非线性微分方程

傅希林　范进军　编著

科学出版社

非线性微分方程

傅希林　范进军　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书旨在介绍非线性微分方程研究的主要内容、典型方法和最新成果，其中包括作者近年的一些研究工作. 本书系统地阐述了非线性常微分方程的基本理论、几何理论、稳定性理论、振动理论与分支理论等，还分别介绍了非线性泛函微分方程及非线性脉冲微分方程的相应理论. 本书致力于核心概念的引入、基本定理的阐述、思想方法的揭示，以及非线性微分方程在现代科技领域中的应用.

本书可作为高等院校数学系、应用数学系及控制、管理、工程、医学等专业的大学生、研究生的教材或参考书，也可供相关教师及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性微分方程/傅希林，范进军编著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-031311-9

Ⅰ.①非… Ⅱ.①傅… ②范… Ⅲ.①非线性方程：常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.①O175.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 102809 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张：23 1/2
印数：1—2 500 字数：462 000

定价：68.00 元

前　言

非线性微分方程是伴随着微积分学发展起来的数学分支. 1614 年, J. Napler 在创立对数时就对微分方程的近似解进行过研究. I. Newton, G. Leibniz 的著作中都研究过与微分方程有关的问题. 在非线性微分方程理论发展的历史进程中, 无数数学家不懈努力, 进行了艰苦卓绝的探索, 取得了不朽的骄人研究成果, 竖起了一座座研究丰碑.

现代科学技术与工程诸领域的研究突飞猛进、日新月异. 大量源于现代科技研究实践的实际问题, 其数学模型往往可归结为非线性微分方程. 譬如, 关于神经网络研究中著名的 Hopfeild 模型与 Cohen-Grossberg 模型、生态学中的 Logistic 模型、气象研究中的 Lorenz 系统与最优控制中的 Chen 系统、工程中关于高速机车齿轮力学分析模型以及大量复杂网络动力学模型等. 一方面, 这些实际问题的数学模型, 通过运用非线性微分方程的理论与方法对其进行深入精细的科学分析研究, 已经取得重要的创新成果; 另一方面, 对现代科技实际问题的科研实践与探索, 又成为滋润和维系非线性微分方程自身成长和生命力的不竭源泉. 因此, 非线性微分方程是一个具有底蕴深厚、内涵丰富、应用广泛、魅力洋溢的经典传统而又充满朝气的数学分支. 它是人类智慧宝库中的璀璨宝石, 是数学联系实际、解决实际问题最重要的学科之一, 其提供的思想方法也是当代文化人自身数学素质所要求必须掌握的.

鉴于非线性微分方程在理论上和实践上的重要意义, 其基本理论知识与经典方法已公认为是大学生特别是理工科大学生所必须掌握的, 并早已纳入大学数学基础课程的教科书. 但就目前国内高校微分方程教材的现状来看, 不同程度地存在着内容相对滞后的现象, 与现代微分方程科学研究飞速发展的形势不相适应. 基于此现状, 本书主要从如下两个方面进行尝试: 一是尝试对微分方程的经典内容与现代研究成果的融合, 试图使之较好地适应于微分方程科学研究飞速发展的形势; 二是尝试将微分方程研究的创新思维和科学方法作为主线贯穿全书, 试图使之较好地适应于研究性学习及微分方程自身发展的客观规律.

基于上述目的, 本书在具体内容及结构安排上突出了以下几点: 首先, 在本书取材方面, 主要取自非线性常微分方程、非线性泛函微分方程、非线性脉冲微分方程的经典内容与最新研究成果, 这是因为关于泛函微分方程的研究自 20 世纪 80 年代以来十分活跃, 而关于脉冲微分方程的研究自 20 世纪 90 年代以来也成为国际国内非线性微分方程研究的热点; 这样取材, 既含有非线性微分方程最基本最经

