工 程 数 学 丛 书

特殊函数与数学物理方程

（第二版）

王纪林　向光辉　编

上海交通大学出版社

工程数学丛书

特殊函数与数学物理方程

（第二版）

王纪林　向光辉　编

内 容 提 要

本书是在《特殊函数与数学物理方程》(1988 年上海交通大学出版社出版)的基础上，参照高等工业学校工程数学教学大纲，并根据教学中积累的经验及意见修改而成.

本书分为七章，以数学物理方程定解问题的常用解法为主体，它们分别为方程的导出及定解问题、分离变量法、初值问题、特殊函数、积分变换法、格林函数法以及差分法. 每章配有习题，书末附有习题答案. 本书可供高等理工科院校的各类专业用作教材，也可供工程技术人员参考和自学者选用.

图书在版编目(CIP)数据

特殊函数与数学物理方程/王纪林，向光辉编. —2 版. —上海：上海交通大学出版社，2000(2003 重印)

(工程数学丛书)

ISBN 7-313-00240-8

Ⅰ. 特… Ⅱ. ①王… ②向… Ⅲ. 数学物理方程 Ⅳ. 0175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 49531 号

特殊函数与数学物理方程

(第二版)

王纪林　向光辉　编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)

电话：64281208　出版人：张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂印刷　全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：7.625　字数：195 千字

1989 年 1 月第 1 版　2000 年 1 月第 2 版　2003 年 12 月第 7 次印刷

印数：17 051～20 100

ISBN 7-313-00240-8/O・034　定价：11.50 元

前　言

本书是在袁公英和陈茵编写的《特殊函数与数学物理方程》(1988年上海交通大学出版社出版)的基础上,结合多年来的教学实践,并参考了有关理工科院校的同类教材编写而成.

特殊函数和数学物理方程的内容非常丰富,作为一本理工科院校的工程数学的教材,需对其内容进行必要的选择,各种同类型的教材都为此作出了努力.本书主要介绍数学物理方程的一些基本概念及三类典型二阶线性偏微分方程定解问题的一些常用解法,以分离变量法为主,还有行波法、积分变换法、格林函数法、差分法等.特殊函数作为用分离变量法求解二维和三维定解问题的工具,介绍了贝塞尔函数和勒让德多项式的基本概念及性质.为了从“点源”的角度引出格林函数,本书在第6章中对δ-函数也作了一些简单的介绍.书中内容的安排主要是为了突出数学物理方程定解问题形式解的常用求解方法,其次也考虑到有利于教师安排教学和有助于学生尽快掌握所学的内容.当然这一切又都是按照高等工业学校工程数学教学大纲来安排的.

使用本书教学时数大约32~45个课时,书中标有“*”的内容可以略去而不影响后继内容.本书的第1章到第4章由王纪林编写,第5章到第7章由向光辉编写.在编写过程中,得到了许多同行和前辈们直接和间接的帮助与指正,编者在此致以最诚挚的谢意.

由于编者水平所限,书中一定有不少错误和缺点,敬请赐教.

编　者

1999年3月

目　　录

第 1 章　方程的导出及定解问题

数学物理方程(简称数理方程)是指在力学、物理学、工程技术等学科中经常提出的偏微分方程.本课程以典型的数理方程作为讨论对象,介绍求解数理方程的一些常用方法.

本章先就具体的物理现象,建立三类典型的方程,并提出相应的定解条件.然后对线性偏微分方程的叠加原理作一些介绍.

1.1　方程的导出

本节通过几个不同的物理模型,推导出数理方程中的三类典型方程.这些方程将作为以后各章中介绍数理方程常用解法时的主要讨论对象.

1.1.1　波动方程的导出

一维波动方程又称为弦振动方程.方程描述了一根拉紧的均匀柔软的细弦,在平衡位置附近作垂直方向的微小横向振动时弦上各点的运动规律.虽然这是一个古典的问题,但其推导过程对于初学者仍具启发性.

设弦长为 l,两个端点分别置于 x 轴的原点和 l 点,弦上各点的坐标记为 x.则弦振动时弦上各点的运动规律是坐标 x 和时间 t 的函数,记作 $u=u(x,t)$.

