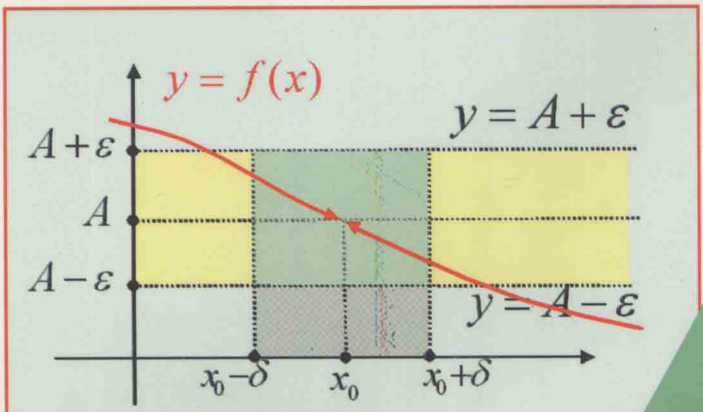
全国医药卫生类高职高专规划教材

供高职高专医药卫生类各专业使用

数学

主编 高焕江



第四军医大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学/高焕江主编. —西安：第四军医大学出版社，2005.8
ISBN 7－81086－201－4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 高…　Ⅲ. 医用数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077844 号

数　学

主　　编　高焕江
责任编辑　郭国明　王连昌　张新月
出版发行　第四军医大学出版社
地　　址　西安市长乐西路 17 号（邮编：710032）
电　　话　029－83376765
传　　真　029－83376764
网　　址　http://press.fmmu.sn.cn
印　　刷　河南东方制图印刷有限公司
版　　次　2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　16.25
字　　数　374 千字
书　　号　ISBN 7－81086－201－4/R·147
定　　价　22.00 元

出版说明

为进一步深化医药卫生类高职高专教育教学改革，推动高职高专教育的发展，提高教学质量，进一步适应卫生事业改革和发展的需要，满足经济和社会发展对医学人才的需求，根据《中国医学教育改革和发展纲要》和教育部《关于医药卫生类高职高专教育的若干意见》及《关于制定 <2004～2007 年职业教育教材开发计划> 的通知》，在教育部有关部门的支持和指导下，我们组织有关专家，用了近一年的时间，在全国 10 多个省市，对医学高职高专教育的培养目标和模式、课程体系、教学内容、教学计划和大纲、教学方法和手段、教学实践环节、考核标准等方面，进行了广泛而深入的调研。

在调研的基础上，召开了医药卫生类高职高专教育教学研讨会、教材编写论证会、教学大纲审定会和主编人会议，确定了教材编写的指导思想、原则和要求，组织全国 10 多个省市医学院校的一线教师，吸收了最新的医学高职高专教育教学经验和成果，编写了这套教材。本套教材充分体现了以培养目标和就业为导向，以职业技能培养为根本的编写指导思想，突出了思想性、科学性、先进性、可读性和适用性的编写原则，较好地处理了"三基"关系，高等教育与初等教育对接的关系，学历教育与职业认证、职业准入的关系。

本套教材编写了临床医学、中西医结合、护理三个专业的基础课、专业课 50 余种，供医药卫生类高职高专学生使用。

全国医药卫生类高职高专规划教材
编写指导委员会
2005 年 6 月

前　言

根据教育部高职高专教学改革和教材建设的指示精神，受第四军医大学出版社委托，我们编写了这本高等职业技术教育《数学》教材.在编写过程中，我们以《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》为依据，以“够用为度 实用为先”的原则安排教学内容；在内容编排上注重基础知识、基本理论的阐述，适当降低了理论难度，尽量避免了繁琐的理论推导；注重阐明数学知识的实际应用价值，加强数学应用、数学建模意识的渗透；叙述上力求简明具体、重点突出.

本教材分八章编写，教学时数约为108课时，供医药卫生类高职高专学生使用。

教材1~6章以初等数学为主，内容包括：集合与不等式、函数、三角函数、平面向量、排列组合二项式定理、概率初步、数列与数列的极限.7~8章以微积分学为主，内容包括：函数的极限、函数的连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及简易微分方程.由于医学高职高专大多数专业均开设预防医学课，为避免教学内容重复设置，本书没有编写统计学内容.每节后设有习题，每章后配有复习题.题目的难易程度考虑到了目前五年制高职学校学生的实际情况.本教材可作为医药卫生类五年制高等职业教育公共基础课数学教材使用.由于后两章是高等数学内容，因此本教材也可作为高等医学专科学校三年制普通专科有关专业(如药学、医学影像技术)的小课时高等数学教材使用.

