

青年必备知识

奇妙

的数字

郑沙等 编

远方出版社



青年必备知识

奇妙的数字

郑沙 等/编



远方出版社

责任编辑:张阿荣

封面设计:冷 豫

青年必备知识 奇妙的数字

编 著 者 郑沙 等
出 版 社 远方出版社
社 址 呼和浩特市乌兰察布东路 666 号
邮 编 010010
发 行 新华书店
印 刷 北京旭升印刷装订厂
开 本 787×1092 1/32
字 数 4980 千
版 次 2004 年 11 月第 1 版
印 次 2004 年 11 月第 1 次印刷
印 数 1—3000 册
标准书号 ISBN 7—80595—992—7/G · 353
总 定 价 1080.00 元(本系列共 100 册)

远方版图书,版权所有,侵权必究。

远方版图书,印装错误请与印刷厂退换。

目录

第一章 数的源流.....	(1)
数的起源.....	(1)
罗马数字常识谈.....	(4)
十进制计数法.....	(7)
60 进制计数法.....	(10)
数的家族.....	(13)
阿拉伯数字的历史误会.....	(14)
最大和最小的数字.....	(15)
“0”的意义.....	(16)
小数的经历.....	(18)
最早的分数.....	(19)
最早发现的无理数.....	(20)
最早的负数.....	(21)
真实的虚数.....	(22)



的“马拉松计算”	(24)
幂的趣话	(26)
第二章 “数字王国”	(29)
黄金分割率 0.618	(29)
神奇的缺 8 数——12345679	(31)
神奇的 9	(35)
趣谈“13”	(36)
奇妙的 6174	(38)
充满“禅机”的数 $\frac{1}{243}$	(40)
回文数	(42)
囚犯的号衣	(45)
堆雪人, 叠罗汉	(46)
奇妙的宝塔	(48)
清一色的 1、2、3 与完全平方数	(51)
金兰数	(52)
不变心的数	(53)
哈雷数字	(56)
完全数	(58)
亲和数	(59)
漫话埃及分数	(60)
首一自然数的个数	(62)
想入非非的除法	

第三章 数字的意义 (67)

数字的神秘力量 (67)

幸运的数字谈 (73)

巧合的数字 (75)

谐音数字的妙用 (77)

“3”的象征意义 (79)

扫兴的 4 (83)

无所不在的 5 (84)

7 的溯源 (87)

有趣的数字 12 (88)

不吉利的“13” (89)

“过得了初一，过不了十五” (93)

第四章 有趣的数字游戏 (95)

数学魔图——幻方 (95)

没有答案的加法 (99)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 有多大 (104)

皆大欢喜的八阵图 (105)

三角形数的一个游戏 (107)

得平方的另一途径 (109)

数字照妖镜 (110)

数字黑洞 (111)

赌徒的谬误 (113)

森德拉姆之筛 (114)



青年必备知识

森德拉姆的对称矩阵..... (114)

第五章 趣味数字故事..... (116)

聪明的船夫..... (116)

为什么鲁智深该挨饿..... (117)

数学家智破凶杀案..... (117)

国王无法满足的要求..... (118)

总统与国务卿对 666 的态度..... (119)

全体数字向我朝拜..... (120)



第一章 数的源流

数是怎样产生的？现在使用的十进制计数法是自古皆然吗？你知道“0”的意义吗？阿拉伯数字是阿拉伯人发明的吗？无理数是怎样被发现的？……来吧，让我们走入数的王国，一同去体验那早已逝去的快乐与悲伤。

数的起源

数的概念是怎样萌芽的

数学——自然科学之父，起源于自然数的伟大发明。

若干万年以前，由于生产力水平的极其低下，人类征服自然的能力很低，为了抵御自然灾害、外族侵略以及猛兽侵扰，同时也为了合力获取赖以生存的物质资料，人类的祖先们只有过着群居的生活。他们白天共同劳动，搜捕野兽、飞

