

鲁棒控制 理论及应用

王娟 张涛 徐国凯 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

辽宁省教育厅和中央高校自主科研基金资助项目

鲁棒控制理论及应用

王娟 张涛 徐国凯 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书主要介绍现代鲁棒控制的基本理论与应用成果,具体内容包括三个部分。第一部分介绍有关基础知识,包括数学基础、稳定性、有界性和收敛性的基本定理、具有不确定性的系统的描述方法以及鲁棒稳定与鲁棒性能准则的条件;第二部分介绍鲁棒控制的理论成果,首先介绍 H_∞ 控制理论;然后介绍约束系统的鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 设计方法,最后阐述不确定时滞系统的鲁棒镇定问题的最新研究成果及非线性鲁棒控制;第三部分分别介绍上述理论成果在机械系统和网络控制系统等系统中的设计实例。

本书可以作为自动控制和电气工程专业的高年级本科生、研究生教材,也可供从事相关专业的科研人员和工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制理论及应用/王娟,张涛,徐国凯编著. —北京:电子工业出版社,2011.8
ISBN 978-7-121-14285-7

I. ①鲁… II. ①王… ②张… ③徐… III. ①鲁棒控制 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 158492 号

责任编辑:曲 昕

特约编辑:寇国华

印 刷: 北京中新伟业印刷有限公司
装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×980 1/16 印张: 12.75 字数: 224 千字

印 次: 2011 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

前 言

鲁棒控制理论是处理不确定性问题的有力工具，近年来备受控制理论界关注，取得了一系列的成果和方法，并在工程领域中获得了成功的应用。该问题的研究不仅可以应用于飞行器控制、机器人控制、网络控制等其他工程领域，也可以应用于运动控制领域。

本书全面系统地介绍了不确定系统鲁棒 H_∞ 控制和时滞系统鲁棒控制的理论基础、各种设计方法及其在工程设计中的应用等问题。主要研究内容包括：约束系统的状态及输出反馈控制方法、时滞系统的稳定性及镇定问题、鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法。特别是在约束系统的鲁棒 H_∞ 控制设计中，对工程中常见的约束控制系统的鲁棒控制设计问题，采用滚动时域策略，提出了几种 H_∞ 鲁棒输出反馈控制器设计技术。最后给出了这些理论方法在控制工程设计中的应用实例。

本书是研究团队成员大量研究成果的总结，融入了近年来在国内外刊物上发表及国际会议上交流的多篇学术论文的精华内容。杜海英负责编写了第 1 章，王娟负责编写了第 2、3、4 章，张涛负责编写了第 5 章，崔艳秋负责编写了第 6 章和附录，徐国凯负责编写了第 7 章。全书由王娟统稿。

本书的出版得到了辽宁省教育厅项目和中央高校自主科研基金资助，作者对此深表谢意。

由于作者水平有限，书中的缺点错误在所难免，欢迎读者给予批评指正。

编著者

目 录

第 1 章 控制系统的稳定性	1
1.1 稳定性概念	1
1.2 李雅普诺夫稳定性定理	4
1.3 线性离散系统李雅普诺夫稳定性分析	6
1.4 约束系统的稳定性分析	7
1.4.1 状态反馈控制系统稳定性分析	8
1.4.2 输出反馈控制系统稳定性分析	18
1.5 鲁棒稳定性	33
1.5.1 不确定状态空间模型	33
1.5.2 二次稳定性	35
1.6 干扰抑制问题	37
参考文献	39
第 2 章 H_∞ 控制理论	41
2.1 连续时间系统	41
2.2 离散系统	44
2.3 控制器设计	46
2.3.1 状态反馈 H_∞ 控制	46
2.3.2 输出反馈 H_∞ 控制	48
2.3.3 静态输出反馈 H_∞ 控制	51
参考文献	56
第 3 章 受约束系统的输出 H_∞ 控制	57
3.1 问题描述	57
3.1.1 无约束输出反馈控制器设计	58
3.1.2 受约束系统的 H_∞ 输出反馈控制	60
3.2 输出反馈的滚动时域 H_∞ 控制方法	62
3.2.1 滚动时域优化	62

