DAXUE WULI SHIYAN JIAOCHENG

大学物理实验教程

主编　杨淑芬

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

大学物理实验教程

主　编　杨淑芬
参　编　万荣章　陈　光　胡叶兰

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 提 要

本书共分为5章，共有26个实验项目。第一章为绪论，第二章为力学和热学实验，第三章为电磁学实验，第四章为光学和近代物理实验，第五章为计算机仿真实验。本教材可作为大学理工学生的大学物理实验课程使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验教程/杨淑芬主编. --北京：北京邮电大学出版社，2010.12

ISBN 978-7-5635-2513-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第242359号

书　　名：大学物理实验教程

主　　编：杨淑芬

责任编辑：刘　磊

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：11.75

字　　数：263千字

印　　数：1—3 000册

版　　次：2010年12月第1版　2010年12月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2513-3　　定　价：22.00

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　　言

大学物理实验是理工科学生必修的一门实验课程，是学生在大学阶段接触到的第一个系统的实践类课程，是诸多后续实验课的基础。通过这门课程的学习，不仅可使学生较系统地掌握实验的基本理论和基本技能以及科学研究的方法，而且可以培养学生严肃认真、实事求是的工作作风。

本书根据“高等工业院校物理实验课程教学基本要求”，针对普通院校的特点与本院的教学条件，在多年使用的自编实验教材的基础上，总结和吸收历年来的教学经验编写而成。

为了更好地适应社会对高级应用型人才的要求，在教材的编写过程中，我们的指导思想是注重培养学生的动手能力。在每个具体的实验过程中，强调了基本仪器的使用与操作。有的实验让学生自己动手组装，如惠斯通电桥测电阻、非线性电阻伏安特性的研究等实验。

本书分为 5 章，共有 26 个实验项目。其中第 5 章为 10 个计算机仿真实验，作为提高和扩充内容，以供因材施教。

本书由杨淑芬主编，参加编写的有万荣章、陈光、胡叶兰。杨淑芬负责全书的统稿和审阅。

由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　绪　　论

一、物理实验课程的地位、作用和任务

物理实验课已成为我国高校工科专业的一门独立的必修基础课程，它和物理学理论课教学具有同等重要的地位。两者既有紧密的内在联系和配合，又有各自的任务和作用。

本课程是对工科大学生进行系统的实验方法和实验技能训练的开端，也是对学生进行科学实验训练的重要基础。本课程应在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，指导学生学习物理实验知识、方法和技术，使学生初步掌握实验的主要程序与基本方法，为后继课程的学习和今后的工作奠定良好的实验基础。

本课程的具体任务如下。

(1) 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，并加深对物理学原理的理解。

(2) 培养和提高学生的科学实验能力，其中包括以下几方面。

① 独自阅读实验教材或资料，做好实验前的准备。

② 借助于教材或仪器说明书正确使用常用仪器。

③ 运用物理学理论对实验现象进行初步的分析、判断。

④ 正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告。

⑤ 完成简单的设计性实验。

(3) 培养与提高学生的科学实验素养，要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严谨认真的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财物的优良品德。

以上 3 项任务是不能由物理学理论课程代替完成的。

应当指出，对于工程技术人员来说，只有既具备较为深广的理论知识又有足够的现代科学实验能力，才能适应科学技术飞速发展的需要，担负起建设社会主义祖国的重任。

二、物理实验课程的基本教学程序

物理实验课一般按3个阶段进行。

1. 实验前的预习

学生进入实验室做实验之前必须认真阅读实验教材，理解实验的基本原理，以便能够抓住实验的关键，控制实验的过程，及时、迅速、准确地测得实验数据。通过预习，还要了解仪器的工作原理和用法。要写好预习报告。预习报告的内容如下。

(1) 目的和要求——说明所做实验的目的和学习要求。

(2) 实验原理——写出本实验中获得实验结果所依据的主要公式，并说明公式中各物理量的意义单位和公式适用的条件及测量方法。必要时应画出所需的原理图(如电路图、光路图或装置系统示意图等)。