参加本教材编写工作的老师及分工情况如下：第一章由罗静莲编写；第二章由吕晶编写；第三章由厉从志编写；第四章由沈莉兵编写；第五章由姚峰编写；第六章由李兆强编写；第七章由高焕江编写；第八章由万志超编写.

本书的编写工作得到了上述几位作者所在学校有关领导的支持和帮助.

第四军医大学王连昌教授在百忙中审阅了书稿，并提出了许多中肯的意见。

由于编者对高等职业教育的理解及学术水平有限，加之编写时间仓促，难免有不妥之处，敬请使用本教材的广大师生指正，以便做进一步的修改和完善.

编　者

2005年5月

目 录

第一章　集合与不等式

【学习要点】

本章主要学习要点包括集合及其表示方法、集合间的关系、集合的运算、充分必要条件、不等式的概念、不等式的性质以及不等式的解法.集合理论是近、现代数学的一个重要基础.一方面,许多重要的数学分支都建立在集合理论的基础上;另一方面,集合及其理论所反映的数学思想在越来越广泛的领域中得到应用.集合的初步知识与充分必要条件以及不等式的求解联系密切,它们是学习、掌握和使用数学语言的基础.

第一节　集合

一、集合及其表示方法

1. 集合的概念

首先考察以下几组对象:

(1)某卫生学校的全体学生;

(2)抛物线 $y=x^2+1$ 上的所有点;

(3)所有的等腰三角形;

(4)组成盐酸金霉素滴眼液的药物成分;

(5)小于 10 的所有正偶数.

它们分别是由一些人、一些点、一些图形、一些药物成分、一些数的全体组成的.

一般地,把具有某种公共属性的一些对象的全体叫做集合.构成集合的每一个对象都叫做这个集合的元素.例如,(1)是由某卫生学校的全体学生组成的集合,其中这个学校的每一位学生都是这个集合的元素.又如(5)是由小于 10 的正偶数构成的集合,其中 2、4、6、8 就是构成这个集合的元素.

通常用大写的英文字母 A、B、C…等表示集合,用小写的英文字母 a、b、c…等表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作:$a\notin A$.

关于集合的概念,再作如下说明:

(1)对于一个给定的集合,集合中的元素都是确定的.就是说,根据集合的元素所具有的属性,可以判断任何一个对象是或不是这个集合的元素.例如,由小于10的正偶数的全体构成的集合,显然2、4、6、8都是这个集合的元素,而1、3、5、7都不是这个集合的元素.由一些属性不明确的对象不能构成集合.例如,某卫生学校护士一班高个子同学的全体,就不能构成集合.这是因为没有规定多高才算是“高个子”,因而“高个子同学”不具确定性.

(2)对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的.就是说,集合中的任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入同一个集合,只能算作一个元素.

由数构成的集合简称数集.下面是一些常用的数集及其记法.

全体非负整数的集合通常简称为非负整数集,记作 N;

全体正整数的集合称为正整数集,记作 N_+;

全体整数的集合称为整数集,记作 Z;

全体有理数的集合称为有理数集,记作 Q;

全体实数的集合称为实数集,记作 R.

2. 集合的表示方法

集合的表示方法,常用的有列举法和描述法.

(1)列举法:把集合的元素一一列出,写在大括号内表示集合的方法,叫做列举法.

例如,由数2、3、5、7组成的集合,可表示为$\{2,3,5,7\}$.

用列举法表示一个集合时,不必考虑元素的前后顺序,并且集合中的每个元素不能重复出现.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法.其一般形式是$\{x \mid p(x)\}$,其中 x 表示这个集合的元素的一般形式,竖线右边的 $p(x)$表示这个集合元素的共同属性.

例如,由不等式 $2x-1\geqslant 3$ 的所有解组成的集合(即不等式 $2x-1\geqslant 3$ 的解集)可表示为$\{x \mid 2x-1\geqslant 3, x\in R\}$;由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有点组成的集合可表示为$\{(x,y) \mid y=x^2+1, x\in R\}$;由数0、1、2、3、4组成的集合可表示为$\{x \mid x<5, x\in N\}$

有时为了方便,有些集合用描述法表示时,可以省去竖线及其左边的部分.例如,所有梯形组成的集合可表示为{梯形}.