3.2.2 可行性及闭环系统性能	64
3.3 仿真研究	65
参考文献	69
第4章 鲁棒 H_∞ 控制	70
4.1 鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制	70
4.2 鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制	74
4.2.1 问题描述	74
4.2.2 不确定系统的 H_∞ 静态输出反馈控制	75
4.2.3 静态输出反馈滚动时域 H_∞ 控制方法	80
4.2.4 仿真研究	83
第5章 时滞系统基于状态反馈的鲁棒镇定	86
5.1 时滞系统的稳定性	86
5.1.1 频域分析法	87
5.1.2 时域分析法	88
5.2 时滞系统基于状态反馈的鲁棒镇定	90
5.2.1 基于 Riccati 方程或 Riccati 不等式方法	90
5.2.2 基于线性矩阵不等式方法	91
5.2.3 具有时变状态和输入时滞线性不确定系统鲁棒镇定方法	92
5.2.4 小结	105
参考文献	105
第6章 时滞系统基于观测器状态反馈及输出反馈的鲁棒镇定	107
6.1 时滞系统基于观测器状态反馈的鲁棒镇定	108
6.1.1 具有未知固定状态时滞线性不确定系统基于观测器的鲁棒镇定方法	108
6.1.2 具有时变状态时滞线性不确定系统基于观测器的鲁棒镇定方法	117
6.1.3 小结	122
6.2 时滞系统基于输出反馈的鲁棒镇定	122
6.2.1 静态输出反馈	123
6.2.2 动态输出反馈	126
6.2.3 数值算例与仿真研究	130
6.2.4 小结	131
参考文献	131

第 7 章 鲁棒控制的应用	134
7.1 滚动时域 H_∞ 输出反馈控制在主动悬架控制中的应用	134
7.1.1 主动悬架系统及其性能描述	135
7.1.2 动态输出反馈的滚动时域 H_∞ 主动悬架控制	137
7.1.3 仿真研究	142
7.2 H_∞ 鲁棒跟踪控制在轧机调速系统中的应用	147
7.2.1 问题描述	147
7.2.2 约束系统的滚动时域 H_∞ 跟踪控制	148
7.2.3 H_∞ 鲁棒跟踪控制在穿孔轧机调速系统的应用	150
7.3 用滚动时域 H_∞ 跟踪控制实现的混沌同步化	153
7.3.1 问题描述	153
7.3.2 滚动时域 H_∞ 跟踪控制混沌同步	154
7.3.3 仿真结果	156
7.4 鲁棒镇定在网络控制系统中的应用	158
7.5 网络控制系统的概念与数学模型	159
7.6 网络控制系统的稳定性分析	166
7.7 网络控制系统鲁棒镇定控制器设计	168
7.8 小结	171
参考文献	172
附录 A 线性矩阵不等式	173
A.1 线性矩阵不等式的表示式	173
A.1.1 线性矩阵不等式的一般表示	173
A.1.2 可转化为线性矩阵不等式表示的问题	173
A.2 一些标准的线性矩阵不等式问题	174
附录 B Matlab LMI 工具箱简介	178
B.1 线性矩阵不等式及相关术语	178
B.2 确定线性矩阵不等式	179
B.3 线性矩阵不等式求解器	185
附录 C 相关引理	194

第 1 章 控制系统的稳定性

在控制理论中系统的稳定性是一个非常重要的概念，它是系统能否正常工作的最基本条件，因此研究系统稳定性、稳定性条件及稳定性措施是控制系统的重要内容。

1.1 稳定性概念

当系统为非线性和时变的最一般情况时，可用如下状态空间模型描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq t_0 \quad (1.1)$$

其中， $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量， $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{g}(\cdot)$ 分别是状态的非线性向量函数和矩阵函数， $\mathbf{u}$ 则表示控制输入量。进而，如果系统为定常系统，则其状态方程 (1.1) 中将不显含 t ；如果系统为线性，那么方程 (1.1) 中 $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{g}(\cdot)$ 分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 的线性向量函数，此时式 (1.1) 化为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq t_0 \quad (1.2)$$

研究运动稳定性问题时，我们希望系统的状态 $\mathbf{x}(t)$ 对于任意的非零初始值 $\mathbf{x}(t_0)$ ，都能够渐近地趋于平衡状态并且稳定在平衡点上，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \quad (1.3)$$

