

高等数学

(干部班适用)

卷 二

王桀芳 王载舆 刘宝三 编
胡淑洪 程紫明 钱文侠

人民教育出版社



高等数学

(干部班适用)

卷 二

王渠芳 王载舆 刘宝三
胡淑洪 程紫明 钱文侠



人民教育出版社

本书初版于1958年出版，现由原编者根据一年以上的试用情况作了一次修订。新修订版分为二卷出版，而原来在编写方面的特点则仍予保留。本书为第二卷，其主要内容有：空间解析几何、多元函数、重积分、曲线积分与曲面积分及无穷级数。

本书适用于干部班学员，也可以作为业余大学的教材及干部自学用书。

高 等 数 学

(干部班适用)

卷 二

王渠芳 王载舆 刘宝三 编
胡淑洪 程紫明 钱文侠

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.625 字数 178,000

1961年12月第1版 1981年9月第12次印刷

印数 71,201—88,200

书号 13012·0529 定价 0.60 元

卷二目录

第十三章 空间直角坐标系	1
13-1 空间直角坐标 13-2 空间解析几何中的两个简单问题 13-3 曲面与方程 总结 问题和习题	
第十四章 矢量代数	10
14-1 矢量的线性运算 14-2 矢量投影·方向余弦 14-3 矢量的分解 14-4 矢量的乘积 总结 问题和习题	
第十五章 平面与直线	26
15-1 平面方程 15-2 两平面的关系 15-3 空间直线方程 15-4 空间两直线的夹角 总结 问题和习题	
第十六章 二次曲面、柱面及空间曲线	40
16-1 二次曲面 16-2 柱面 16-3 空间曲线 总结 问题和习题	
第十七章 多元函数	52
17-1 基本概念 17-2 二元函数的导数与微分 17-3 极值及其充要条件 17-4 多元函数的台劳公式 17-5 方向导数 总结 问题和习题	
第十八章 重积分	94
18-1 二重积分概念 18-2 二重积分计算方法 18-3 二重积分应用 18-4 三重积分 总结 问题和习题	
第十九章 曲线积分与曲面积分	125
19-1 曲线积分概念 19-2 格林公式 19-3 曲线积分与路径无关的条件 19-4 全微分准则 19-5 曲面积分概念 总结 问题和习题	
第十二章 无穷级数	156
20-1 数项级数·数项级数的收敛性 20-2 数项级数收敛的必要条件 20-3 无穷等比级数与 p 级数 20-4 交错数项级数 20-5 比率准则(达朗贝尔准则) 20-6 幂级数及其收敛域·收敛半径 20-7 幂级数的逐项微分与逐项积分 20-8 函数展开为幂级数(台劳级数) 20-9 台劳级数在近似计算中的应用 20-10 以 2π 为周期的函数展开为三角级数(富里哀级数) 20-11 以 $2L$ 为周期的函数 总结 问题和习题	

第十三章 空間直角坐标系

13-1. 空間直角坐标

空間解析几何是用代数方法来研究空間的几何問題的。首先須解决怎样用数来确定空間点的位置。例如，气象台放出一个气球，要想說明某时刻气球的位置，只說明多高，或是只說明离气象台多远，还都不能达到目的。但如果說：以气象台为标准向北五百米，向东三百米，离地面四百米，这样就确定了气球在空中的位置。由此就引出空間直角坐标的概念。

空間坐标的規定如下：取三条具有共同原点且互相垂直的数軸，三条数軸的正向配置如图 13.1 所示。这样就确定了一个空間的直角坐标系。三条数軸称为坐标軸，它們的共同原点称为直角坐标系的原点，任意两坐标軸构成的平面叫做坐标面。如图 13.1 所示， O 是原点， OX, OY, OZ 是坐标軸，平面 XOY, YOZ 及 ZOX 是坐标面。通常采用的就是这种坐标系。这种坐标系叫做右手系或右旋系。

設 M 为空間的一点，过 M 向 XOY 面上作垂綫，垂足为 P (图 13.1)。在平面 XOY 上 P 点的坐标 x 和 y 分别称为 M 点的横坐标与纵坐标。若 M 在 XOY 面上方， MP 的长度就叫 M 的竖坐标；若 M 在 XOY 面下方，則 MP 的长度前边加負号称为 M 的竖坐标。竖坐标用 z 表示。点 M 記作 $M(x, y, z)$ 。

