非精确动力系统

——运动的稳定性与控制

〔乌克兰〕A.A. 玛尔德纽克
〔乌克兰〕Ю.A. 玛尔德纽克·契尔年科 著
孙振绮

科学出版社

非精确动力系统

——运动的稳定性与控制

[乌克兰]A.A. 玛尔德纽克
[乌克兰]Ю.A. 玛尔德纽克·契尔年科　著
孙振绮

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍非精确动力系统的定性理论中综合运用的推广李雅普诺夫直接方法，运用纯量与向量、矩阵值李雅普诺夫函数分析连续系统、脉冲系统及在时间标度上的系统的稳定性的各种类型. 书中相当的篇幅分析了非精确方程组的绝对参数稳定性与微分方程组集合的解的稳定性.

本书可供应用数学、力学与控制等学科领域的专家、学者阅读参考，也可作为相关专业高年级本科生和研究生教材.

图书在版编目(CIP)数据

非精确动力系统：运动的稳定性与控制/(乌克兰)玛尔德纽克，(乌克兰)契尔年科，孙振绮著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-032748-2

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①玛… ②契… ③孙… Ⅲ. ①动力系统(数学) Ⅳ. ①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 230498 号

责任编辑：陈玉琢 李 欣／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：300 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书介绍了含非精确参数的动力系统 (简称非精确系统) 的运动稳定性. 研究的任务是建立某些充分条件, 用以保证非精确系统的运动关于某个可移动集合或零平衡状态具有稳定性的确定类型. 同时所运用的李雅普诺夫函数具有纯量的、向量的或矩阵值的辅助函数.

第 1 章对已有的含非精确参数值的系统的稳定性问题的提法进行简短的综述. 讨论了解关于可移动不变集合的稳定性问题与参数稳定性问题的提法.

第 2 章研究了用常微分方程组描述的一类非精确系统的稳定性. 根据推广的李雅普诺夫直接方法, 建立了关于可移动不变集合 (相对不变集合) 的稳定性 (不稳定性) 的各种类型的充分条件. 同时还运用纯量李雅普诺夫函数研究了几个简单的例子. 有关运动关于可移动不变集的指数收敛性问题是对 Corless 和 Leitmann[1] 的研究的某些发展.

第 3 章研究了非精确控制系统关于可移动相对不变集合的运动. 这里根据李雅普诺夫直接方法与 (由班迪科松引入的) 原系统的反演、变换的思想解决了控制的综合问题.

第 4 章继续运用典型的矩阵李雅普诺夫函数研究拟线性自治系统的运动. 同时用特殊矩阵的定号性术语表述稳定性的条件.

第 5 章包含了对非精确大系统稳定性分析的结果. 这里子系统之间关联函数的参数是非精确的, 向量李雅普诺夫函数与分级矩阵李雅普诺夫函数是分析这类系统的动力学性质的主要工具.

第 6 章根据构造与运用向量李雅普诺夫函数的新方法来研究非精确系统的稳定性问题. 并举例, 包括稳定的力学系统的参数选择及自治的大系统的参数稳定性, 来解释本章所得到的某些定理.

第 7 章导出非精确脉冲系统的稳定性分析的定理. 这些论断是对脉冲系统的连续分量与离散分量的动力学性质作新的假设条件下得到的. 其中假设条件包括文献 Lakshmikantham, Bainov 和 Simeonov[1], Samoilenko 和 Perestyuk[1] 中的已知结果. 举例研究了脉冲系统的鲁棒稳定性 (参看文献 Bin Liu et al[1]).

第 8 章研究在时间标度上的非精确动力学方程组. 利用推广的李雅普诺夫直接方法得到这类方程组的零解的各种类型的稳定性与不稳定的充分条件.

第 9 章研究了非精确奇异扰动系统的绝对参数稳定性. 运用推广的李雅普诺夫直接方法来分析非精确方程的稳定性.

第 10 章运用了新一类辅助李雅普诺夫函数, 来分析含非精确参数值的微分方程组集合的稳定性.