由此可见，平衡状态即系统方程的常数解，或者系统的一种静止的运动。在大多数情况下， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ，即状态空间的原点为系统的平衡状态；除此之外，系统也可以有非零平衡状态。显然对于一个非线性系统，平衡点并非唯一。容易证明，对于孤立的平衡状态，总是可以通过移动坐标系而将其转换为空间的原点。所以为了叙述简便，下面只讨论 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的情况。

对于一般系统而言，要想使系统具有上述运动趋势，就必须施加控制作用。因为如果不施加驱动力，即令 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ （通常称这类系统为“自治系统”），则系统状态的动态过程将满足微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

但是对于任意给定的初始条件 $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$ ，该方程的解 $\mathbf{x}(t)$ 一般不满足式 (1.3)，因此需要选择适当的控制输入 $\mathbf{u}$ 使系统稳定到平衡状态。如果状态 $\mathbf{x}$ 的各元素均可检测，就



可以通过状态反馈来确定控制输入，令

$$u(t) = k(x) \quad (1.5)$$

其中， k 为函数矩阵。这时系统的状态微分方程为

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)k(x) \quad (1.6)$$

则由初始状态所引起的运动轨迹满足上述微分方程的解，所以可以选择适当的 k 使得上述微分方程的解对于任意给定的初始状态都趋于零。

式 (1.5) 称为“状态反馈控制律”或者“控制器”，而式 (1.6) 称为“对应的闭环系统”，式 (1.4) 称为“开环系统”。显然，此时系统的控制问题就是设计控制器，使得其偏离平衡状态的受扰运动能够返回到平衡点状态，或者限制在它的有限领域内。一个实际的系统必须是稳定的，只有稳定才能付诸工程应用。虽然稳定还不是系统达到成功的工程应用的全部，但是它是系统实际应用的前提和先决条件。下面将首先讨论李雅普诺夫 (Lyapunov) 意义下稳定的基本概念，在此基础上研究系统的内部稳定性、外部稳定性，以及各种稳定性之间的关系和稳定性的判据；同时，还将讨论利用李雅普诺夫直接法进行系统综合的问题。

定义 1.1 若个给定的状态 x_e 满足

$$f(x_e) = 0$$

则称 x_e 是系统式 (1.1) 的“平衡状态”或者“平衡点”。

如果没有外力作用于系统，则系统将保持平衡状态；如果系统受到外力作用，则系统能否保持这个平衡状态就是平衡状态的稳定性问题。以下给出李雅普诺夫稳定性定义。

定义 1.2 稳定性 设 x_e 为动力学系统式 (1.1) 的平衡态，若对任意给定的实数 $\varepsilon > 0$ ，都对应地存在一个实数 $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使得一切满足 $\|x(0) - x_e\| \leq \delta(\varepsilon)$ 的系统响应 $x(t)$ ，在所有的时间内都满足 $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon$ ，则称“系统的平衡状态 x_e 是稳定的”。在此定义中，有

$$\|x(0) - x_e\| = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i(0) - x_{ei})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (1.7)$$

当 $\delta(\varepsilon)$ 选得足够小时，则由初始扰动引起的响应，在所有时间内都包括在一个超球中，即

$$\|x(t) - x_e\| = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_{ei})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

在二维情况下，系统稳定性的几何解释如图 1-1 所示。

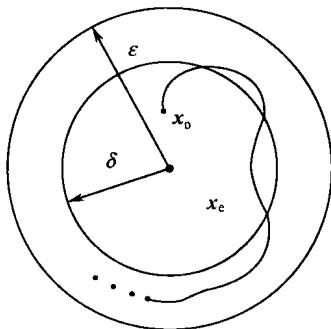


图 1-1 系统稳定性的几何解释

如果对平衡点 x_e 和任意给定的域 ε ，找不到满足稳定条件的相对邻域 $\delta(\varepsilon)$ ，那么系统在该平衡点是不稳定的，则称“系统是不稳定的”。

如果所取的域 ε 与 $\delta(\varepsilon)$ 初始时刻 t_0 无关，即对任何 t_0 稳定条件不变，则称“该系统稳定状态是一致稳定的”。

定义 1.3 渐进稳定 如果系统的一个平衡状态 x_e 是稳定的且对靠近平衡状态 x_e 的任何初始点 $x(0)$ 的系统解 $x(t)$ 满足

$$\|x(0) - x_e\| \leq \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (1.9)$$