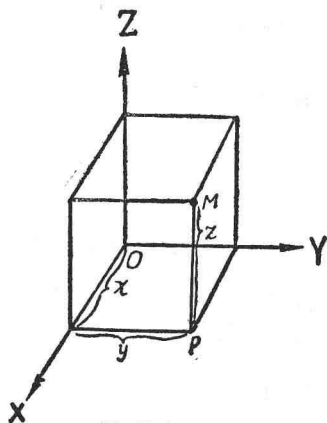


图 13.1

显然：相交于一点三个互相垂直的坐标平面把空间分成八个部分(如图 13.2)，叫做卦限，关于每一部分(卦限)里的点 M ，对它的坐标 x, y, z 的符号作如下规定：

1° M 在 YOZ 平面之前， x 为正；在后 x 为负。

2° M 在 XOZ 平面之右， y 为正；在左 y 为负。

3° M 在 XOY 平面上方， z 为正；在下 z 为负。

空间的点与数组 (x, y, z) 的一一对应关系也和平面上的相似：在坐标空间中选定一点，就能得到三个有次序的数来表示它的位置；反过来说，给定有先后次序的三个数 x, y, z ，必能找到一点，使第一个坐标为 x ，第二个坐标为 y ，第三个坐标为 z 。

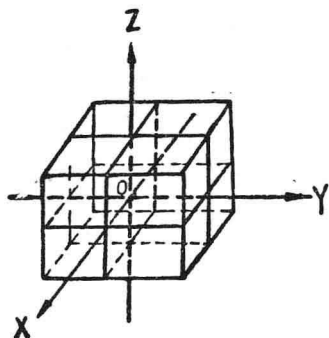


图 13.2

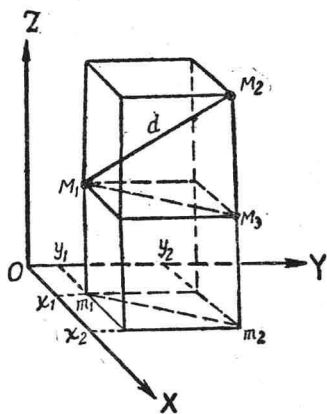


图 13.3

13-2. 空间解析几何中的两个简单问题

(一) 任意两点间的距离

设空间有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 。求此两点间的距离 d 。设两点在 XOY 面上的垂足各为 m_1, m_2 。过 M_1 作 M_1M_3 平行于 m_1m_2 (图 13.3)。由于 $\triangle M_1M_2M_3$ 为直角三角形，所以得

$$d = \sqrt{(M_1M_3)^2 + (M_3M_2)^2} = \sqrt{(m_1m_2)^2 + (M_3M_2)^2}. \quad (13.1)$$

其中 m_1, m_2 各为平面上的点, 由平面解析几何求平面上两点间的距离公式知

$$(m_1m_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (13.2)$$

又由图可看出

$$m_1M_1 = m_2M_3 = z_1,$$

而

$$M_3M_2 = m_2M_2 - m_2M_3 = z_2 - z_1,$$

所以得出

$$(M_3M_2)^2 = (z_2 - z_1)^2. \quad (13.3)$$

以(13.2)及(13.3)代入(13.1)得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (13.4)$$

由此可得出任一点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (13.5)$$

例 1. 已知两点 $(-1, 0, 2), (3, -2, 4)$; 求此两点间的距离。

解: 将两点坐标代入公式(13.4), 得

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(3+1)^2 + (-2-0)^2 + (4-2)^2} = \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} = 4.9. \end{aligned}$$

例 2. 求点 $(3, 4, 5)$ 到原点的距离。

解: 将两点坐标代入公式(13.5), 得

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7.07.$$

(二) 线段的定比分点

设已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 连接成一线段, 求在此线段上满足 $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ 的点 M 的坐标 x, y, z 。和平面解析几何相仿, 有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (13.6)$$

若 $\lambda = 1$, 即 $M_1M = MM_2$, 在几何意义上, M 就是 M_1M_2 的中点, 这时得到求线段中点的公式如下:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (13.7)$$

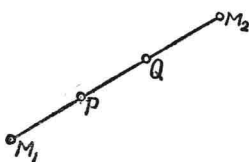


图 13.4

例 1. 已知空間兩點 $M_1(1, 2, -4)$ 及 $M_2(2, 3, 0)$, 求此線段的三等分點的坐標。

解: 設線段中兩個分點各為 $P(x, y, z)$ 及 $Q(x', y', z')$ (圖 13.4), 易知:

$$\frac{M_1P}{PM_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{M_1Q}{QM_2} = \frac{2}{1};$$