或采集野果；晚上住在洞穴里，共同享用劳动所得。在长期的共同劳动和生活中，他们产生了语言。他们能用简单的语言夹杂手势，来表达感情和交流思想。随着劳动内容的日益丰富，他们的语言也不断发展，终于超过了一切其它动物的语言。其中的主要标志之一，就是语言包含了算术色彩。

人类首先产生了“数”的朦胧概念。他们狩猎归来时，猎物或有或无，于是有了“有”与“无”两个概念。连续几天“无”兽可捕，就没有肉吃了，“有”、“无”的概念便逐渐加深。

后来，群居发展为部落，部落由一些成员很少的家庭组成。所谓“有”，就分为“一”、“二”、“三”、“多”等四种（有的部落甚至连“三”也没有）。任何大于“三”的数量，他们都理解为“多”或者“一堆”、“一群”。有些酋长虽是长者，却说不出他捕获过多少种野兽，看见过多少种树。如果问巫医，巫医就会编造一些词汇来回答“多少种”的问题，并煞有介事地吟诵出来。这是他们当时仅有的算术知识。

数的概念在尼罗河和两河流域的演进

大约在1万年以前，冰河退却了。一些从事游牧的石器时代的狩猎者在中东的山区内，开始了一种新的生活方式——农耕生活。他们碰到了怎样记录日期、季节，怎样计算收藏谷物数、种子数等问题。特别是在尼罗河谷、底格里斯河与幼发拉底河流域发展起更复杂的农业社会时，他们还碰到交纳租税的问题。这就要求计数必须更准确些，只

有“一”、“二”、“三”、“多”，已远远不够用了。

底格里斯河与幼发拉底河之间及其周围地区，叫做美索不达米亚，那儿产生过一种文化，与埃及文化一样，也是世界上最古老的文化之一。美索不达米亚人和埃及人虽然相距很远，但是他们却以同样的方式建立了最早的书写自然数的系统——在树木或者石头上刻痕划印来记录流逝的日子。尽管数的形状不同，但又有共同之处，他们都是用单划表示“一”。

后来（特别是以村寨定居后），他们逐渐以符号代替刻痕，即用 1 个符号表示 1 件东西，2 个符号表示 2 件东西，以此类推，这种记数方法延续了很久。大约在 5000 年以前，埃及的祭司已在一种用芦苇制成的草纸上书写数的符号，而美索不达米亚的祭司则是写在松软的泥板上。他们除了仍用单划表示“一”以外，还用其它符号表示“十”或者更大的自然数。他们重复地使用这些单划和符号，以表示需要的数字。

共通的计数思维

公元前 1500 年，南美洲秘鲁印加族（印第安人的一部分）习惯于“结绳记数”——每收进一捆庄稼，就在绳子上打个结，用结的多少来记录收成。“结”与痕有一样的作用，也是用来表示自然数的。

根据中国古书《易经》的记载，上古时期，中国人也是“结绳而治”，就是用在绳上打结的办法来记事表数。后来

又成为“书契”，即用刀在竹片或木头上刻痕记数，用一划代表“一”。直到今天，中国人还常用“正”字来记数，每一划代表“一”。当然，这个“正”字还包含着“逢五进一”的意思。

罗马数字常识谈

罗马数字的表示方法

公元前 500 年左右，罗马人还处于文化发展的初期，他们用手指来计数——伸出 1 个、2 个、3 个手指分别表示 1 件、2 件、3 件东西，伸出 1 只、2 只手分别表示 5 件、10 件东西。后来，他们逐渐用符号来代替手和手指——用符号 I 代替 1 个手指，用符号 V 代替 1 只手，用符号 X（相当于将一个正写的 V 和一个倒写的 $\wedge$ 放在一起）代替 2 只手。为了表示更多的数，他们又用符号 L、C、D、M 分别表示 50，100，500，1000，并确定了以下三条表示数的原则：

1. “重复写，表叠加”。这就是说，将某符号重复写 n ($n \leq 3$) 次，相当于把 n 个该符号所表示的数叠加。例如，X，X X 表示将 3 个 10 叠加，就是 30；M M 表示将 2 个 1000 叠加，就是 2000。