也就是说，从足够靠近 x_e 处出发的每一个解 $x(t)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于 x_e ，则平衡状态 x_e 是渐进稳定的。在二维情况下，系统渐进稳定性的几何解释如图 1-2 所示。

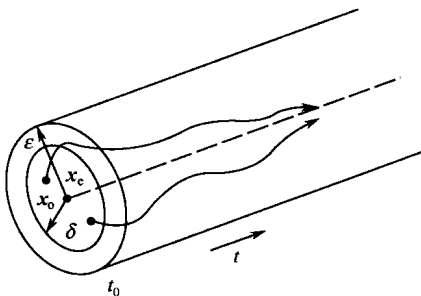


图 1-2 系统渐进稳定性的几何解释

如果 x_e 是渐进稳定的，且系统稳定性质与初始时刻 t_0 无关，则系统是一致渐进稳定的。

定义 1.4 全局渐进稳定 如果系统的平衡状态 x_e 对状态空间的所有 $x(0)$ 都是稳定的



且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$, 则 x_e 是全局渐进稳定的。

如果系统的稳定性质与初始时刻 t_0 无关, 则平衡状态 x_e 是一致全局渐进稳定的。

从工程观点来看, 感兴趣的往往是在平衡状态附近比较大范围内的稳定性问题。若在状态空间中有限的范围内满足稳定条件, 则系统称为“局部稳定”。

1.2 李雅普诺夫稳定性定理

李雅普诺夫第二方法又称“李雅普诺夫直接法”, 这一方法的优越性在于可在不解微分方程的条件下确定系统的稳定性。该方法建立在能量观点的基础上, 若系统的某个平衡状态是渐近稳定的, 则随着系统的运动其存储的能量将随时间增长而不断衰减。直至 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统运动趋于平衡状态而能量趋于极小值。由此, 李亚普诺夫创立了一个可模拟系统能量的“广义能量”函数, 根据这个标量函数的性质来判断系统的稳定性。由于该方法不必求解系统的微分方程就能直接判断其稳定性, 故又称为“直接法”, 其最大的优点在对于任何复杂系统都适用。

对于由式 (1.1) 描述的系统, 如果

$$f(0, t) = 0 \quad (1.10)$$

则系统可能的平衡状态为 $x_e = 0$, 即为坐标原点 0。

为了分析系统的稳定性, 李雅普诺夫引出一个虚构的能量函数, 称为“李雅普诺夫函数”。分析这一函数及其一次导数的定号性而获得系统稳定性的有关信息。李雅普诺夫第二方法概念直观, 方法具有一般性且物理意义清晰。下面介绍李雅普诺夫函数和李雅普诺夫稳定性定理及其应用。

李雅普诺夫函数 $V(x, t)$ 是状态变量的函数, 它是一个广义的“能量函数”, 并应具有下列性质:

- (1) $V(x, t)$ 的一次偏导数是连续的;
- (2) $V(x, t)$ 是正定的, 即对所有 $\|x\| > 0$, 有 $V(x, t) > 0$ 且 $V(0) = 0$ 。

对于线性系统寻找李雅普诺夫函数比较简单, 选为系统状态变量 x 的二次型函数, 即

$$V(x, t) = x^T P x \quad (1.11)$$

为了 $V(x, t)$ 正定, P 应是正定矩阵。

对于一个复杂的系统, 要想找到一个合适的李雅普诺夫函数比较困难。设系统方程为式 (1.1) 并设 $f(0, t) = 0$, 即原点为系统的平衡点, 对此系统有如下定理。



定理 1.1 李雅普诺夫稳定性定理

对于式 (1.1) 描述的系统, 如果在包含原点 O 在内的某个域 D 内存在李雅普诺夫函数 $V(x, t) > 0$, 而且 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 则系统在原点 O 是稳定的。