所以 P 點的坐標為

$$x = \frac{1+1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{2+\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}, \quad z = \frac{-4+0}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-8}{3};$$

Q 點的坐標為

$$x' = \frac{1+4}{1+2} = \frac{5}{3}, \quad y' = \frac{2+6}{1+2} = \frac{8}{3}, \quad z' = \frac{-4+0}{1+2} = \frac{-4}{3}.$$

13-3. 曲面與方程

和平面解析幾何相仿, 空間解析幾何利用空間坐標法, 把由點構成的幾何圖形和代數表达式聯繫起來。空間解析幾何也研究兩方面的問題, 就是: 知道了幾何關係來建立方程和由已知方程來研究圖形。現在用幾個例子來說明第一方面的問題, 第二方面的問題在第十六章中講述。

把曲面看作空間動點 $M(x, y, z)$ 的軌跡, 根據動點運動規律, 得到一個含 x, y, z 的方程 $F(x, y, z) = 0$ 。在曲面上的點, 其坐標都滿足這個方程, 同時坐標滿足方程的點都在曲面上, 此方程叫做曲面的方程。因此要檢驗點是否在曲面上, 只要把點的坐標代入方程, 看它是

否滿足此方程即可。若滿足方程則說明該点在曲面上，若不滿足方程則說明該点不在曲面上。建立曲面方程的方法則和平面解析几何建立曲綫方程的方法相似。

例 1. 設有与两定点 $A(-1, 0, 4)$ 和 $B(1, 2, -1)$ 等距离的点的軌迹，試建立它的方程。

解：和平面解析几何中的方法相仿，由已知条件来建立曲綫方程，分成如下几个步驟：

1° 設 $M(x, y, z)$ 为曲面上动点。

2° 由条件得

$$|MA| = |MB|.$$

3° 引入坐标得

$$\begin{aligned} |MA| &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2}, \\ |MB| &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}; \end{aligned}$$

于是

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}.$$

两端平方后，化簡得

$$4x + 4y - 10z + 11 = 0.$$

事实上，这就是 A, B 两点的联綫的垂直平分面的方程。

例 2. 求以定点 $C(a, b, c)$ 为中心，以 R 为半徑的球面的方程。

解：

1° 設 $M(x, y, z)$ 为球面上动点。

2° 由立体几何知，球面上任一点至中心的距离等于半徑，即

$$|MC| = R.$$

3° 引入坐标得

$$\begin{aligned} |MC| &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} &= R. \end{aligned}$$

于是

两边平方得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (13.8)$$

如果球心在原点, 則得

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (13.9)$$

(13.8) 为球面方程的标准形式, (13.9) 则为球面方程的最简形式。

例 3. 檢驗下列各点是否在球面 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ 上:

$$(1) M_1(1, 0, 3), (2) M_2(1, 1, 7).$$

解: 根据曲面与其方程的概念, 将点的坐标代入球面方程, 看是否满足。将 M_1 的坐标代入球面方程, 若該点在球面上, 則应有

$$(1-1)^2 + (0+2)^2 + (3-3)^2 = 5^2,$$

但

$$0 + 4 + 0 \neq 25,$$

M_1 的坐标不满足此球面方程, 故知 M_1 不在球面上。将 M_2 的坐标代入球面方程的左端, 得

$$(1-1)^2 + (1+2)^2 + (7-3)^2,$$

化簡得

$$0 + 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

M_2 的坐标满足此球面方程, 故知 M_2 在球面上。

总 結

空間解析几何的基本問題, 是由点与坐标的关系, 規定曲面及其方程, 并运用坐标方法研究空間曲面和曲綫性质。其中有以下的两个簡單問題:

1. 任意两点間的距离。

两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 間的距离 d 为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

空間任一点 $M(x, y, z)$ 至原点的距离 d 为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. 綫段的定比分点

已知綫段兩端点坐标 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 。一点将此綫段所分成的比为 $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ 。求分点 $M(x, y, z)$ 。

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

若分点 M 为綫段中点, 則其坐标公式如下:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

曲面方程的建立方法和平面解析几何曲綫方程的建立法相似, 步驟如下。

- 1° 設 $M(x, y, z)$ 为曲面上的动点。
- 2° 根据几何条件建立等式关系。
- 3° 用坐标 x, y, z 代入等式, 化簡即得所求曲面方程。

按上法建立的球面方程如下:

中心在 $M(a, b, c)$ 而半徑为 R 的球面方程为:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

于特例, 中心在原点而半徑为 R 的球面方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

問題和习題

1. 若 P 在 XOY 面上, z 之值如何? P 在 YOZ 面上, x 之值如何? P 在 ZOX 面上, y 之值如何?