由假设知,弦是拉紧的均匀柔软的细弦,故其重量与其所受的张力相比可以忽略不计.弦上各点仅受张力 $T=T(x)$的作用且 T 的方向是沿着弦在该点的切线方向.弦上各点处的密度 $\rho=\rho(x)$

是常数,记作 ρ. 又弦是作微小振动,故 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小,于是 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比,可以忽略不计,在弦上任取一小段 $(x,x+\Delta x)$,其弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x=\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_x^{x+\Delta x}\mathrm{d}x = \Delta x.$$

这样可以认为在振动过程中,弦上任一小段都没有伸长.

取 x 轴为横轴, u 轴为纵轴建立直角平面坐标系,再取 $(x,x+\Delta x)$ 为弦上任一小段(图 1-1). 由于振动相对弦的位置是横向的,即仅 u 轴方向有位移而 x 轴方向无位移,由牛顿第二定律,得

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0, \qquad (1-1)$$

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 = \rho\Delta s\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}, \qquad (1-2)$$

其中 α_1,α_2 分别是弦土坐标为 $x,x+\Delta x$ 的点 M,N 处切线与 x 轴的夹角;式(1-2)中 $u(\bar{x},t)$ 是小段弦在重心处的位移. 由于振动是微小的,故 α_1,α_2 都很小,从而有

$$\cos\alpha_1 = 1-\frac{\alpha_1^2}{2!}+\frac{\alpha_1^4}{4!}-\cdots\approx 1,$$

$$\cos\alpha_2 = 1-\frac{\alpha_2^2}{2!}+\frac{\alpha_2^4}{4!}-\cdots\approx 1,$$

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}.$$

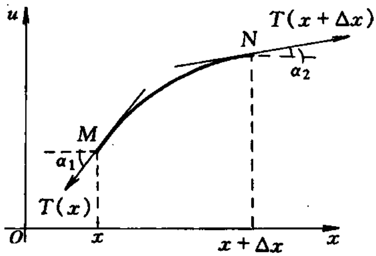

图 1-1

于是式(1-1)成为 $T(x+\Delta x) = T(x)$,亦即张力 T 是常数. 又由前知 $\Delta s \approx \Delta x$,故式(1-2)又成为

$$T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\ . \qquad (1-3)$$

利用微分中值定理,上式为

$$T\,\frac{\partial^2 u(x+\tau\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} \quad (0<\tau<1),$$

消去 Δx，令 $\Delta x \to 0$，则 $x+\tau\Delta x \to x, \bar{x} \to x$，故有

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

通常把该结果记作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a \text{ 是常数}), \tag{1-4}$$

其中 $a^2=T/\rho$. 式(1-4)即为弦的横向振动方程，又称弦的**自由振动方程**.

当弦在点 x 受到一个垂直于 x 轴的外力作用时，若所受外力的密度为 $F(x,t)$，则在弦的小段 $(x,x+\Delta x)$ 上受外力 $\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x$，在上述讨论中式(1-2) 和式(1-3) 分别表示为

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2-T(x)\sin\alpha_1+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x=\rho\Delta s\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2},$$

$$T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}.$$

利用微分中值定理，并令 $\Delta x \to 0$，得

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

记作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1-5}$$

其中 $a=T/\rho$；$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$，$f(x,t)$ 称为**自由项**. 式(1-5)为弦上各点 x 受垂直外力时的横向振动方程，又称为弦的**强迫振动方程**.

类似地，可导出二维波动方程(例如考察一张均匀紧绷的柔软薄膜作上下微小振动)和三维波动方程(例如考察弹性体的振动或

电磁波、声波的传播等),它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{1-6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1-7}$$

经常把波动方程统一表示为

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f,$$

其中 Δu 在式(1-5),(1-6),(1-7)中分别为 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,而 Δ 又称作拉普拉斯(Laplace)算子,在以上各式中 Δ 分别为 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$,$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

1.1.2 热传导方程的导出

热传导方程在研究具有扩散的物理现象中经常遇到,下面给出热传导方程的推导.