证明: 用 D_ε 表示中心为原点 O , 半径为 ε 的球的内部, 以 S_ε 表示此球的表面。设 $V(x, t)$ 为正定, $\dot{V}(x, t) \leq 0$, $V(x, t)$ 在 S_ε 上的最小值为 m ; 以 D_δ 表示中心为原点 O , 半径为 δ 的球的内部, 并设在球体 D_δ 内各点的 $V(x, t) < m$ 。设在 D_δ 之中有任意一点 x_0 , 下面来研究由 x_0 出发的轨线 $x(t) = x(x_0, t)$ 的变化情况。假定在某一时刻 t_1 , $x(t_1)$ 穿过 S_ε , 由于

$$\dot{V}(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i < 0 \quad (1.12)$$

故沿运动轨线 $x(t)$, $V(x, t)$ 并不增加, 因此有 $V[x(t_1)] \leq V(x_0) < m$; 另一方面, m 表示在 S_ε 上 $V(x, t)$ 的最小值, 如果 $x(t_1)$ 超出 S_ε 的边界, 则必有 $V[x(t_1)] \geq m$, 上面的结果是矛盾的。由此可以说明随着时间的延长, $x(t)$ 不能超出 S_ε 的边界。因此系统在原点稳定, 定理得证。

定理 1.2 李雅普诺夫渐近稳定性定理

对式 (1.1) 描述的系统, 如果在包含原点 O 在内的某个域 D 内, 存在李雅普诺夫函数 $V(x, t) > 0$, 且 $\dot{V}(x, t) < 0$, 则系统在原点 O 是渐进稳定的。

证明: 设表示中心为原点 O , 半径为 r 的球的内部。若 x_0 在 D_r 之内, 当 $t > 0$ 时, 设 $x(t, x_0)$ 不会跑出 D_r 之外; 设 ε 为任意小的正数, 由前面的定理可有 $\delta(\varepsilon) > 0$ 。当 x_0 在 D_δ 之内时, $x(t, x_0)$ 在 D_ε 内。今设 x_0 在 D_r 之内, 设在 $t > 0$ 时不落入 D_δ , 则 $x(t, x_0)$ 将落入 D_δ 和 D_r 两球之间, 即 D_δ 与 D_r 之间的区域。但在此中间层内, $\dot{V}(x, t) < 0$, 因此存在某个常数 $k > 0$, 使得中间层内 $\dot{V}(x, t) < -k$, 于是由下式

$$V(x, t) = V(x_0) + \int_0^t d\tau$$

可得

$$V(x, t) < V(x_0) - kt \quad (1.13)$$

当 t 不断增长时, $V(x, t)$ 渐渐减小。但 $V(x, t)$ 为正定函数, 不可能变负, 而是渐渐趋近于 0。经过一段时间之后, $x(t, x_0)$ 将落入 D_δ 。 $\delta(\varepsilon)$ 是这样选择的, 当 $x(t, x_0)$ 落入 D_δ 之后不能跑出 D_ε , 即 D_δ 在 D_ε 之内。由于 ε 是任意小的数, D_ε 可趋近于 0, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$, 即系统渐进稳定, 定理得证。



1.3 线性离散系统李雅普诺夫稳定性分析

前面我们以连续时间系统为对象，讨论了系统的零输入响应即自由运动的稳定性。现在我们把这一讨论推广到离散时间系统，讨论李雅普诺夫第二方法在线性离散系统稳定性分析和系统状态反馈设计中的应用。

设系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) \quad (1.14)$$

其中， X 为 n 维状态向量， A 为 $n \times n$ 维常数矩阵。

定理 1.3 离散系统的渐进稳定 对于离散系统式 (1.14)，如果存在一个对于 $X(k)$ 的标量函数 $V(X(k))$ ，对于任意的 $X(k)$ 满足如下条件：

- (1) $V(X(k))$ 为正定；
- (2) $\Delta V = V(k+1) - V(k)$ 为负定。

则原点为平衡状态，即 $X=0$ 为渐近稳定。

定理 1.3 给出了构造线性离散系统李雅普诺夫函数的通用方法。本章主要是基于李亚普诺夫直接法设计使线性定常系统稳定的控制器。下面应用这个定理讨论离散系统的状态反馈控制器设计问题。