2. 若 P 在 X 軸上, y 及 z 之值如何? 若 P 在 Y 軸上, x 及 z 之值如何? 若 P 在 Z 軸上, x 及 y 之值如何?

3. 一长方六面体有一顶点在原点, 三棱长各为 a, b, c (均为正), 求各顶点的坐标。

4. 已知空間两点的坐标, 如何求其距离?

5. 已知两定点 M_1, M_2 , 如何求定比分点的坐标?

6. 求 $M_1(1, -2, 2), M_2(3, 1, -4)$ 間的距离。

答: 7.

7. 將 $M_1(0, -1, 3)$ 和 $M_2(2, 3, -4)$ 間的联綫分成定比 $\lambda = \frac{1}{2}$, 求分点坐标。

答: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

8. 已知两点 $(3, 2, -1)$ 与 $(4, -2, 6)$, 求其联綫的中点及三等分点。

答: $(3\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2})$; $(3\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3})$, $(3\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$.

9. 描出下列各点, 并計算各点与諸轴的垂直距离, 及其与原点的距离。

- (1) $(0, 0, 4)$, (2) $(0, -2, 0)$, (3) $(3, 0, 5)$,
(4) $(7, 3, 0)$, (5) $(-2, -1, 4)$, (6) $(6, 4, -2)$.

10. 已知长方体一个对角綫的两端坐标为 $(0, 0, 0)$ 与 $(3, 6, 7)$. 試画此长方体, 使其諸棱在坐标平面上或平行于坐标平面。

11. 求由各轴至各点 (a, b, c) , $(a, b, -c)$, $(a, -b, c)$, $(-a, b, c)$, $(-a, b, -c)$, $(a, -b, -c)$, $(-a, -b, c)$, $(-a, -b, -c)$ 的垂直距离及由原点至各点的距离。各点中哪几对点对于坐标平面对称? 哪几对点对于坐标轴对称? 哪几对点对于原点对称?

12. 过点 $(-6, 5, 2)$ 平行于 Y 轴引一直綫。求此直綫上距原点为 9 的点的坐标。

13. 設該綫平行于 X 轴; 該綫平行于 Z 轴; 分別解出上題。

14. 曲面方程是怎样建立的? 試举一例以說明。

15. 适合于 $x=y$ 的点, 在空間应有怎样的位置?

16. 描述动点的軌迹, 設該点按下述規則而移动:

- (1) 与 Y 轴的垂直距离为 3。
(2) 与原点的距离为 6。
(3) 与坐标平面 XOY 及 YOZ 的垂直距离相等。
(4) 与坐标平面 ZOX 的垂直距离为 5。

17. 以原点为中心, 以 R 为半径的球面方程如何?

18. 以 XOY 坐标面上一一点为中心, 以 R 为半径的球面方程如何?

19. 求一-动点与两定点 $P(0, 1, 2)$, $Q(2, -3, 0)$ 等距离的点的軌迹。

答: $x-2y-z-2=0$.

20. 求一-动点到两定点 $C(0, 0, 0)$, $(-C, 0, 0)$ 两个距离的比为一定数 k 的軌迹方程。

答: $x^2+y^2+z^2+\frac{2C(k^2+1)}{k^2-1}x+C^2=0$.

21. 一动点与点 $(6, 8, 10)$ 的距离为 5, 与 XOY 面的距离为 8, 求此动点的軌迹方程。

22. 球的半径为 3, 且中心在点 $(0, -1, 2)$, 求此球面方程。

23. 求球面方程 $4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y+16=0$ 的球心坐标及半径。

答: 球心 $(1, 2, 0)$, 半径为 1.

24. 球面过原点和点 $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$, 求此球面方程。(提示: 設球面方程为: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$)

答: $x^2+y^2+z^2-2x=0$.

25. 求以点 $(-3, 4, 2)$ 与 $(7, -2, 6)$ 的联綫为直径的球面方程。

答: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 17 = 0$.

26. 球心在点(3, 2, 7)且球面过点(5, -3, 8), 求此球面方程。

答: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 14z + 32 = 0$.