置温度分布不均匀的导热体 Ω 于坐标系 $Oxyz$ 中并对其加热.设函数 $u=u(M,t)$ 表示导热体 Ω 在点 $M(x,y,z)$ 处及时刻 t 的温度.在导热体内任取一微元 $\mathrm{d}\Omega$,它的表面记为 S,所包围的区域记为 V.

先考虑流入微元的热量.由传热学中的傅里叶(Fourier)实验定律,物体在无穷小时段 $\mathrm{d}t$ 内通过无穷小面积 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$,与物体温度沿曲面 $\mathrm{d}S$ 法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 成正比,即

$$\mathrm{d}Q=-k(M)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\ \mathrm{d}t,$$

其中 $k(M)$ 称为导热物体在点 $M(x,y,z)$ 处的热传导系数,它取正值.负号的出现是由于热量的流向与温度梯度 grad u 方向相

反，即如果 grad u 与曲面的法线成锐角时，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\operatorname{grad} \boldsymbol{n}$ 为正，则依 $\boldsymbol{n}$ 的方向越过曲面时温度要增加，而热流方向却与此相反，即从温度高的一侧流向温度低的一侧，故依 $\boldsymbol{n}$ 的方向越过曲面的热流量是负的. 因此从时刻 t_1 到 t_2 流入闭曲面 S 的总热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_S k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d} S\right) \mathrm{d} t .$$

再考虑微元 $\mathrm{d}\Omega$ 温度升高所需的热量. 在时段 (t_1, t_2) 中物体的温度从 $u(M, t_1)$ 变化到 $u(M, t_2)$ 应该吸收的热量为

$$\iiint_V c(M) \rho(M)(u(M, t_2)-u(M, t_1)) \mathrm{d} V,$$

其中 c 为比热容 /，ρ 为密度.

由热量守恒定律，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_S k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d} S\right) \mathrm{d} t=\iiint_V c \rho(u(M_1, t_2)-u(M, t_1)) \mathrm{d} V , \tag{1-8}$$

设函数 u 关于自变 x, y, z 具有二阶连续偏导数，关于自变量 t 具有一阶连续偏导数，利用奥氏公式，式(1-8) 可化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) \mathrm{d} V \mathrm{d} t=\iiint_V c \rho\left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d} t\right) \mathrm{d} V ,$$

交换积分次序，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V\left(c \rho \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) \mathrm{d} V \mathrm{d} t=0 .$$

由于 t_1, t_2 和区域 V 都是任意的，故有

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) . \tag{1-9}$$

式(1－9) 称为非均匀的各向同性体的热传导方程. 如果物体是均匀的,则 k,c,ρ 都是常数,记 $a^2 = k/c\rho$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (a\text{ 是常数}) . \tag{1-10}$$

式(1－10) 称为**齐次热传导方程**.

如果所考察的物体内部有热源(例如物体内通有电流或有化学反应等),则在热传导方程的推导中还需考虑热源的影响. 设在单位时间内单位体积产生的热量为 $F(M,t)$,则在考虑热平衡时,应该在式(1－8) 的左端增加一项

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V F(M,t)\mathrm{d}V\mathrm{d}t,$$

于是,相应于式(1－10) 的热传导方程可表示成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \tag{1-11}$$

其中 $f(x,y,z,t) = F(x,y,z,t)/c\rho$,式(1－11) 称为**非齐次热传导方程**.

利用拉普拉斯算子,式(1－10) 和式(1－11) 可简单地表示为

$$u_t = a^2\Delta u, \quad u_t = a^2\Delta u + f .$$

1.1.3 拉普拉斯(Laplace)方程的导出

拉普拉斯方程在自然现象的稳定过程和守恒过程的研究中经常遇到. 例如在热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t)$$

中,如果考察的是稳定状态的热传导,即函数 u 与时间 t 无关,记作 $u = u(x,y,z)$,则有 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$,从而方程可表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f_1(x,y,z,t), \tag{1-12}$$

其中 $f_1(x,y,z,t) = -f(x,y,z,t)/a^2$. 式(1－12)称为**非齐次拉**

普拉斯(Laplace)方程或泊松(Poisson)方程.特别当 $f_1(x,y,z,t)=0$ 时,即物体 Ω 内部无热源时,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ . \tag{1-13}$$

式(1-13)即为通常所说的**拉普拉斯方程**.