(3) 所用仪器——列出本实验中所用的主要仪器，并对其结构、原理及性能有初步的了解。

(4) 数据表格——画好记录各项实验数据的表格(应了解相应的实验步骤)。在条件允许的情况下，课外开放实验室，使学生能对照仪器仔细阅读有关资料，进一步熟悉仪器使用方法和理解实验原理，以便能更加主动地、独立地做好实验。

2. 课堂实验

学生应按时进入实验室，交实验预习报告，按教师分组就位，熟悉实验条件，并在教师的指导下(或独立地)进一步明确实验的有关原理、方法、步骤及注意事项。然后检查仪器、材料是否完好、齐备，筹划仪器的布局和操作的分工(当有合作者时)，再根据实验要求正确地将有关仪器组成所需的测试系统。经检查确保无误，方可按步骤进行实验操作。

做实验时，应正确调试仪器，仔细观察和分析现象，控制实验过程，测量有关物理量。要根据仪器的精度和实验条件正确运用有效数字，及时如实地记录测量数据，防止差错或遗漏。

测取数据时，必须要认真、仔细。一要保证数据的真实性，二要保证应有的精确度，并写在原始数据表上。当对测量结果不满意时，应分析原因，改善条件，重新测量，不允许无根据地修改实验数据。测量结果的优劣将影响实验的成败。

两人合作时，要合理分工，适当轮流，配合得当，协调一致，共同达到实验要求；切忌一人消极或一人包办。

实验完毕，应将所测数据交教师审阅。经教师认可或签字后，再细心收拾仪器，恢复整洁，保证不留事故隐患，然后在仪器使用册上签名，才能离开实验室。

3. 写实验报告

实验报告是对实验过程及其结果的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来。实验报告要用统一规格的纸张书写(可加附页)，必须各自独立地及时完成。要做到文字通顺、表述明确、字迹端正、图表规范、结果正确和讨论认真。好的实验报告应作为研究资料保存。

完整的实验报告内容通常包括下列几个部分：实验名称、目的和要求、实验条件（主要仪器设备）、实验原理、数据表格、数据处理与结果表述、误差分析、问题讨论。

三、测量及数据处理

1. 测量与误差

(1) 测量

所谓测量就是将被测物理量与作为标准的同类量进行比较，得出倍数值。称该标准量为单位，倍数值为数值。因此，一个物理量的测量值应由数值和单位两部分组成，缺一不可。通常按测量方法不同把测量分为直接测量和间接测量两大类。所谓直接测量，就是可以用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量方法。用米尺测量长度、用天平称质量、用伏特计测电压等都是直接测量，所得的物理量如长度、质量、电压等称为直接测量量。而间接测量则是指被测量的量值要用相关的直接测量量值通过公式运算间接地获得。例如，用单摆测重力加速度 g 时，T(周期)、l(摆长)是直接测量值，而 g 就是间接测量值。

由测量情况考虑，测量可分为等精度测量和不等精度测量。一般来说，在常规实验中都采用等精度测量。本课程主要学习等精度数据的处理。

(2) 误差

如果测量对象本身不变，那么对于一个被测的物理量，客观上存在一个真实的量值，称为真实值或真值。实际上，不管使用多么精密的仪器，测量出来的只是真值的近似值，测量值 $\tilde{x}$ 和真值 x 之间总存在差异。其差 $\tilde{x}-x$ 称为误差或绝对误差，记为 Δx。用公式表示为

$$\Delta x=\tilde{x}-x\neq 0 \tag{1-0-1}$$

2. 误差的分类

按误差的基本性质和产生的原因，可把误差分为 3 大类：过失误差、系统误差和偶然误差。正常情况下只有后两类误差。

(1) 过失误差(又称粗大误差)