最后, 作者向教授 A. Vatsala, M. Corless, V. Λakshmikantham, D. Šiljak 表示衷心的感谢, 感谢他们对书中涉及的某些问题提出有益的建议, 并对本书的研究给予信息资料的支持. 同时, 也要感谢乌克兰人民科学院力学研究所过程稳定性部的同行与哈尔滨工业大学数学系的同行对出版本书给予的支持和帮助.

A.A. 玛尔德纽克
(A.A.Мартынюк)
Ю.A. 玛尔德纽克 · 契尔年科
(Ю.A.Мартынюк-чернцеко)
孙振绮
基辅–威海, 2011

符 号 表

R	所有实数的集合
$R_+ = [0, +\infty) \subset R$	所有非负数的集合
R^k	k 维向量空间
$R \times R^n$	空间 R 与 R^n 的笛卡儿直积
$\mathrm{int}(D)$	集合 D 的内部
∂D	集合 D 的边界
$d(M, x)$	从点 x 到集合 M 的距离
$\mathcal{I}_\tau = [\tau, +\infty) = \{t : \tau \leqslant t < +\infty\}$	含有左端点 τ 的、右半开无穷区间
$\mathcal{I}_i \subseteq R$	所有初始时刻的区间 (或所有可取 t_0 的区间)
$\mathcal{I}_0 = [t_0, +\infty) = \{t : t_0 \leqslant t < +\infty\}$	含有左端点 t_0 的右半开无穷区间
$\|x\|$	在空间 R^n 中的向量 x 的欧几里得范数
$x(t; t_0, x_0)$	当 $t = t_0$ 时具有初值 x_0 的解
$B_\varepsilon = \{x \in R^n : \|x\| < \varepsilon\}$	以坐标原点为中心、半径是 ε 的开球
$\delta_{\mathrm{M}}(t_0, \varepsilon) = \max\{\delta : \delta(t_0, \varepsilon) \ni x_0 \in B_\delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow x(t; t_0, x_0) \in B_\varepsilon, \forall t \in \mathcal{I}_0\}$	在稳定性定义中经常用到的 δ 的最大值
$\Delta_{\mathrm{M}}(t_0) = \max\{\Delta : \Delta = \Delta(t_0)$ 对所有 $\rho > 0$, 对所有 $x_0 \in B_\Delta$, $\exists \tau(t_0, x_0, \rho) \in (0, +\infty) \ni x(t; t_0, x_0) \in B_\rho, \forall t \in \mathcal{I}_\tau\}$	在吸引定义中经常用到的 Δ 的最大值
$\tau_{\mathrm{m}}(t_0, x_0, \rho) = \min\{\tau : \tau = \tau(t_0, x_0, \rho) \ni x(t; t_0, x_0) \in B_\rho, \forall t \in \mathcal{I}_t\}$	在吸引定义中经常用到的 τ 的最小值
$\mathcal{N}$	在 R^n 中坐标原点的时不变邻域
$f : R \times \mathcal{N} \to R^n$	把 $R \times \mathcal{N}$ 映射到空间 R^n 中的向量函数
$C(\mathcal{I}_\tau \times \mathcal{N})$	在 $\mathcal{I}_\tau \times \mathcal{N}$ 上连续的函数集合
$C^{(i,j)}(\mathcal{I}_\tau \times \mathcal{N})$	所有在 $\mathcal{I}_\tau$ 上 i 次可微且在 $\mathcal{N}$ 上 j 次可微的函数集合
$\mathrm{D}^+V(t, x)(\mathrm{D}^-V(t, x))$	函数 V 沿着解 $x(t; t_0, x_0)$ 在 (t, x) 处的迪尼右 (左) 上导数
$\mathrm{D}_+V(t, x)(\mathrm{D}_-V(t, x))$	函数 V 沿着解 $x(t; t_0, x_0)$ 在 (t, x) 处的迪尼右 (左) 下导数