27. 求过四点(2, 0, 0), (0, -4, 0), (0, 0, 4), (8, 0, 0)的球面方程。

28. 求距点(5, 0, 0)及(-5, 0, 0)距离之和为 20 的点的轨迹方程。

答: $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 300$.

29. 求与点(-4, 3, 4)的距离等于其与 XOY 平面的距离的点的轨迹方程。

30. 有一动点, 其与各坐标平面之距离之和等于其与原点之距离, 求此动点的轨迹方程。

答: $xy + yz + zx = 0$.

第十四章 矢量代数

在一些物理量中，如温度，质量，密度等，都可以用一个数值来表示；但如力，位移，速度，加速度等，除以数值来表示外，还须要规定它的方向。为此，我们规定：有大小和方向的量叫矢量也叫向量，并且认为：方向相同长度相等的两个矢量是相等的，在这种意义下的矢量叫自由矢量。以后所讲的矢量都指自由矢量，用 $\mathbf{a}$ 表示。其长度用 $|\mathbf{a}|$ 表示。矢量的长度又叫矢量的模。因为矢量的概念是由物理量抽象而来，所以它的运算也要按照其物理意义来规定。

14-1. 矢量的线性运算

矢量的线性运算是指矢量加，减及乘常数这三种运算。力的合成与分解即是矢量的加、减法的例子。

(一) 矢量加法

设有两个力 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ ，求其合力。方法是把矢量中的一个经过平移，使 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 的起点放在一起，再以 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 为边作一平行四边形，如图 14.1，平行四边形对角线所表示的矢量，就是合力，表示为 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。这个方法叫平行四边形法。

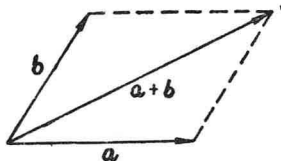


图 14.1

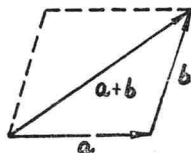


图 14.2

或者，经过平移把 $\mathbf{b}$ 的起点放在 $\mathbf{a}$ 的终点上，则由 $\mathbf{a}$ 的起点到 $\mathbf{b}$ 的终点的矢量叫 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 的和，这叫三角形法，如图 14.2。显然，两者

表示的和是相同的。三角形法是常用的方法。

对于两个以上的矢量求和,可以根据上述的运算加以推广。例如,設有五个矢量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ 。求它們的和的运算方法如下: 經過平移將 $\mathbf{a}_2$ 的起点放在 $\mathbf{a}_1$ 的終点上, 再將 $\mathbf{a}_3$ 的起点放在 $\mathbf{a}_2$ 的終点上, …… , 如此繼續作下去, 最后連 $\mathbf{a}_1$ 的起点到 $\mathbf{a}_5$ 的終点所得的矢量, 即为所求各矢量的总和, 如图 14.3。

(二) 矢量减法

已知合力 $\mathbf{a}$ 及其一分力 $\mathbf{b}$, 求另一分力。方法是把 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 的起点放在一起, 把 $\mathbf{b}$ 的終点和 $\mathbf{a}$ 的終点联結起来, 所得的矢量就是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差, 即另一分力, 用 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 表示, 如图 14.4。因为矢量减法可看作矢量加法的逆运算, 所謂求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差, 就是要找一个 $\mathbf{c}$ 使 $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$, 由图可以看出, 这个 $\mathbf{c}$ 就是从 $\mathbf{b}$ 的終点联到 $\mathbf{a}$ 的終点而成的矢量。

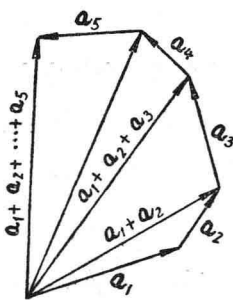


圖 14.3

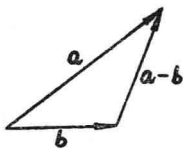


圖 14.4

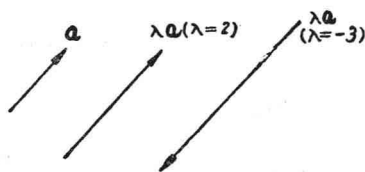


圖 14.5

(三) 矢量乘以常数

矢量 $\mathbf{a}$ 乘以常数 λ 的意义如下: 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反, 它們的模都是 $|\lambda| |\mathbf{a}|$, 如图 14.5。