在某种约定下,x 的取值集合可以省略不写.如$\{x \mid 2x-1\geqslant 3, x\in R\}$和$\{(x,y) \mid y=x^2+1, x\in R\}$可分别记为$\{x \mid 2x-1\geqslant 3\}$和$\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$.

a 与$\{a\}$的含义是完全不同的.a 表示一个元素;$\{a\}$表示一个集合,这个集合只含一个元素 a,且 $a\in\{a\}$.

例1 用适当方法表示下列集合:

(1)小于10的所有质数;

(2)方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集;

(3)由直线 $y=3x+2$ 上所有点组成的集合;

(4)由大于1且小于10的有理数的全体组成的集合;

(5)由大于3的实数的全体组成的集合.

解:(1)列举法$\{2,3,5,7\}$

(2)列举法$\{1,2\}$或描述法$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

(3)描述法$\{(x,y) \mid y=3x+2\}$

(4)描述法$\{x \mid 1<x<10, x\in \mathrm{Q}\}$

(5)描述法$\{x \mid x>3\}$

3. 集合的分类

含有有限个元素的集合,叫做有限集.例如$A=\{1,2,3,4,5\}$.

含有无限个元素的集合,叫做无限集.例如$\{x \mid 2x-1\geqslant 3\}$、$\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$都是无限集.

只含有一个元素的集合,叫做单元素集合.例如方程$x-1=0$的解集$\{1\}$.

不含任何元素的集合,叫做空集.空集通常记作$\varnothing$.例如,方程$x^2+1=0$的解集可记为$\{x \mid x^2+1=0\}=\varnothing$.

显然,单元素集合和空集都是有限集.

为了形象地表示集合,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部区域表示一个集合,即人们常说的用韦恩图表示集合.

例如,图1-1表示一个集合A;图1-2表示集合$\{1,2,3,4,5\}$.

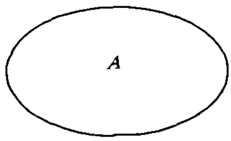


图1-1

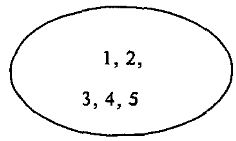


图1-2

注意　0、$\{0\}$、$\varnothing$、$\{\varnothing\}$四者的区别.

二、集合之间的关系

1. 子集

观察集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$.容易看出,集合A的任何一个元素都是集合B的元素,这时我们说集合B包含集合A.

一般地,对于两个集合A与B,如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素,那么集合A叫做集合B的子集,记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$),读作"A包含于B"(或"B包含A").

当集合A不是集合B的子集时,记作$A\not\subseteq B$(或$B\not\supseteq A$).

对于任何一个集合A,因为它的任何一个元素都属于集合A本身,所以$A\subseteq A$,也就是说任何一个集合都是它本身的子集.

规定:空集是任何集合的子集.即对于任何集合A都有$\varnothing\subseteq A$.

如果集合A是集合B的子集,并且B中至少有一个元素不属于集合A,那么集合A叫做集合B的真子集.记作$A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$),读作"A真包含于B"(或"B真包含A").

例如,上例中的$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,A既是B的子集,又是B的真子集,即$A\subsetneqq B$.

根据真子集定义,可以知道,空集是任何非空集合的真子集.

为了形象地说明集合与集合之间的包含关系,这里仍可以借助韦恩图来表示.图1-3

表示集合 A 是集合 B 的真子集.

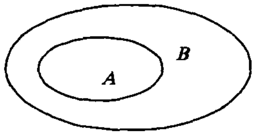


图 1-3

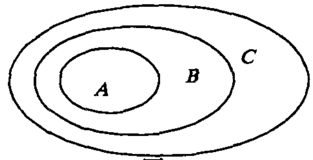


图 1-4

根据子集、真子集的定义可推知:

对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq$,$B\supseteq C$,则 $A \subsetneqq AC$.

对于集合 A、B、C,若 $A \subsetneqq B$,$B \subsetneqq C$,则 $A \subsetneqq C$.如图 1-4 所示.

2.集合的相等

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq$且 $B\supseteq A$,那么就称这两个集合相等,记作 $A=B$,读作"A 等于 B".

例如,设集合 $A=\{x \mid x^2+5x-6=0\}$,$B=\{-6,1\}$,则 $A=B$.

例 2 写出集合 $A=\{0,1,2\}$的所有子集、真子集.

解:集合 A 的子集有$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$.由真子集定义可知,在上述子集中除去集合 A 本身,其余子集都是 A 的真子集.