设不稳定的线性定常系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (1.15)$$

其中，状态反馈律具有下述形式

$$u(k) = KX(k) \quad (1.16)$$

系统式 (1.15) 在状态反馈律如式 (1.16) 作用下闭环系统为

$$X(k+1) = A_c X(k) \quad (1.17)$$

其中， $A_c = A + BK$ 。

对于离散系统式 (1.17)，选下列二次型函数为系统的李雅普诺夫函数

$$V(X) = X^T P X, \quad (1.18)$$

其中， P 为 $n \times n$ 维对称正定矩阵，求 V 的增量

$$\Delta V = V(k+1) - V(k) = X^T (A_c^T P A_c + P) X \leq X^T (A_c^T P A_c + P) X \quad (1.19)$$

由于 $V(X)$ 取正定，如果要使系统渐进稳定，必须使 $A_c^T P A_c + P$ 为负定，即要求

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P < 0 \quad (1.20)$$

成立，证明完毕。

解不等式 (1.20) 即求解一个代数的矩阵不等式，这并不是一件容易的事情。20 世



纪90年代初,随着求解凸优化问题的内点法的提出,线性矩阵不等式再次受到控制界的关注并被应用到系统和控制的各个领域。众所周知,线性矩阵不等式在控制领域得到了广泛的应用。因为它克服了黎卡提(Riccati)方程求解困难,含有不定参数,需要人为确定参数的缺点。随着求解线性矩阵不等式的内点法的提出,可以求解线性矩阵不等式的软件包的大量出现,许多控制问题都可以采用线性矩阵不等式这一工具来处理,它通过将问题转化为一个线性矩阵不等式的可行性问题或者一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题。由于这里利用 Matlab 的线性矩阵不等式(LMI)工具箱将渐近稳定性问题等价于线性矩阵不等式的可行性问题。

式(1.19)和式(1.20)中存在两个未知矩阵变量 P 和 K ,且这两个矩阵变量以非线性的形式出现在这个矩阵不等式中,因此要直接从以上矩阵不等式中求解 P 和 K 是很困难的。可以通过矩阵的舒克尔补(Schur Complement)性质将矩阵不等式进行等价变换,然后通过一个适当的变量替换。将非线性矩阵不等式(1.20)转化为一个等价的关于新变量的线性矩阵不等式,从而可以利用 Matlab 的 LMI(线性矩阵不等式)工具箱求得可行解。

舒克尔补性质非常有用,借助它可将某些二次非 LMI 转化为 LMI。根据矩阵的舒克尔补性质,矩阵不等式(1.20)等价于

$$\begin{bmatrix} P_1 & A^T + K^T B^T \\ A + BK & Q_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (1.21)$$

其中, $Q_2 = P_2^{-1}$ 。用 $\text{diag}(Q_1, I)$ 分别左乘和右乘不等式两边,并定义 $KQ_1 = Y$, 得到

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 A^T + Y^T B^T \\ A Q_1 + B Y & Q_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (1.22)$$

$$Q_2 \leq Q_1$$

矩阵不等式(1.22)是一个线性矩阵不等式,因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断该线性矩阵不等式的可行性,进而可以得到使系统式(1.14)渐近稳定的反馈控制器

$$u(k) = YQ_1^{-1}X(k)$$

1.4 约束系统的稳定性分析

控制输入饱和(执行器饱和)是控制系统最为常见的约束。引入饱和后系统具有局部渐近稳定特性,其稳定性分析的一个重要问题是估计系统的吸引域。如何获得尽可能大的吸引域估计,即在吸引域内得到尽可能大的不变集,以减少估计的保守性成为研究



的热点问题。

1.4.1 状态反馈控制系统稳定性分析

1. 离散时间系统

考虑约束离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + B\sigma(u(k)) \quad (1.23)$$

其中, $x \in R^n$ 为状态变量, $u \in R^m$ 为控制输入, A 和 B 是适当维数的常数矩阵。函数 $\sigma: R^m \rightarrow R^m$ 为标准饱和函数, 即 $\sigma(u) = [\sigma(u_1) \ \sigma(u_2) \ \cdots \ \sigma(u_m)]^T$, 其中 $\sigma(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{1, |u_i|\}$, 给定状态反馈控制器

$$u = Kx \quad (1.24)$$

定义整数集 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, 并且 B_i 表示矩阵 B 的第 i 列, K_i 表示矩阵 K 的第 i 行, 则相应的闭环系统可以表示为