2. “右边加，左边减”。如果在表示大数的符号的右边，

奇妙的数字

分

附写表示小数的符号,那么相当于用大数加上小数。例如:VI表示5个加上1个,就是6;XXII表示20加上2,就是22;DC表示500加上100,就是600。如果在表示大数的符号的左边附写表示小数的符号,那么相当于大数减去小数。例如:IV表示5减去1,就是4;IX表示10减去1,就是9;XL表示50减去10,就是40;CDXVII表示 $(500-100) + (50+10) + (5+2) = 476$ 。

3.“顶加线,表乘千”。如果在某符号上边加一条横线,那么相当于把该符号所表示的数乘以1000。例如, $\overline{XV}$ 表示 15×1000 ,就是15000; $\overline{D}$ 表示 500×1000 ,就是500000。如果在某符号上边加两条横线,那么相当于把该符号所表示的数乘以 1000^2 即1000000;例如, $\overline{\overline{CLXV}}$ 表示 165×1000^2 ,就是165000000。

罗马数字的计数规则

现在我们可以大致归纳一下,并提供几点注意。

1. 罗马数字就是罗马人使用7个符号及其组合表示的自然数。前12个自然数表示如下:

I	V	X	L	C	D	M
(1)	(5)	(10)	(50)	(100)	(500)	(1000)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

IX	X	XI	XII
(9)	(10)	(11)	(12)

2. “左边减”不能“跳级”。例如 99 要用 XCIX 来表示,即 100 减去 10 再加上 9,这里与 C 相邻的下一级符号是 X。我们不能用 IC 来表示 99,因为从符号 C 到符号 I,中间跳过了符号 X。

3. “左边减”只能减去 1 个符号所表示的数,而“右边加”可以加上 1 个、2 个或 3 个相同符号所表示的数。例如 8 要用 VIII 来表示,而不能写成 IIX。

4. 罗马数字不能表示“0”,而且它能表示的最大数十分有限。这可能与罗马人当时生产活动的发展程度有关,也与罗马人的认识能力有关。由于不能表示 0,而且在 7 个符号及其组合中,找不出“逢几进一”的规律,所以在罗马数字中不存在进位制的思想。

罗马数字

记数法是极其简陋的记数方法之一,但它却包含了以下两个重要思想:第一,它第一次用字母表示数;第二,它的实质是每个不太大的自然数都可以表示为几个基本符号所表示的数相加、相减、相乘的方案,所以第一次表示了简单的运算,这比划大痕、小痕来记数进了一步。

罗马数字因为书写烦琐,局限性又很大,后来就慢慢被淘汰了。但由于它庄重美观,给人们一种回顾历史的艺术享受,所以有的大钟表面仍用它来表示时数。此外,有的书稿在安排章、节或科学知识分类时,也喜欢用罗马数字作为某一级标题的序号。中学生朋友应该学会用罗马数字表示自然数 1,2,……,12,因为这是经常用得着的。

十进制计数法

十进制的具体规则

现在我们常用的数,是用 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,这 10 个阿拉伯数字写出来的。在用这些数字写出的数中,每个数根据它在这个数中所处的位置决定它的实际数值。例如,296 中的 6 表示 6 个“一”,9 表示 9 个“十”,2 表示 2 个“百”。所以,

$$296 = 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

(这里应用了科学记数法)。同样,

$315.28 = 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$, $0.036 = 0 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$ 。就是说,小数点前(向左)各数位上的“单位”依次是 $10^0, 10^1, 10^2, \dots$; 小数点后(向右)各数位上的“单位”依次是 $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$

这种记数方法叫做十进制记数法。“十”就是十进制记数法的基数。用十进制记数法表示的数叫做十进数。在十进制记数法中,进位和退位的规则是“逢十进一,退一当十”。



计数进制的渊源

人有 10 个手指。伸出不同个数的手指，可以形成 10 种不同的“状态”。正是这 10 个手指为使用十进制记数法奠定了基础，中国有句成语“屈指可数”，也说明了这一点。因此，我们的祖先很早就采用了十进数。他们先用伸出不同个数手指的方法来表示自然数 1, 2, ……，10，然后用划大痕、小痕或者用大石子、小石子来表示更多的自然数。以后再发展到使用原始的“算盘”，它的原理是用一些筹码表示 1，另一些表示 10，再一些表示 100 等，这些筹码分别在自右至左的档子上滑动，通过这些筹码的推上推下，人们可以做简单的加、减法，甚至比笔算还快。