明显地歪曲了测量结果的误差称为粗大误差，它是由于测量者不正确地使用仪器、观察错误或记错数据等不正常情况下引起的误差。其特点是：它使得测量结果大大地偏离真实值(即误差“粗大”)，并且使得数据的结构显著地偏离正常规律。含有粗大误差的测量值在数据处理中应作为坏值予以剔除。粗大误差严重或难以判别时，实验要重做。粗大误差是可以避免的，也是应该避免的，所以，在作误差分析时，要估计的误差通常只有系统误差和随机误差。

(2) 系统误差

在相同条件下多次测量同一个量时，若每次的测量值总是比真值偏大或偏小一个固定的量值，或者按一定的规律变化，具有这种特点的误差就称为系统误差。

系统误差的主要来源有以下几个方面。

① 仪器的缺陷：仪器的结构和标准不完善或使用不当引起的误差。例如，天平不等臂、分光计读数装置的偏心差、电表的示值与实际值不符等。

② 理论或方法：它是由测量所依据的理论公式近似或实验条件达不到理论公式所规定的要求等引起的。例如，用单摆测重力加速度时所用公式的近似性；伏安法测电阻时，不考虑电表内阻的影响等。

③ 环境误差：它是由于外部环境如温度、湿度、光照等仪器使用要求的环境条件不一致而引起的误差。

④ 人员误差：由于实验者的不正确习惯所引起的误差。例如，用停表计时时，总是超前或滞后；对仪表读数时总是偏向一方斜视等。

系统误差不能通过在相同条件下重复测量而发现，往往是通过在不同条件下对同一量的测量结果进行比较或利用已有知识对有关因素进行分析才能发现。

为了尽可能消除系统误差，在设计实验时应加以周密的考虑。若无法消除，则应设法抵偿或修正(具体方法将在各项实验项目中有针对性地介绍)。

(3) 偶然误差(又叫随机误差)

在相同条件下多次测量同一个量时，误差的绝对值时大时小，符号时正时负，不可预定而随机出现者，称为偶然误差，又叫随机误差。它是由于实验条件和环境因素的微小变化、测量者的生理分辨能力及操作熟练程度等多方面的影响而产生的。

大量微小变化因素的不定组合使偶然误差显得毫无规律性。但在相同条件下发生的大量同类随机事件却具有一定的统计规律性。偶然误差通常遵循"正态分布"(即"高斯分布")规律。

如果以误差 Δx 为横坐标，以误差出现的概率密度(即相应的测量值出现的概率密度)$P(x)$为纵坐标，则多次测量结果的偶然误差概率密度可用如图 1-0-1 所示的正态分布曲线表示。不难看出偶然误差具有如下特点。

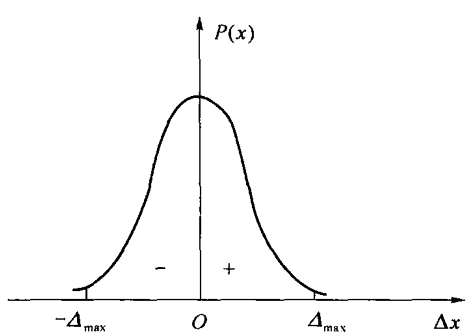

图 1-0-1　误差正态分布曲线

① 误差的绝对值不会超过某一最大值——具有有界性。

② 绝对值小的误差出现的概率大，而绝对值大的误差出现的概率小——具有单峰性。

③ 绝对值相同的正负误差出现的概率相等——具有对称性。

④ 误差的算术平均值随着测量次数的无限增加而趋于零——具有抵偿性。

由此可见，偶然误差虽因不可预知而无法避免，但却可以通过多次测量，利用其统计

规律性而达到相互抵偿，因而能找到真值的最佳近似值（又叫最佳值或最近真值）。

在一般情况下，实验测量的系统误差和偶然误差是同时存在的。有时系统误差突出，有时偶然误差突出，而且有时两者难以严格区分。这就要求我们对每一个实验作具体的误差分析，并采用有效而方便的方法进行数据处理。在评定测量结果的优劣时，常用精密度、准确度和精确度来描述。通常把偶然误差小的评为精密度高，把系统误差小的评为准确度高，而把这两种误差都小的评为精确度高。