例 3 试确定下列每组两个集合间的包含关系:

(1)$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{2,5\}$;

(2)$C=\{-1,1\}$,$D=\{x \mid x^2=1\}$;

(3)$P=\{$偶数$\}$,$Z=\{$整数$\}$;

解:(1)$A \supsetneqq B$　　(2)$C=D$　　(3)$P \subsetneqq Z$

例 4 设 $A=\{x \mid x\leqslant 4\}$,$B=\{x \mid -3<x\leqslant 3\}$,指出集合 A 与 B 的关系.

解:由图 1-5 可以看出集合 B 是集合 A 的真子集,即 $B \subsetneqq A$.

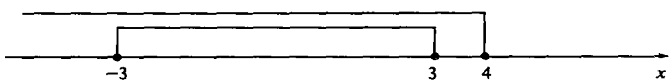


图 1-5

三、集合的运算

1. 交集

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,$C=\{3,4\}$,显然,集合 C 是由所有属于集合 A 并且属于集合 B 的元素(即 A 与 B 的所有公共元素)所组成的.

一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,叫做集合 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

两个集合的交集,可用图 1-6 中的阴影部分表示.

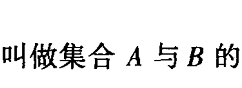


图 1-6

由交集的定义可以推出,对于任何集合 A 与 B,都有

$A\cap A=A$,　　$A\cap\varnothing=\varnothing$,　　$A\cap B=B\cap A$.

例 5 设集合 $A=\{x \mid x<5, x\in \mathrm{N}\}$, $B=\{x \mid -3<x\leqslant 2, x\in \mathrm{Z}\}$,求 $A\cap B$

解:$\because A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$

$\therefore A\cap B=\{0,1,2,3,4\}\cap\{-2,-1,0,1,2\}=\{0,1,2\}$

例 6 设集合 $A=\{x \mid x>-2\}$, $B=\{x \mid x<3\}$,求 $A\cap B$.

解:$A\cap B=\{x \mid x>-2\}\cap\{x \mid x<3\}=\{x \mid -2<x<3\}$

如图 1-7 所示.

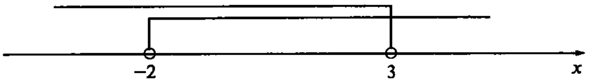


图 1-7

例 7 设 $A=\{$等腰三角形$\}$, $B=\{$直角三角形$\}$,求 $A\cap B$.

解:$A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}=\{$等腰直角三角形$\}$.

例 8 设 $A=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}$, $B=\{(x,y) \mid 3x+2y=7\}$,求 $A\cap B$.

解:$A\cap B=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y) \mid 3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}$$

$$=\{(1,2)\}$$

2. 并集

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, $C=\{1,2,3,4,5\}$. 显然,集合 C 是将集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起(相同元素只取一次)所组成的.

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B".

即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,可用图 1-8 中的阴影部分表示 A 与 B 的并集.

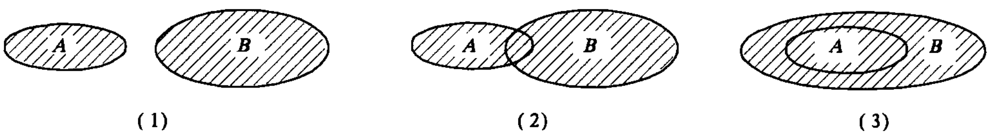


图 1-8

由于集合的元素具有互异性,因此在求两个集合的并集时,同时属于 A 与 B 的元素,在并集中只能出现一次.

由并集定义容易推出,对于任何集合 A, B,都有

$A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cup B=B\cup A$.

例 9 设 $A=\{$锐角三角形$\}$, $B=\{$钝角三角形$\}$,求 $A\cup B$.

解:$A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}=\{$斜三角形$\}$.

例 10 设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$, $B=\{x \mid 1<x<3\}$,求 $A\cup B$、$A\cap B$.

解:$A\cap B=\{x \mid -1<x<2\}\cap\{x \mid 1<x<3\}=\{x \mid 1<x<2\}$

$A\cup B=\{x \mid -1<x<2\}\cup\{x \mid 1<x<3\}=\{x \mid -1<x<3\}$.

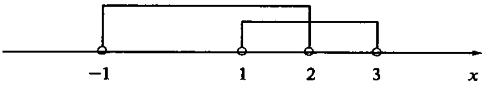


图 1-9

如图 1-9 所示.