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^m B_i \sigma(K_i x(k)) = Ax(k) + \sum_{i \in M} B_i \sigma(K_i x(k)) \quad (1.25)$$

定义 1.5 对于 $x(0) = x_0 \in R^n$ 为系统式 (1.25) 的状态轨迹, 如果从某个有限的区域内出发的系统状态轨迹始终保持在这个区域内, 那么这个区域被称为“不变域”。

定义 1.6 给定对称正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和一个正数 $\rho > 0$, 记椭圆 $\Omega(P, \rho) = \{x \in R^n : x^T P x \leq \rho\}$ 。选择 $V = x^T P x$ 为 Lyapunov 函数, 若对于所有的 $x \in \Omega(P, \rho)$, 有 $\Delta V = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) < 0$, 则椭圆 $\Omega(P, \rho)$ 被称为“收缩不变”。

定义 1.7 由初始状态 $x(0) = x_0 \in R^n$ 出发的系统式 (1.25) 状态轨迹 $\psi(k, x_0)$ 的集合

$$\varphi := \left\{ x_0 \in R^n : \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k, x_0) = 0 \right\}$$

被称为“系统的原点吸引域”。

由于获得吸引域的确切值比较困难, 因此获得尽可能大的吸引域估计值是非常重要的。显然如果 $\Omega(P, \rho)$ 是收缩不变集, 那么椭圆 $\Omega(P, \rho)$ 位于吸引域内, 即饱和系统式 (1.25) 的吸引域可以依靠构造这样的椭圆不变集来估计。

借助椭圆不变集估计系统的吸引域, 将归结为以下两个问题:

- (1) 一个椭圆集是位于吸引域内不变集的条件;
- (2) 最大椭圆不变集的计算方法。



下面分别对这两个问题进行讨论。这一部分首先通过引入多个辅助反馈矩阵的形式对饱和项进行处理,然后利用两个松弛矩阵,结合 Lyapunov 稳定性理论给出保守性较小的闭环系统局部渐近稳定的条件。

定义 1.8^[1] 给定一个整数集 M , 集合 N 是 M 的所有的子集的集合, 记为 $N = \{S: S \subseteq M\}$ 。 S^c 表示属于 M 中集合 S 的补集, 记为 $S^c = \{i \in M: i \notin S\}$ 。

显然集合 N 中共有 2^m 个 S_j , $j=1, \dots, 2^m$ 。若 $S_j \in N$, 则 $S_j^c \in N$ 。利用定义 1.8, 可以引入多个辅助矩阵 H^{S_j} 来处理饱和和非线性。用 $H_i^{S_j}$ 表示矩阵 H^{S_j} 的第 i 行, 给出下面的饱和特性的多参数描述形式。

引理 1.1 给定 $z \in R^m$ 和 $|H_i^{S_j} x| \leq 1$, $i \in S_j$, 那么

$$z^T \sigma(Kx) \leq \max_{S_j \in N} \left\{ \sum_{i \in S_j^c} z_i K_i x + \sum_{i \in S_j} z_i H_i^{S_j} x \right\}$$

证明:

$$z^T \sigma(Kx) = \sum_{i=1}^m z_i \sigma(K_i x)$$

对于每个 $z_i \sigma(K_i x)$, 可能存在如下情况:

- (1) 如果 $|K_i x| \leq 1$, 那么 $z_i \sigma(K_i x) = z_i K_i x = \max(z_i K_i x, -|z_i|)$;
- (2) 如果 $|K_i x| > 1$, $z_i K_i x > 0$, 那么 $z_i \sigma(K_i x) = z_i \text{sign}(K_i x) \leq z_i K_i x = \max(z_i K_i x, -|z_i|)$;
- (3) 如果 $|K_i x| > 1$, $z_i K_i x < 0$, 那么 $z_i \sigma(K_i x) = z_i \text{sign}(K_i x) \leq -|z_i| = \max(z_i K_i x, -|z_i|)$ 。

综合上面的分析可以得到

$$z^T \sigma(Kx) \leq \sum_{i=1}^m \max\{z_i K_i x, -|z_i|\} \leq \max_{S_j \in N} \left\{ \sum_{i \in S_j^c} z_i K_i x + \sum_{i \in S_j} z_i H_i^{S_j} x \right\}$$