3. 直接测量中偶然误差的估计

(1) 多次测量的算术平均值

设在相同条件下对某一物理量进行了 n 次独立的直接测量，所得 n 个测量值为 x_1，x_2，…，x_n，则其算术平均值为

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \tag{1-0-2}$$

若无系统误差，则由偶然误差特点可证：当 $n \to \infty$ 时，$\overline{x}$ 与真值 x 趋于重合；当 n 为有限次数时，$\overline{x}$ 则为根据 n 次测量数据所得的最佳值。因此，可以用算术平均值来近似代替真值作为测量结果。

(2) 多次测量结果的偶然误差

在多次测量时，各次测量值不同，误差也就不同。如何表示其测量的误差呢？这里有两个问题：一是如何说明这一列多次测量值的分散性（或精密度）；二是如何估计所得平均值 $\overline{x}$ 的误差范围（或准确度）。

在一般情况下，真值无法确切知道，误差也就无法算出。因此，当可忽略系统误差时，常以算术平均值 $\overline{x}$ 代替真值；相应地以测量值 x_i 与平均值 $\overline{x}$ 之差（即所谓“残差”或“偏差”）代替各次测量的误差，即

$$\delta_{x_i} = x_i - \overline{x} \approx x_i - x = \Delta x_i$$

很明显，基于偶然误差的对称性和抵偿性，各次偏差的直接平均值总为零或者接近于零（当有舍入误差时），即

$$\overline{\delta_{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \ / \ n = 0$$

它不能说明测量的精密度。因此，为了说明测量的精密度就要避免正负偏差完全抵消。为此，取绝对值或平方是常用的数学手段。所以，通常采用平均绝对偏差或标准偏差来表示一列测量值的分散性（也指精密度）。具体介绍如下。

① 平均绝对偏差 $\overline{\Delta x}$

设 $\overline{x}$ 为前述 n 个测量值的平均值，$\Delta x_1 = |x_1 - \overline{x}|$，$\Delta x_2 = |x_2 - \overline{x}|$，…，$\Delta x_n = |x_n - \overline{x}|$ 为各次测量的偏差的绝对值，并把它们的平均值定义为平均绝对偏差，即

$$\overline{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| / n \tag{1-0-3}$$

显然，$\overline{\Delta x}$ 的值越大，表明这一系列测量值的分散性越大；$\overline{\Delta x}$ 的值越小，则表明测量的

精密度越高。

② 标准偏差(即均方根差)σ

若按贝塞尔公式将各次偏差求平方和，再除以$(n-1)$取平均值，然后再取其平方根，便得到所谓单次测量的标准偏差，即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} \tag{1-0-4}$$

它表示，根据 n 次测量值可知，在同一条件下任作一次测量，所得测量值有 68.3%的概率会落在$\overline{x}\pm\sigma$ 的范围内(n 应足够大，下同)。

同样，标准偏差 σ 的值越大，表示测量列的分散性越大；σ 值越小，则表示测量的精密度越高。

在科学实验和工业计量中常用标准偏差来表示测量的精密度，但在简单的物理教学实验中，测量次数较少，迄今仍常用平均绝对偏差来表示。

③ 测量平均值的标准偏差 $\sigma_{\overline{x}}$

对测量平均值$\overline{x}$的误差作估计，本应涉及系统误差。对于(已知)系统误差，可设法消除或对测量值进行修正。但总会有一些微小的系统误差因素难以消除或查明；有限次测量本身也使$\overline{x}$会偏离真值。这些因素综合起来，使平均值$\overline{x}$也成为一个随机量，因而可用统计方法来估计$\overline{x}$的误差。可以证明，平均值的标准偏差 $\sigma_{\overline{x}}$是单次测量的标准偏差 σ 的$\frac{1}{\sqrt{n}}$，即