例 11 已知 Q 是有理数集,Z 是整数集,求(1)Q∪Z,(2)Q∩Z

解:(1)Q∪Z = Q ,(2)Q∩Z = Z

3.补集

在研究集合与集合之间的关系时,在某种情况下,这些集合都是某一个给定的集合的子集,这个给定的集合我们把它看作一个全集,常用符号 U 表示.也就是说,全集包含了我们所要研究的有关的几个集合的所有元素.例如,在研究数集时,常常把实数集 R 作为全集.

一般地,设 U 为全集,集合 A 是全集 U 的一个子集(即 $A \subseteq U$),则由全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在 U 中的补集,记作 $C_U A$,读作"A 在 U 中的补集".集合 A 在 U 中的补集 $C_U A$ 可用图 1-10 中的阴影部分表示.

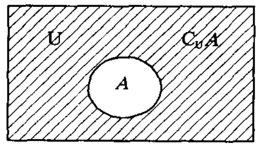


图 1-10

由补集定义容易推出,对于全集 U 的任何子集 A,都有:$A \cup C_U A = U$,$A \cap C_U A = \varnothing$,$C_U(C_U A) = A$.

例 12 设全集 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$,$A = \{3,4,5\}$,求

(1)$C_U A$　　(2)$A \cap C_U A$　　(3)$A \cup C_U A$

解:(1)$C_U A = \{1,2,6\}$,(2)$A \cap C_U A = \varnothing$,(3)$A \cup C_U A = U$

例 13 已知全集 $U = \{$实数$\}$,$Q = \{$有理数$\}$,求 $C_U Q$.

解:$C_U Q = \{$无理数$\}$

例 14 设全集 $U = R$,$A = \{x \mid -1 < x \leqslant 2\}$,求 $C_U A$.

解:$C_U A = \{x \mid x \leqslant -1$ 或 $x > 2\}$.

习题 1-1

1.下列各题中的对象能否组成一个集合.

(1)某卫生学校一年级新生的全体;

(2)某班学习好的学生的全体;

(3)充分接近于 1 的实数的全体;

(4)大于 10 的有理数的全体;

(5)中华人民共和国在某个时刻注册的公民的全体.

2.用适当符号填空.

(1)0 ____ N;　　(2) -3 ____ Z;

(3) $-\frac{2}{3}$ ____ Q;　　(4)$\sqrt{2}$ ____ R;

(5)π ____ Q;　　(6)0 ____ $\varnothing$.

3.用适当的方法表示下列集合.

(1)大于 3 且小于 11 的奇数的全体;

(2)小于 5 的实数的全体;

(3)方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解集;

(4)绝对值小于 3 的整数的全体；

(5)平方为 1 的数的全体；

(6)全体偶数；

(7)不大于 3 的有理数的全体.

4.写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集与真子集.

5.用适当符号填空.

(1)0 ____ $\{0\}$；　　(2)$\{0\}$ ____ $\varnothing$；

(3){菱形} ____ {正方形}；　　(4)a ____ $\{a,b,c\}$；

(5)$\{0,1\}$ ____ $\{1,0\}$；　　(6)$\{0\}$ ____ $\{0,1,2\}$；

(7)$\mathrm{N}\cup\mathrm{Z}$ ____ Q；　　(8)$\mathrm{R}\cap\mathrm{Q}$ ____ Z；

(9)$\{x \mid x>3\}$ ____ $\{x \mid x>-1\}$；　　(10)$\{x \mid x>4$ 或 $x<3\}$ ____ $\{x \mid x>4\}$.

6.已知集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,e,f\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

7.已知集合 $A=\{(x,y) \mid 2x-y=5\}$，$B=\{(x,y) \mid 3x+2y=7\}$，
求 $A\cap B$.

8.已知集合 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，求：

(1)$A\cap B$；　　(2)$A\cup B$.

9.已知全集 $U=R$，$A=\{x \mid x\leqslant 5\}$，求 C_UA.

10.已知全集 $U=\{\alpha \mid 0°<\alpha<180°\}$，$A=$\{锐角\}，$B=$\{钝角\}，求

(1)$C_UA\cap B$；　　(2)$C_UA\cup C_UB$；　　(3)$C_U(A\cup B)$.

11.全集 $U=Z$，$A=\{x \mid x=2k,k\in Z\}$，$B=\{x \mid x=2k+1,k\in \mathrm{Z}\}$，求

(1)$A\cup B$；　　(2)$A\cap B$；　　(3)C_UA；　　(4)C_UB.