14-2 矢量投影 · 方向余弦。

(一) 矢量在軸上的投影及有关投影的主要定理

設有一矢量 $\mathbf{c}$ ，其始点及終点各为 A, B ，如果只考虑大小及方向，作为矢量的几何表示可称为有向綫段，記作 $\overrightarrow{AB}$ 。过其始点及終点 A, B 各作一平面垂直于 u 軸，与 u 軸交于 a, b 。由 a 到 b 的方向与 u 軸的方向一致时 ab 为正，否則为負。此 ab 的代数值叫 $\mathbf{c}$ 在 u 軸上的投影，記作 $(\overrightarrow{AB})_u$ ，如图 14.6。

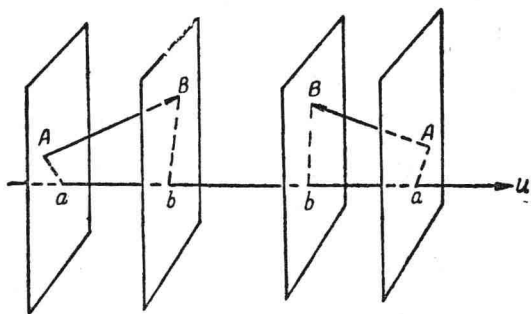


图 14.6

在計算矢量投影时，需要知道两个矢量之間的夹角，今規定空間两矢量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的夹角为：由空間任一点 O 引两矢量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 各平行于矢量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ，如图 14.7。其間夹角就是两矢量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 間的夹角。

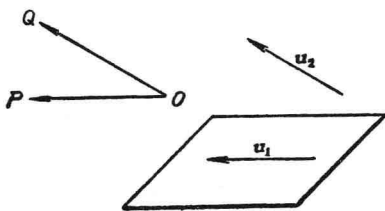


图 14.7

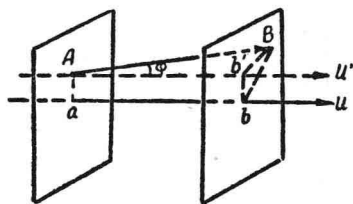


图 14.8

常用到的投影定理有二：

定理一：矢量 $\mathbf{c}$ (表为 $\overrightarrow{AB}$) 在 u 軸上的投影等于它的长度乘以夹角 φ 的余弦(如图 14.8)，即

$$(\overrightarrow{AB})_u = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi. \quad (14.1)$$

因为,过 A 作 u' 轴平行于 u 轴, $\vec{AB}$ 在 u 轴上的投影 ab 等于 $\vec{AB}$ 在 u' 轴上的投影 Ab' , 又 u' 轴垂直于过 B 点的平面。故 $\triangle Ab'B$ 为直角三角形, 而

$$Ab' = |\vec{AB}| \cos \varphi,$$

即

$$(\vec{AB})_u = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$

定理二: 諸矢量之和(表为 $\vec{AD}$) 在 u 轴上的投影等于各矢量在该轴上的投影之和(图 14.9 表示三个矢量 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ 之和在 u 轴上的投影)。

$$(\vec{AD})_u = (\vec{AB})_u + (\vec{BC})_u + (\vec{CD})_u. \quad (14.2)$$

由图 14.9, 即可看出右端各矢量投影之和为 $ab + bc + cd$; 而 $\vec{AD}$ 在 u 轴上的投影也正是如此。

已知矢量两端点坐标, 求该矢量在坐标轴上的投影。

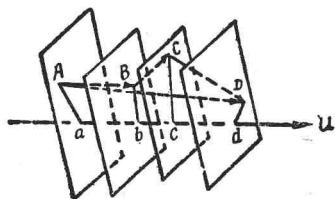


圖 14.9

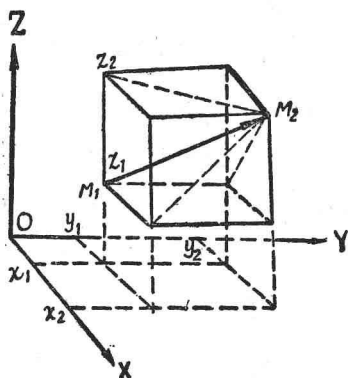


圖 14.10

設矢量 α 的两端点各为 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 。如图 14.10。显然 $\vec{M_1M_2}$ 在坐标轴上的投影 X, Y, Z 各为:

$$X = x_2 - x_1; \quad Y = y_2 - y_1; \quad Z = z_2 - z_1. \quad (14.3)$$

(二) 矢量的方向余弦

要想确定空間矢量的方向, 就需要知道矢量与三个坐标轴正向的