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-0-5}$$

$\sigma_{\overline{x}}$在一定程度上反映了测量的准确度，也反映了测量的精密度。

(3) 相对误差

评价测量结果的优劣，既要看绝对误差的大小，又要看被测量本身的大小。为此引入相对误差的概念。

相对误差被定义为绝对误差与真值之比(或它们的对应同类量之比)，常以百分数表示：

$$\sigma_r=\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta x}{x}\times 100\% \tag{1-0-6}$$

根据具体情况，Δx 可取为$\overline{\Delta x}$的值、σ 或 $\sigma_{\overline{x}}$；而 x 则常以最佳值$\overline{x}$表示。对于验证性测量，常取理论值或公认值表示真值，则(1-0-6)式可相应地写为

$$\sigma_r=\frac{x_{测}-x_{公认}}{x_{公认}}\times 100\%$$

例 1 某人用游标卡尺测量两个物体的长度分别为(60.04±0.02)mm 及(10.02±0.02)mm。求两个测量值的绝对误差和相对误差。

解：由绝对误差的概念可知，两个测量值的绝对误差相等，均为 0.02 mm，即

$$\Delta l_2=\Delta l_1=0.02\ \text{mm}$$

据定义，第一个测量值的相对误差

$$E_1=\frac{\Delta l_1}{l_1}=\frac{0.02}{60.04}=0.000\,3=0.03\%$$

第二个测量值的相对误差

$$E_2=\frac{\Delta l_2}{l_2}=\frac{0.02}{10.02}=0.002=0.2\%$$

可见，第一个测量值要比第二个测量值的精度高。

4. 直接测量结果的表达与不确定度的估计

一般来说，测量的目的是为了找到真值 x，而实际上我们只能找到真值的最佳近似值（通常取为多次测量值的平均值$\bar{x}$），同时估计其误差的存在范围$\mp\Delta$。因此，通常将测量结果表示为

$$x=\bar{x}\pm\Delta \tag{1-0-7}$$

这就是说，我们的测量结果表明，在某一很大的概率下，真值 x 可能处在$(\bar{x}-\Delta,\bar{x}+\Delta)$的范围之内，然而不能确定真值的位置。显然，最佳值$\bar{x}$的误差仍是未知的，它并不等于$\pm\Delta$。但 Δ 的取值说明了测量结果的不确定度。Δ 越大，不确定度程度越大；Δ 越小，测量结果的精确度越高。因此，把 Δ 称为不确定度，或者称为总不确定度（以区别于其分量）。

对不确定度的估计是以误差分析为基础的。通常，已知的系统误差已被设法消除或者从测量值中扣除，因而其余的各种误差分量都影响着不确定度的大小。由于误差的来源很多，很难按偶然误差和系统误差来严格区分全部误差分量（有的甚至难以发现），故不宜按误差的性质来划分不确定度的分量。因此，国际计量委员会通过一项指导性文件：《BIPM 实验不确定度的说明建议书 INC-1(1980)》。根据此建议精神，应将测量结果的不确定度按其数值评定方法划分成两类分量：A 类为用统计方法计算的分量（记为 Δ_A）；B 类为用其他方法估计的分量（记为 Δ_B）。它们均适用“方和根法”合成，即

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2} \tag{1-0-8}$$

对于特殊用途，还需乘以一个因子，才能得到总不确定度。

在普通物理实验中，为了回避一些新的概念和运算，宜选择重复测量次数在 $5<n\leqslant 10$ 的范围内，使 $\Delta_A=t_p(n-1)\sigma_{\bar{x}}\approx\sigma$，从而可简化地直接引用单次测量的标准偏差 σ 来计算 Δ_A，即取

$$\Delta_A=\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-0-9}$$

但 Δ_A 与 σ 概念不同。

对于某些条件很好的可直接测量，其 Δ_B 可以忽略，则有 $\Delta=\Delta_A=\sigma$。这时真值落在$\bar{x}\pm\sigma$ 范围内的概率约 95%或更大（前已指出，按 σ 的原义，它表示单次测量值落在此范围的概率为 68.3%）。