$\mathrm{D}^*V(t,x)$	表示既可看做 $D^+V(t,x)$, 又可当做 $\mathrm{D}_+V(t,x)$ 来用
$\mathrm{D}V(t,x)$	函数 V 沿着解 $x(t;t_0,x_0)$ 在点 (t,x) 处的欧拉导数
$\lambda_i(\cdot)$	矩阵 $(\cdot)$ 的第 i 个特征值
$\lambda_{\mathrm{M}}(\cdot)$	矩阵 $(\cdot)$ 的最大特征值
$\lambda_{\mathrm{m}}(\cdot)$	矩阵 $(\cdot)$ 的最小特征值
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$\Vert A\Vert_2=\max\{\sqrt{\lambda}:\lambda$ 是矩阵 A^*A 的特征值$\}$	矩阵 A 的谱范数
A^*	矩阵 A 的共轭矩阵
$\Vert A\Vert=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\vert a_{ij}\vert^2\right)^{1/2}$	矩阵 A 的盖里别尔特–施密特范数

目　　录

第 1 章　引　　言

由李雅普诺夫创建的具有有限次幂自由项的系统的运动稳定性理论主要依据三个基本概念:

(1) 扰动运动对名义运动的偏差应是无穷小;

(2) 在运动时间内不存在扰动力, 即在运动方程组中应当考虑到系统的所有外扰与内扰的影响;

(3) 对系统起作用的区间没有限制.

但对下述假设是不明显的:

(4) 系统的参数在测量精度范围内是固定的且在运动时间内是不变化的.

第二次世界大战期间开始广泛运用稳定性理论的一般结果, 最先用来解决的问题包括控制系统的稳定性问题、炮弹的低伸弹道的稳定性问题、向一方积聚炮弹的运动稳定性问题.

目前新的一批工程问题推动了运动稳定性理论的发展, 有必要改进现有的研究力学系统或其他系统的方法.

近年来, 对含非精确参数的力学系统的运动稳定性理论的研究不断加强. 这与下述问题有关, 即在许多复杂的技术系统中, 只有对单个子系统参数特性变化的足够大的范围作出规定, 满足一定的要求, 才能保障系统的多状态、多功能的特性. 换句话说, 在非确定的条件下, 设计实际起作用的系统时应当预先考虑更多的办法. 这项研究有几个方向.

其中之一是基于假设系统 (通常是线性的) 的参数在一定区间上变化但不存在控制. 这样的系统得到区间动力系统的称呼. 它的运动稳定性的估计是用特征方程及其推广的方法. 关于这个方向的研究成果可参看文献 Šiljak[1] 的综述.

在许多文献中, 运用李雅普诺夫函数方法的思想研究了区间系统.

另一个方向是与研究具有控制的系统的动力学相关, 即希望运用外部扰动的方法达到具有非精确参数值的系统的动力学性质. 同时既可运用代数方法, 也可运用定性的方法分析区间稳定性. 在这个方面要提 H_∞- 控制方法. 这个方法与 Riccati 代数方程的解法紧密联系. 在这个方面对 Riccati 方程的作用的推广与许多成果可参看文献 Bittanti, Laub, Willems[1].

前不久文献 Boyd et al[1] 阐述了在系统理论中产生的许多问题, 包括 H_∞- 控制非精确线性系统, 都可以转向去研究线性矩阵不等式.

这个方法与文献 Якубович[1] 等的成果密切相关. 对于线性微分包含, 这个方法被详细研究且在文献 Boyd et al[1] 中介绍. 其中有

(a) 在线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + B_w(t)w$$

中, 非精确参数用

$$[A(t), B_w(t)] \in \mathrm{Co}\{[A_1, B_{w_1}], \cdots, [A_L B_L]\}$$

来规定, 其中 CoS 是集合 $S \subset R^n$ 的凸壳, 并定义为

$$\mathrm{Co}S \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i | x_i \in S, p \geqslant 0 \right\}.$$

(b) 在系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + B_p p + B_w w, \quad p = \Delta(t)q, \quad q = C_q x$$

中, 非精确参数用范数

$$\|\Delta(t)\| \leqslant 1$$

来限定.