为了利用引理 1.1 中描述的饱和特性的多参数描述形式估计闭环系统式 (1.25) 的吸引域, 引入两个松弛变量矩阵 P_2 和 P_3 , 容易得到

$$(P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T \sum_{i=1}^m B_i \sigma(K_i x) \leq (P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T \max_{S_j \in N} \left\{ \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i x + \sum_{i \in S_j} B_i H_i^{S_j} x \right\} \quad (1.26)$$

通过这种方法, 可以将用 2^m 个辅助变量 H^{S_j} 来描述的饱和和非线性特性引入到稳定性条件 $\Delta V(x(k+1), x(k)) < 0$ 中得到定理 1.4。为了简化, 下文中对称矩阵中的符号 “*” 表示沿对角线对称位置的块矩阵的转置。



定理 1.4 考虑带有给定状态反馈控制式(1.24)的系统式(1.23), 对于每一个 $S_j \in N$, $j=1, \dots, 2^m$, 若存在正定矩阵 $P_1 > 0$ 和矩阵 P_2 , 以及 P_3 和 $H^{S_j} \in R^{m \times n}$, 当 $x(k) \in \Omega(P_1, 1)$ 时, 使矩阵不等式(1.27)和式(1.28)成立, 即

$$\begin{bmatrix} P_2^T (A + \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i + \sum_{i \in S_j} B_i H_i^{S_j}) + (A + \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i + \sum_{i \in S_j} B_i H_i^{S_j})^T P_2 - P_1 & * \\ P_3^T (A + \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i + \sum_{i \in S_j} B_i H_i^{S_j}) - P_2 & P_1 - P_3 - P_3^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.27)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & H_i^{S_j} P_1^{-1} \\ * & P_1^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad i \in S_j, \quad j=1, \dots, 2^m \quad (1.28)$$

其中, $H_i^{S_j}$ 表示 H^{S_j} 的第 i 行。那么椭圆集 $\Omega(P_1, 1)$ 位于吸引域内, 并且是严格不变的。

证明: 考虑二次函数 $V = x^T P_1 x$, $P_1 > 0$ 。若 $x(k) \in \Omega(P_1, 1)$ 位于吸引域内, 必有

$$\Delta V = x(k+1)^T P_1 x(k+1) - x(k)^T P_1 x(k) < 0, \quad \forall x \in \Omega(P_1, 1)$$

引入等式条件^[2]

$$2(P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T (Ax(k) + \sum_{i=1}^m B_i \sigma(K_i x(k)) - x(k+1)) = 0 \quad (1.29)$$

其中, P_2 和 P_3 是适当维的两个任意矩阵, 那么

$$\Delta V = x(k+1)^T P_1 x(k+1) - x(k)^T P_1 x(k) + 2(P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T (Ax(k) + \sum_{i \in M} B_i \sigma(K_i x(k)) - x(k+1)) \quad (1.30)$$

当 H^{S_j} 满足条件 $|H_i^{S_j} x| \leq 1$, $i \in S_j$ 时, 如果

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq x(k+1)^T P_1 x(k+1) - x(k)^T P_1 x(k) \\ &\quad + (P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T (Ax(k) - x(k+1)) \\ &\quad + \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i x(k) - 2 \sum_{i \in S_j} |(P_2 x(k) + P_3 x(k+1))^T B_i| \end{aligned} \quad (1.31)$$

根据引理 1.1, 可以得到

$$\Delta V \leq 0$$

将公式(1.31)写成下面的矩阵不等式形式

$$\Delta V \leq \xi^T \begin{bmatrix} P_2^T \bar{A} + \bar{A}^T P_2 - P_1 & * \\ P_3^T \bar{A} - P_2 & P_1 - P_3 - P_3^T \end{bmatrix} \xi = \xi^T \Gamma \xi$$

其中, $\bar{A} = A + \sum_{i \in S_j^c} B_i K_i + \sum_{i \in S_j} B_i H_i^{S_j}$, $\xi = [x(k)^T \quad x(k+1)^T]^T$ 。由于 $\Gamma < 0$, 故 $\Delta V < 0$, 即