在一般情况下，不确定度的 B 类分量不可忽略。然而，要对 Δ_B 作恰当的估计是需要足够的计量知识和经验的，这已超出本课本的要求。为了便于教学，我们仅用仪器的示值误差限或基本误差限 $\Delta_{仪}$ 来估计 Δ_B；当测量条件符合标准时，常取 $\Delta_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$（对于均匀分布）；当条件改变需考虑变动误差等因素时，常取 $\Delta_B=\Delta_{仪}$（或由实验室直接给定）。

对于另外两种特殊情况，即 $\sigma<\frac{1}{3}\Delta_B$ 或者仅作一次测量时，则可不计 Δ_A，而取 $\Delta=\Delta_B$。

需要说明，在实验教学中，目前仍相当广泛地按传统方法，当可不计系统误差时，用平均值和平均绝对偏差来表示测量结果，即 $x=\overline{x}\pm\overline{\Delta x}$。

这是方便的。但其含义则是说明单次测量值有 57.5% 的概率会落在 $(\overline{x}-\overline{\Delta x},\overline{x}+\overline{\Delta x})$ 范围之内。当 $\overline{\Delta x}<\frac{1}{3}\Delta_{仪}$ 时（相当于 $\sigma<\frac{1}{3}\Delta_B$），或者只作一次测量时，也常将结果表示为 $x=\overline{x}\pm\Delta_{仪}$。

下面讨论一个实例。

设用一级螺旋测微器对钢球的直径进行了 6 次测量，消去零点偏差后，所得测量值分别为：$D_1=9.543$ mm，$D_2=9.545$ mm，$D_3=9.544$ mm，$D_4=9.543$ mm，$D_5=9.542$ mm，$D_6=9.544$ mm，则其算术平均值为

$$\overline{D}=\frac{9.543+9.545+9.544+9.543+9.542+9.544}{6}$$

$$=9.5435\approx 9.544\ \text{mm}$$

各次偏差的绝对值（单位：mm）为

$$\Delta D_1=|9.543-9.544|=0.001,\Delta D_2=|9.545-9.544|=0.001$$

$$\Delta D_3=|9.544-9.544|=0.000,\Delta D_4=|9.543-9.544|=0.001$$

$$\Delta D_5=|9.542-9.544|=0.002,\Delta D_6=|9.544-9.544|=0.000$$

其平均绝对误差为

$$\overline{\Delta D}=\frac{0.001+0.001+0.000+0.001+0.002+0.000}{6}\approx 0.001\ \text{mm}$$

而一级螺旋测微器的示值误差限为 $\Delta_{仪}=0.004$ mm，可见 $\overline{\Delta D}<\frac{1}{3}\Delta_{仪}$，于是测量结果可按简易方式表示为

$$D=\overline{D}\pm\Delta_{仪}=(9.544\pm0.004)\text{mm}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta_{仪}}{D}\times100\%\approx0.04\%$$

若采用不确定度来表示，则相应的估算如下：

$$\Delta_A=\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{(1+1+0+1+4+0)\times10^{-6}}{6-1}}$$

$$\approx 1.2\times10^{-3}\ \text{mm}$$

$$\Delta_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\approx\frac{0.004}{1.73}\approx 2.3\times10^{-3}\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}=\sqrt{(1.2^2+2.3^2)\times10^{-6}}=2.6\times10^{-3}\approx 0.003\ \mathrm{mm}$$

于是测量结果应表示为

$$D=\overline{D}\pm\Delta=(9.544\pm0.003)\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta}{D}\times100\%=0.03\%$$