(c) 在线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + B_p p + B_w w, \quad p_i = \delta_i(t)q_i, \quad q = C_q x$$

中, 非精确系统按模 $|\delta_i(t)| \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n_q$ 限定.

在这些研究中, 一般是寻求非精确的扰动运动方程组的零解稳定或渐近稳定的充分 (有时也是必要) 条件.

分析这类系统所使用的有效方法之一是李雅普诺夫函数方法, 既有纯量李雅普诺夫函数方法 (参看文献 Corless 和 Leitmann[1,2], Gutman[1], Corless[1], Leitmann[1,2], Rotea 和 Khargonekar[1] 等), 也有向量李雅普诺夫方法 (参看文献 Chen[1]).

因此, 建立含有非精确参数值系统 (无论是可控的, 还是无控制的) 的稳定性理论是在非线性动力学与系统理论中的一个现代研究的迫切问题.

含非精确 (变化的) 参数的系统有两个一般的稳定性的概念.

1.1 参数稳定性

在含有物理参数的实际系统中, 参数的取值在系统起作用的过程中可能变化. 假定在过程或系统的数学模型中, 这种现象得到完全相符的反映. 区别于系统的参

数是固定的情况, 变化的某些参数 (或一个参数) 将导致出现系统的新的平衡点. 这个事实不允许直接运用一般采用的方法, 如常见的系统的唯一平衡状态的情形, 来分析稳定性.

考虑到这种情况, 根据文献 Ikeda, Ohta 和 Šiljak[1], 可以这样叙述参数稳定的概念.

考虑时不变系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, \alpha), \tag{1.1}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是系统 (1.1) 在时刻 t 时的状态, $\alpha \in R^d$ 是向量物理参数, $f \in C(R^n \times R^d, R^n)$ 是足够光滑的函数. 且对任何 $\alpha \in R^d$ 与在 $t_0 = 0$ 时的状态 x_0, 系统 (1.1) 存在唯一解 $x(t; x_0, \alpha) = x(t, \alpha)$.

假定对于参数 α 的某个名义上的值 α^* 存在系统 (1.1) 的平衡状态 x^*, 即

$$f(x^*, \alpha^*) = 0, \tag{1.2}$$

同时 x^* 是稳定的.

设参数 α 的值从 α^* 变化到另一个值. 此时将产生一系列对系统 (1.1) 定性分析的问题:

① 系统 (1.1) 存在其新的平衡状态 x^l 吗? 若存在, 它们位于 x^* 多远?

② 如果平衡状态 x^l 存在且是稳定的, 那么平衡状态 x^* 的稳定性与这个稳定性是同类型吗?

③ 当参数值从 α^* 变到 α 时, 伴随着系统 (1.1) 的平衡状态从 x^* 变为 x^l 会失掉稳定性吗?

这些问题的答案可以在系统 (1.1) 的参数稳定性的概念中找到.

考虑平衡状态 $x^l: R^d \to R^n$ 作为向量参数的函数: $x^l = x^e(\alpha), \alpha \in R^d$. 引入下述定义.

定义 1.1 系统 (1.1) 对参数值 $\alpha^* \in R^d$ 是渐近稳定的, 如果存在参数值 α^* 的开邻域 $N(\alpha^*)$, 使对任何 $\alpha \in N(\alpha^*)$ 满足条件:

(a) 存在平衡状态 $x^e(\alpha) \in R^n$;

(b) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$, 使由条件

$$\|x_0 - x^e(\alpha)\| < \delta \tag{1.3}$$

得出估计式

$$\|x(t; x_0, \alpha) - x^e(\alpha)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in R_+. \tag{1.4}$$

