\text{Plot}[\text{表达式}, \{\text{变量}, \text{下限}, \text{上限}\}, \text{可选项}]$ （其中，表达式还可以是一个“表达式表”，这样可以在一个图里画多个函数）；变量为自变量；上限和下限确定了作图的范围；可选项可要可不要，若不写，则系统会按默认值作图，它表示

对作图的具体要求. 例如 `Plot[Sin[x], {x, 0, 2 * Pi}, AspectRatio-1]` 表示在 $0 < x < 2\pi$ 的范围内作函数 $\sin[x]$ 的图像, `AspectRatio` 为可选项, 表示图的 x 向、 y 向比例, `AspectRatio-1` 表示纵横比例为 1:1, 如果不写这一项, 系统默认比例为 1:GoldenRatio, 即黄金分割的比例 (注意, 可选项的写法为可选项名-可选项值). `Plot` 还有很多可选项, 如 `PlotRange` 表示作图的值域; `PlotPoint` 表示画图中取样点的个数, 越大则图越精细; `PlotStyle` 用来确定所画图形的线宽、线型、颜色等特性; `AxesLabel` 表示在坐标轴上作标记; 等等.

1. 二维函数作图

`Plot [函数 f, {x, xmin, xmax}, 选项]`

在区间 $\{x, \text{xmin}, \text{xmax}\}$ 上, 按选项的要求画出函数 f 的图形.

`Plot[{函数 1, 函数 2}, {x, xmin, xmax}, 选项]`

在区间 $\{x, \text{xmin}, \text{xmax}\}$ 上, 按选项的要求画出几个函数的图形. 如图 1.6 所示.

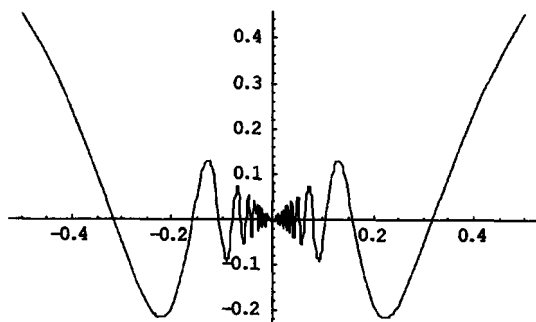


图 1.6 用 `Plot` 生成 $x * \sin[1/x]$ 的图形

2. 二维参数画图函数

`ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, t0, t1}, 选项]`, 画一个 X 轴, Y 轴坐标为 $\{x[t], y[t]\}$, 参变量 t 在 $[t_0, t_1]$ 中的参数曲线, 如图 1.7 所示.

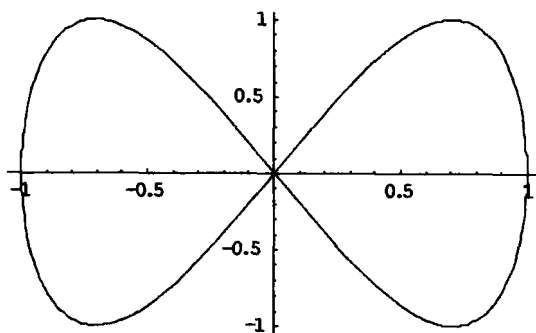


图 1.7 用 `ParametricPlot` 生成 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ 的图形

3. 三维函数作图

`Plot3D [f[x, y], {x, x0, x1}, {y, y0, y1}, 选项]`

在区域 $x \in [x_0, x_1]$ 和 $y \in [y_0, y_1]$ 上, 画出空间曲面 $f[x, y]$, 如图 1.8 所示.