12.已知全集 $U=R$，$A=\{x \mid -2\leqslant x<3\}$，求

(1)C_UA；　　(2)$C_UA\cap U$；　　(3)$C_UA\cup U$；

(4)$C_UA\cap A$；　　(5)$C_UA\cup A$.

第二节　充分必要条件

一、充分条件与必要条件

如果 $x=1$，可以推出 $x^2=1$.这时就说“$x=1$”是“$x^2=1$”的充分条件.

但如果 $x^2\neq 1$，$x=1$ 也就不成立了，这就是说 $x^2=1$ 是 $x=1$ 的必须的条件，即 $x^2=1$ 是 $x=1$ 的必要条件.

一般地，用 A、B 分别表示两件事，如果由 A 这件事成立，可以推出 B 这件事成立，即 $A\Rightarrow B$，那么我们称 A 是 B 成立的充分条件，同时称 B 是 A 成立的必要条件.也就是说，要使 B 成立，具备 A 就足够了，有 A 就有 B；而 B 成立，又是 A 成立必须的条件，没有 B 也就没有 A.

看以下例子：

(1) 如果两个三角形全等，那么它们的面积相等.所以“两个三角形全等”是“它们的

面积相等”的充分条件.而“它们的面积相等”是“两个三角形全等”的必要条件.

(2) 如果两个角是对顶角,那么这两个角相等,所以“两个角是对顶角”是“这两个角相等”的充分条件.而“这两个角相等”是“两个角是对顶角”的必要条件.

(3) 如果集合 $P=\varnothing$,M 表示任一集合,那么 $P\cap M=\varnothing$.所以“$P=\varnothing$”是“$P\cap M=\varnothing$”的充分条件.而“$P\cap M=\varnothing$”是“$P=\varnothing$”的必要条件.

二、充分必要条件

如果已经知道一个三角形有两个内角相等,那么这个三角形必为等腰三角形.反过来,如果一个三角形为等腰三角形,则其两个内角必相等.如果设 A 是“三角形的两个内角相等”,B 是“三角形为等腰三角形”.显然,由 A 可以推出 B,且由 B 也可以推出 A,也就是说 A 是 B 的充分条件,A 也是 B 的必要条件.像这种情况,我们称 A 是 B 的充分且必要条件.

一般地,若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,即 $A\Leftrightarrow B$,则称 A 是 B 的充分必要条件,简称充要条件.

显然,如果 A 是 B 的充要条件,B 也是 A 的充要条件.

例如,因为由 $|a-b|=0\Rightarrow a=b$.反过来,由 $a=b\Rightarrow |a-b|=0$,即 $|a-b|=0\Leftrightarrow a=b$,所以说 $|a-b|=0$ 是 $a=b$ 的充要条件.

例 1 指出下列各组问题中,A 是 B 的什么条件.

(1)a、$b\in \mathrm{R}$. $A: a=b$; $B: a^2=b^2$

(2)$A: x>3$; $B: x>5$

(3)$A: a>b$; $B: a+c>b+c$

(4)$A: x$ 是实数; $B: x$ 是有理数

解:(1)因为由 $a=b\Rightarrow a^2=b^2$,但由 $a^2=b^2$ 不一定推出 $a=b$,即仅有 $A\Rightarrow B$,所以 A 是 B 的充分条件.

(2)由于 $x>3$ 推不出 $x>5$,但 $x>5\Rightarrow x>3$.即仅有 $B\Rightarrow A$,所以 A 是 B 的必要条件.

(3)由 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$,而由 $a+c>b+c\Rightarrow a>b$,即 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,所以 A 是 B 的充要条件.

(4)由 x 是实数推不出 x 是有理数,但由 x 是有理数可以推出 x 是实数,即仅有 $B\Rightarrow A$,所以 A 是 B 的必要条件.

例 2 已知 p 是 q 的充分条件,s 是 r 的必要条件,p 是 s 的充要条件.判断 q 与 r 的关系.

解:根据已知可得 $p\Rightarrow q$, $r\Rightarrow s$, $p\Leftrightarrow s$

$\because r\Rightarrow s\Rightarrow p\Rightarrow q$

$\therefore r\Rightarrow q$

$\therefore r$ 是 q 的充分条件,q 是 r 的必要条件

注有些条件是充分的但不是必要的,有些条件是必要的但不是充分的,也有些条件既是充分的又是必要的,不论哪种情况,都要进行两方面判断,即先由 A 推 B,再由 B 推 A,然后才能得出结论.