定义 1.2 系统 (1.1) 对参数值 $\alpha^* \in R^d$ 是渐近参数稳定的, 如果

(a) 对于参数 α 的值 α^* 系统 (1.1) 是参数稳定的;

(b) 对于所有 $\alpha \in N(\alpha^*)$, 存在数 $\mu(\alpha) > 0$, 使由条件

$$\|x_0 - x^e(\alpha)\| < \mu \tag{1.5}$$

得极限式

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, \alpha) = x^e(\alpha). \tag{1.6}$$

如果对任何初值 $x_0 \in R^n$ 与 $\mu, \mu \to \infty$, 式 (1.6) 成立, 那么系统 (1.1) 是全局渐近参数稳定的.

少量文献在定义 1.1 与定义 1.2 中允许考虑参数区域 $\rho \subset R^d$ 的估计, 使系统的运动的参数稳定性具有确定的形式.

如果系统 (1.1) 不具有在定义 1.1(或 1.2) 所指出的稳定性类型, 那么它是参数不稳定的 (或渐近参数不稳定的).

因此, 为研究系统 (1.1), 在与定义 1.1(或 1.2) 相关的前后文中必须首先确定对任何 $\alpha \in \bar{B}(\alpha^*, q)$ 存在 $x^l(\alpha) \in \bar{B}(x^*, r)$ 的条件, 其中 $\bar{B}(x^*, r) = \{x \in R^n : \|x - x^*\| \leqslant r, r > 0\}$ 且

$$\bar{B}(\alpha^*, q) = \{\alpha \in R^d : \|\alpha - \alpha^*\| \leqslant q, q > 0\}.$$

然后才可运用相应的稳定性分析的方法, 特别是文献中的李雅普诺夫直接方法.

参数稳定性的预见性概念得到某些发展与运用. 特别是用基于纯量与向量李雅普诺夫函数的李雅普诺夫直接方法来研究系统 (1.1) 的参数稳定性问题, 得到了非精确拟线性系统二次稳定的条件 (参看文献 Ohta 和 Šiljak[1]), 同时对系统参数的变化用某个含有从紧致集合中取值的未知元素的矩阵来建模. 在文献 Wada, Ikeda, Ohta 和 Šiljak[1] 中根据 B.M.ПоnoB(B.M. 波波夫) 准则分析了具有多输入/输出的傅里叶系统的参数绝对稳定性. 在文献 Silva 和 Dzul[1] 中根据对缓慢与快速变量的比较原理研究了一类可控扰动系统的参数绝对稳定性.

覆盖这个方向的研究成果是根据矩阵值李雅普诺夫函数 (参看文献 Martynyuk 和 Miladzhonov[1]) 分析含非古典参数扰动的系统的稳定性所取得的.

1.2　关于不变的可移动集合的稳定性

运动关于可移动不变集合的稳定性是另一个感兴趣的问题 (参看文献 Lakshmikantham 和 Vatsala[1]). 在这个提法中, 系统参数的非精确性反映到某个集合的可移动性, 这就要研究非精确系统 (1.7) 的解的性质:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.7}$$

其中 $x \in R^n, t \in \mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty), t_0 \in \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i \subseteq R, f \in C(\mathcal{T}_0 \times R^n \times R^d, R^n)$, 参数 $\alpha \in S \subseteq R^d, d \geqslant 1$, S 是紧致集合, 表示所研究系统的非精确性. $x(t,\alpha) = x(t; t_0, x_0, \alpha)$ 是对任何 $\alpha \in S \subseteq R^d$ 系统 (1.7) 具有初始条件 (t_0, x_0) 的解.

同时研究系统 (1.7) 的解关于可移动集合 $A(r)$ 的稳定性, 其中

$$A(r) = \{x \in R^n : \|x\| = r(\alpha)\}, \tag{1.8}$$

$r(\alpha) > 0, r(\alpha) \to r_0 (r_0 = \text{const} > 0)$, 当 $\|\alpha\| \to 0$; 且 $r(\alpha) \to +\infty$, 当 $\|\alpha\| \to +\infty$.