5. 间接测量的结果及其表示

在实验中，常常只能对某些物理量进行间接测量。设间接测量量 φ 是几个相互独立的直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 的函数，即

$$\varphi=f(x,y,z,\cdots)$$

并已测出各直接测量量 $x=\overline{x}\pm\Delta x, y=\overline{y}\pm\Delta y, z=\overline{z}\pm\Delta z,\cdots$，那么，当各直接测量量取值为 $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots$ 时，可得间接测量量的近似值

$$\tilde{\varphi}=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots)\tag{1-0-10}$$

当各直接测量值分别有一微增量时，间接测量量必然会有相应的变化。按全微分公式有

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

若近似地以误差取代微分，并考虑正负号的最不利组合，则可估算间接测量值的误差为

$$\Delta\varphi=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right|+\cdots\tag{1-0-11}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta\varphi}{\tilde{\varphi}}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\tilde{\varphi}}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\tilde{\varphi}}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\tilde{\varphi}}\right|+\cdots\tag{1-0-12}$$

相应地可将间接测量结果表示为 $\varphi=\tilde{\varphi}\pm\Delta\varphi$。但是，按(1-0-11)式和(1-0-12)式计算误差时，一般会扩大误差，与实际情况有较大的出入，若用不确定度表示直接测量值的微小增量，并考虑其统计性质，则可用方和根合成公式估算间接测量值的不确定度，即有

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Delta_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Delta_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\Delta_z^2+\cdots}\tag{1-0-13}$$

相应地有

$$\sigma_r=\frac{\Delta_\varphi}{\tilde{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta_x}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta_y}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta_z}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\cdots}\tag{1-0-14}$$

以上两式是不确定度传递的一般公式。当函数为单纯的和差关系时，(1-0-13)式将化为简单的方和根关系，有

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2+\cdots}$$

宜直接按此式求 Δ_φ；当函数为单纯的积商关系时，则常将(1-0-14)式改写成

$$\sigma_r=\frac{\Delta_\varphi}{\overline{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln f}{\partial x}\Delta_x\right)^2+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial y}\Delta_y\right)^2+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}\Delta_z\right)^2+\cdots}\tag{1-0-15}$$

且在此情况下，(1-0-15)式可变得更简单，即变为

$$\sigma_\tau=\frac{\Delta_\varphi}{\tilde{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2+\left(\frac{\Delta_z}{z}\right)^2+\cdots}$$

这时先算 σ_τ，再按 $\Delta_\varphi=\sigma_\tau\cdot\tilde{\varphi}$ 计算不确定度 $\tilde{\varphi}$ 较为方便。最后也可将结果表示为

$$\varphi=\tilde{\varphi}\pm\Delta_\varphi$$

间接测量结果的表示应与有关直接测量结果的表达形式一致。不要用错传递公式。为方便起见，此处提供误差传递与不确定度(标准差)传递的常用公式表(见表 1-0-1)，以供参考和比较。

表 1-0-1　误差和不确定度传递的常用公式

函数关系式	最大误差传递公式	标准误差传递公式
$\varphi=x\pm y$	$\Delta\varphi=\lvert\overline{\Delta x}\rvert+\lvert\overline{\Delta y}\rvert$	$\Delta_\varphi=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2}$
$\varphi=x\pm y$ 或 $\varphi=\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}\right\rvert+\left\lvert\frac{\overline{\Delta y}}{\bar{y}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{\bar{y}}\right)^2}$
$\varphi=x^n$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=n\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=n\frac{\Delta_x}{\bar{x}}$
$\varphi=\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=\frac{1}{n}\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\frac{1}{n}\frac{\Delta_x}{\bar{x}}$
$\varphi=\sin x$	$\Delta\varphi=\lvert\cos\bar{x}\cdot\overline{\Delta x}\rvert$	$\Delta_\varphi=\lvert\cos\bar{x}\rvert\Delta_x$
$\varphi=\ln x$	$\Delta\varphi=\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}\right\rvert$ (有 φ 的单位)	$\Delta_\varphi=\frac{\Delta_x}{\bar{x}}$ (有 φ 的单位)