也有些地方的人们起初是并用手指与脚趾来计数的，他们采用的是二十进制。今天，从法语数词 quatre-vingt(80), quatre-vingt-dix(90)分别表示“4 个 20”，“4 个 20 再加上 10”等等，可看出早期的二十进制记数法的痕迹。此外，商业上采取“12 件为 1 打”的十二进制记数法，时、分、秒则采取“60 秒为 1 分，60 分为 1 小时”的六十进制记数法。在中国古代的度量制中，是以 16 两作为 1 斤，100 斤作为 1 担的；另一方面，又规定 1 两等于 10 钱，1 钱等于 10 分。显然，这是多种进位法的混用。类似的例子还有：1 里等于 1500 尺（即 500 米），1 尺等于 10 寸，1 寸等于 10 分。这里也包含了两种进位法。所以，十进制记数法不是独一无二的。

十进制的优越性

随着生产和科学技术的发展,人们发现十进数在当时使用的各种记数法中,有着它特别的优点。它不仅与人的手指个数正好相符,而且还有其他方面的好处。

拿算盘来说,如果把十进数的“十”变为“十二”,每一档就要增加一颗下珠,9组口诀就要变为11组,增加了记忆和运算上的负担。如果把十进数的“十”变为“五”,算盘要表示同样大的数(比方13位十进自然数),就得增加许多档(13档远远不够),增加了原材料。而且档数太多不便于携带。现在我们使用十进制记数法,算盘的长、宽是比较协调的。

世界各国在用十进数表示较大的自然数时,采取了不同的方法。总的可分为两类。中国是个、十、百、千、万,然后“四位一进”——万万为亿,万亿为兆,万兆为京,万京为垓。欧洲是个、十、百、千,然后“三位一进”——1000个千(thousand)为1个百万(million),1000个百万为1个十亿(billion),所以他们写大数时往往从个位数字起,自右向左每隔三位留出一个空档或加上一撇,例如表示“三百六十五亿七千九百二十三万零十九”,就写成

36 579 230 019 或 36,579,230,019。

以上说明,人类社会发展到一定阶段,十进制记数法就取得了决定性的胜利。

有趣的是,十进数不仅促进了数学的发展,而且也推动了文学语言的发展。例如中国成语中包含了丰富的与“十”、“百”、“千”、“万”有关的词语:十全十美,十恶不赦,百依百顺,百折不

成千上万,千里迢迢,日理万机,等等。在中国广大的平原、低丘地区,又有“五里一村,十里一堡(读作 pù)”之说;还把有的亭子叫做“十里长亭”。人们不仅用十进制来记数,还用“十”来组合事物和人,例如某城市的“十大建筑”,某公园的“十大风景”,某种中药“十全大补”,以至于某年的“十佳运动员”等。可以说,10 是无处不在的一个数,“十”是无时不用的一个词。

60 进制计数法

十进制并非绝对完美的进制法

十进数有许多优点,但它也有两条明显的缺点:首先,它只能表示 0,1,2,……,9 等 10 种状态和这 10 种状态的不同组合;其次,10 这个数虽然能被 2 和 5 整除,但不能被 3,4,6 整除。如果我们有 60 支铅笔,要平均分给 2 个人、3 个人、4 个人、5 个人、6 个人、10 个人、12 个人、15 个人、20 个人、30 个人或 60 个人,那么每个人都能得到整支铅笔;但如果我们有 10 支铅笔,那么平均分给 3 个人、4 个人或 6 个人时,每个人不可能得到整数支铅笔。对于后面这种情况,就要折断一支或几支铅笔了,事情就会麻烦得多。这样看来,每 12 支铅笔用纸条卷成 1 卷,叫做 1 打,每 5 打或 10 打铅笔(即 60 支或 120 支)装成一盒,就是一种比较