下面指出, 给定定义集合 $A(r)$ 的函数 $r(\alpha)$ 与综合系统的运动性质有关. 在特殊情况下, 这个函数可取

(a) $r(\alpha) = \exp(\|\alpha\|), 0 \leqslant \|\alpha\| < +\infty$,

(b) $r(\alpha) = \ln[\exp(\|\alpha\|)], 0 \leqslant \|\alpha\| < +\infty$.

由此得到: 在情形 (a) 中, 当 $\|\alpha\| \to 0$ 时, $r(\alpha) \to 1$; 在情形 (b) 中, 当 $\|\alpha\| \to 0$ 时, $r(\alpha) \to 0$.

从物理学的观点看, 情形 (a) 对应于系统 (1.7) 的动力学性质, 在含非精确给定参数的系统中具备这些性质应当存在极限环.

情形 (b) 则对应另一种情况: 在实际系统中非精确参数消失了, 而把所研究的稳定性问题还原为研究平衡状态 $x = 0$ 的古典提法.

还要指出, 研究系统 (1.7) 关于集合

$$\bar{A}(r) = \{x \in R^n : \|x\| \leqslant r(\alpha)\}$$

的运动, 包括情形 $r(\alpha) \to r_0 (r_0 = \text{const})$, 是系统 (1.7) 的解的吸引区域的估计问题.

区别于文献 Lakshmikantham 和 Vatsala[1], 集合 $A(r)$ 的定义可以考虑含非精确参数值的系统 (1.7), 它的线性近似可能不含有非精确参数. 而此文献实际上是对含非精确参数值的非线性系统叙述了结论, 或 (参看文献 Skowronski[1]) 系统中线性近似与非精确参数一起消失.

本书将根据传统的或新的方法给出某些类型的含非精确参数值的方程组的解的稳定性分析的论断.

第 2 章　非精确系统的李雅普诺夫直接方法

本章将介绍书中要用到的李雅普诺夫直接方法的推广, 包括如下几个方面:

(1) 把李雅普诺夫直接方法推广到区别于常微分方程组的方程组.

(2) 对古典纯量李雅普诺夫函数及其关于运动方程组的导数的要求减弱.

(3) 介绍新的辅助李雅普诺夫函数类.

本书中分析的对象是某些具有非精确参数值的非线性与线性方程组 (或简称非精确的被确定的系统).

本书在上述三个方面的推广, 主要是运用矩阵值、向量与纯量李雅普诺夫函数与比较原理相结合的方法, 这些方法目前已有了深入细致的研究.

下面将引入运动稳定性的一般定义并在运用到具体各章中所研究的系统时给予具体解释.

2.1　问题的提法与辅助结论

研究力学系统, 它的运动用微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

描述, 其中 $x(t) \in R^n, t \in \mathcal{T}_0 = [t_0, +\infty), t_0 \in \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i \subseteq R$ 与 $f \in C(\mathcal{T}_0 \times R^n \times R^d, R^n)$, 参数 $\alpha \in S \subseteq R^d$ 是方程组 (2.1) 的非精确的参数, 这里 S 是列紧的.

根据文献 Leitmann[1] 与 Chen[1] 的研究, 参数 α 可解释为以下几种情形:

(1) 可以表示系统的任何一个物理参数的非精确值或外部扰动的估值.

(2) 可以是一个把 R 映射到 R^d 的函数且表示包含在一个子系统对另一个子系统的作用之中的非精确测量的值.

(3) 可以是一个把 $\mathcal{T}_0 \times R^n$ 映射到 R^d 的函数且表示所研究的力学系统的非线性因素, 这些因素很难达到精确测量.

(4) 可以是上述对系统中存在的任何不精确性的简单指标.

(5) 可以是情形 (1)~(3) 的各种配合.