泊松方程和拉普拉斯方程又常记作 $\Delta u=f_1$ 和 $\Delta u=0$.

当方程中的函数为 $u=u(x,y)$时,二维的拉普拉斯方程又称作为**调和方程**,而满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的函数 $u=u(x,y)$被称为是**调和函数**,在复变函数课程中已讨论过.

1.2 定解条件

上节所讨论的是如何把一个具体问题所具有的一般物理规律用数学公式表示出来.例如,弦振动问题推导出来的弦振动方程表述了一切柔软均匀细弦作微小横向振动的共同规律,所以弦振动方程又称为弦振动问题的**泛定方程**.在方程的推导过程中,没有考虑弦的初始状态和弦所受的约束情况.如果不是泛泛地研究弦的振动,势必要考虑到弦所具有的特定条件,因为弦的初始状态和端点所处的物理条件不同,产生的影响也不同,从而弦的振动也不一样.因此对弦的振动问题而言,不仅要建立振动方程,还要列出弦所处的特定条件.对于热传导方程和拉普拉斯方程也是如此.列出的这些特定的条件应该准确地说明具体对象的初始状态或边界上的约束情况.用以说明初始状态的条件称为**初始条件**;用以说明边界上约束情况的条件称为**边界条件**.

1.2.1 初始条件

初始条件用以给出具体物理现象的初始状态.例如对于弦振

动问题,初始条件是指弦在开始振动时刻的位置和速度.如果以 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$分别表示 $t=0$ 时的初始位置和初始速度,则弦振动问题的初始条件可表示为

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \tag{1-14}$$

热传导问题的初始条件是指开始传热的时刻物体温度的分布情况.若以 $\varphi(M)$表示 $t=0$ 时物体内任意点 M 处的温度,则热传导问题的初始条件可表示为

$$u(M,t)|_{t=0}=\varphi(M). \tag{1-15}$$

泊松方程和拉普拉斯方程都是描述恒稳状态的,都与时间 t 无关,当然与初始状态无关,所以不提初始条件.

1.2.2 边界条件

边界条件是给出具体物理现象在边界上所处的物理情况.根据边界条件数学表达方式的不同,一般把边界条件分成三类.设 u 为未知函数,S 为物体的表面,则分类如下:

(1) 第一类边界条件

第一类边界条件是直接给出 u 在边界 S 上的数值,即

$$u|_S=f_1. \tag{1-16}$$

例如在弦振动问题上,若弦的两端是固定的,也就是说端点无位移,则其边界条件为

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 .$$

若弦的两端不是固定的,是按规律 $u_1(t)$,$u_2(t)$在运动,则其边界条件为

$$u|_{x=0}=u_1(t), u|_{x=l}=u_2(t) .$$

又如在热传导问题中,当物体与外界接触的表面温度 $\varphi(x,y,z,t)$已知,则其边界条件为

$$u|_S=\varphi(x,y,z,t) .$$

(2) 第二类边界条件

第二类边界条件是给出 u 沿 S 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = f_2 \quad . \tag{1-17}$$

例如，在弦振动问题中，弦的一端（例如在 $x = l$ 的一端）可以在垂直于 x 轴的直线上作自由的上下滑动，且不受垂直方向的外力，我们称这种端点为**自由端**. 在这一端点，边界上的张力沿垂直于 x 轴的方向的分量为零，因此，在方程的推导中可知 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\ .$$

当该点处的张力沿垂直于 x 轴方向的分量是 t 的一个已知函数 $\mu(t)$ 时，有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \mu(t)\ .$$

在热传导问题中，如果物体与周围介质处于绝热状态，即在表面 S 上热量的流速始终为零，则由方程推导过程可知有边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = 0\ .$$

当物体与外界接触的表面 S 上各单位面积在单位时间内流过的热量已知时，由傅里叶定律知，在 S 上有 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t} = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$，这实际上表示温度 u 沿外法线方向的方向导数是已知的，故此边界条件可表示为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = \mu(x, y, z, t)\ .$$

(3) 第三类边界条件

第三类边界条件是给出 u 以及 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 的线性组合在边界上的