例 2　设已知一块梯形板的上底、下底和高的直接测量结果分别为 $a=(32.43\pm0.02)\text{cm}$，$b=(65.20\pm0.03)\text{cm}$，$h=(20.05\pm0.02)\text{cm}$，求其面积 S 的间接测量结果(各量均带不确定度表示)。

解：梯形面积公式为 $S=\frac{a+b}{2}h$，将 $\bar{a},\bar{b},\bar{h}$ 的值代入式中得

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\times(32.43+65.20)\times20.05\approx978.7\ \text{cm}^2$$

今选用(1-0-15)式算相对误差：

$$\sigma_\tau=\frac{\Delta_S}{\bar{S}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln S}{\partial a}\Delta_a\right)^2+\left(\frac{\partial\ln S}{\partial b}\Delta_b\right)^2+\left(\frac{\partial\ln S}{\partial h}\Delta_h\right)^2}$$

则需先取对数

$$\ln S=\ln\frac{1}{2}+\ln(a+b)+\ln h$$

再求各项偏导数

$$\frac{\partial\ln S}{\partial a}=\frac{1}{a+b},\frac{\partial\ln S}{\partial b}=\frac{1}{a+b},\frac{\partial\ln S}{\partial h}=\frac{1}{h}$$

代人 σ_r 的表达式便得

$$\frac{\Delta_S}{S}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{\Delta_b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.02}{32.43+65.20}\right)^2+\left(\frac{0.03}{32.43+65.20}\right)^2+\left(\frac{0.02}{20.05}\right)^2}$$

$$\approx 0.001$$

$$\Delta_S=\tilde{S}\,\frac{\Delta_S}{S}=978.7\times 0.001\approx 1\ \mathrm{cm}^2$$

所以此梯形面积的间接测量结果为

$$S=\tilde{S}\pm\Delta_S=(979\pm 1)\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta_S}{S}\times 100\%=0.1\%$$

若将题中各直接测量量的不确定度当作平均绝对偏差，则有

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{\overline{\Delta a}+\overline{\Delta b}}{\bar{a}+\bar{b}}+\frac{\overline{\Delta h}}{\bar{h}}=\frac{0.02+0.03}{32.43+65.20}+\frac{0.02}{20.05}=1.5\times 10^{-3}$$

$$\Delta S=\tilde{S}\,\frac{\Delta S}{S}=978.7\times 1.5\times 10^{-3}\approx 1.5\approx 2\ \mathrm{cm}^2$$

于是梯形面积的测量结果可表示为

$$S=\tilde{S}\pm\Delta S=(979\pm 2)\mathrm{cm}^2$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta S}{S}\times 100\%=0.2\%$$

两种表示有不同，但无矛盾。

6. 有效数字

(1) 有效数字的概念

由于受到仪器误差的制约，测量结果只能是近似的，其数字的位数是有限的。在测量时，只能读到仪器的最小分度值以上的数字，为准确数字；最小分度以下的数字由估读获得，称为存疑数字。全部准确数字加上一位存疑数字所组成的一串数字就有效而合理地表示了测量值的数量，人们称这种数字串为有效数字。

例如，用最小分度为 0.02 mm 的螺旋测微器去测量某物体，长度为 5.54 mm，则 5.5 mm 为准确数字；0.04 mm 是估读的欠准确（可疑）数字，只取一位。二者之和 5.54 mm 则为三位有效数字。

有效数字可表示为准确数字加一位欠准确数字之和。

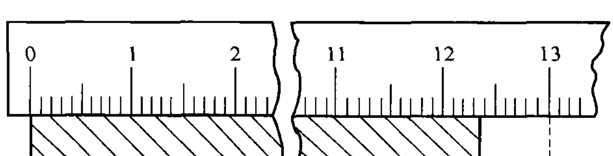

图 1-0-2　长度的测量