假设已知函数 $r = r(\alpha) > 0$ 满足条件: 当 $\|\alpha\| \to 0$ 时, $r(\alpha) \to r_0 (r_0 = \mathrm{const})$ 且当 $\|\alpha\| \to +\infty$ 时, $r(\alpha) \to +\infty$. 在欧几里得空间 $(R^n, \|\cdot\|)$ 中定义可移动集合

$$A(r) = \{x \in R^n : \|x\| = r(\alpha)\}, \tag{2.2}$$

且假定对任何 $\alpha(\neq 0) \in S \subseteq R^d$, 集合 $A(r)$ 非空.

定义 2.1 称集合 $A(r)$ 是系统 (2.1) 的可移动不变集合, 如果对每一个 $x_0 \in A(r)$ 与系统 (2.1) 的在某个区间 $J \subset \mathcal{T}_0$ 上有定义的所有未延拓的解 $x(t,\alpha) = x(t;t_0,x_0,\alpha), x(t_0;t_0,x_0,\alpha) = x_0$, 满足包含 $x(t,\alpha) \in A(r)$ 对每个 $t \in J$ 及所有 $\alpha(\neq 0) \in S \subseteq R^d$ 成立.

注 2.1 如果系统 (2.1) 实质上是非线性的 (没有线性近似), 那么可设当 $\|\alpha\| \to 0$ 时, $r(\alpha) \to 0$, 且集合 $A(r)$ 在零点收缩.

注 2.2 如果 $\|r(\alpha)\| \to +\infty$ 时 $r(\alpha) \to +\infty$, 那么集合 $A(r)$ 无限增大.

下面引入关于可移动不变集的某些运动稳定性的定义.

定义 2.2 对于系统 (2.1) 的运动的可移动集合 $A(r)$,

(1) 关于集合 $\mathcal{T}_i \subset R$ 是稳定的, 当且仅当对于给定的 $r(\alpha), \varepsilon > 0$ 与 $t_0 \in \mathcal{T}_i$, 存在 $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$, 使当

$$r(\alpha) - \delta < \|x_0\| < r(\alpha) + \delta$$

时, 系统 (2.1) 的运动满足估计

$$r(\alpha) - \varepsilon < \|x(t,\alpha)\| < r(\alpha) + \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{T}_0$ 与 $\alpha \in S \subseteq R^d$ 成立.

(2) 关于集合 $\mathcal{T}_i$ 是一致稳定的, 当且仅当满足定义 2.2 的条件 (1), 且对任何 $\varepsilon > 0$ 对应有满足定义 2.2 的条件 (1) 的最大值 δ_{M}, 使得

$$\inf[\delta_{\mathrm{M}}(t,\varepsilon) : t \in \mathcal{T}_i] > 0.$$

(3) 关于集合 $\mathcal{T}_i$ 是全局稳定的, 当且仅当满足注 2.2 的条件与具有函数

$$\delta_{\mathrm{M}}(t,\varepsilon) \to +\infty, \quad \varepsilon \to +\infty, \quad \forall t \in \mathcal{T}_i$$

的定义 2.2 的条件 (1).

(4) 关于集合 $\mathcal{T}_i$ 是一致全局稳定的, 当且仅当满足定义 2.2 的条件 (2) 与条件 (3).

在定义 2.2 中可以去掉“关于集合 $\mathcal{T}_i$”, 当且仅当 $\mathcal{T}_i = R$.

定义 2.3 对于系统 (2.1) 可移动集合 $A(r)$,

(1) 关于集合 $\mathcal{T}_i$ 是吸引的, 当且仅当对于给定的函数 $r(\alpha)$ 与 $t_0 \in \mathcal{T}_i$, 存在 $\delta(t_0) > 0$ 且对任意 $\zeta > 0$, 存在 $\tau(t_0,x_0,\zeta) \in [0,+\infty)$, 使由条件

$$r(\alpha) - \delta < \|x_0\| < r(\alpha) + \delta$$

得出估计式

$$r(\alpha) - \zeta < \|x(t,\alpha)\| < r(\alpha) + \zeta$$