典的内容, 又含有非线性微分方程现代研究的最新成果, 从而有利于较全面、系统地展现非线性微分方程研究从历史到近代、从现代到前沿的积淀与内涵; 有利于较客观、有效地反映非线性微分方程这一数学分支的结构与全貌; 有利于使读者较自然、深切地感受到非线性微分方程历史的底蕴与时代的脉搏. 其次, 在本书结构安排方面, 突出了三条脉络: 在全书框架上突出了非线性微分方程研究的整体脉络, 依次分章阐述基本理论、几何理论、稳定性理论、振动理论和分支理论等; 在每章框架上突出了非线性微分方程的历史脉络, 依次分节阐述常微分方程、泛函微分方程和脉冲微分方程的相关内容; 而在每节框架上突出了非线性微分方程的方法脉络, 强调基本概念的引入, 通过精选每一个定理和实例, 做到在阐述具体研究结果的同时着重揭示其典型研究思想与方法. 通过这样三条脉络, 不仅展示了非线性微分方程领域的研究轨迹与前沿动态, 而且还指出了达到前沿可借鉴的途径.

限于篇幅, 还有一些关于非线性微分方程的内容本书未能涉及. 譬如特征值问题、有关重要应用模型等. 另外, 从整体上看, 本书主要阐述有关非线性常微分方程的内容, 而关于非线性偏微分方程的内容涉及较少, 但这并不影响本书编著的初衷和效果. 需要这些内容的读者可查阅相关文献和著作. 当然, 限于我们的水平, 本书定会有不当之处, 敬请读者指正.

在撰写本书的过程中, 山东师范大学数学科学学院张立琴教授对该书提出宝贵意见并做了一定工作, 我们表示由衷的感谢. 科学出版社的吕虹编审和赵彦超编辑对本书的出版付出了辛勤劳动并给予了大力帮助, 在此表示深切的谢意. 同时, 我们还向在本书撰写过程中所参考的文献的作者们表示诚挚的感谢. 博士研究生孙晓辉在紧张的学习之余为书稿的录入付出了艰辛的劳动, 在此一并致谢. 本书的出版得到国家自然科学基金 (编号: 10871120)、山东省自然科学基金以及山东师范大学出版基金的资助, 均此致谢.

傅希林　范进军

2010 年 8 月

目　录

第 1 章　非线性微分方程基本理论

微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性. 众所周知, 早在 1841 年, 法国数学家 Liouville(1809~1882) 证明了 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (P(x) \neq 0)$$

除了某些特殊类型外, 一般不能用初等积分法求解. 例如, 形式上很简单的 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

就不能用初等积分法求解. 在 19 世纪后半叶, 天体力学及其他技术科学提出的一些问题中, 需要研究较复杂的微分方程解的局部和全局的性质. 但大量的微分方程不能用初等积分法求出其通解, 因而提出了直接根据微分方程本身的结构和特点来探讨解的性质.

本章研究非线性微分方程的基本理论. §1.1 研究微分方程解的局部存在性与唯一性. §1.2 研究解的延展性. §1.3 研究解对初值与参数的连续性、可微性. §1.4 研究解的整体存在性. §1.5 介绍非线性泛函微分方程的基本理论. §1.6 阐述非线性脉冲微分方程的基本理论.

§1.1　解的局部存在性与唯一性

考虑如下一阶非线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1.1}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix},\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},\ t \in R.$$

规定 $x \in R^n$ 的范数 $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 或 $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ 或 $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|x_k|\}$. 对于一般的高阶方程, 在一定条件下可化成形如方程 (1.1.1) 的等价方程.

设函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $I \subset R$ 上的导数存在. 如果把 $x = \varphi(t)$ 代入方程 (1.1.1), 得到在区间 I 上关于 t 的恒等式

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)),\ t \in I,$$

则称 $x = \varphi(t)$ 为方程 (1.1.1) 在区间 I 上的一个解. 求方程 (1.1.1) 满足某种指定条件 (通常称为定解条件) 的解的问题称为定解问题. 最重要的定解条件就是初值条件, 即 $x(t_0) = x_0$, 其中 $t_0 \in R, x_0 \in R^n$. 求微分方程 (1.1.1) 满足初值条件的解的问题称为初值问题或 Cauchy 问题, 记为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

本节主要研究 Cauchy 问题 (1.1.2) 的解的局部存在性与唯一性.

证明微分方程初值问题的解的存在性以及唯一性主要基于 Ascoli-Arzela 定理、Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映像不动点原理. 为此, 我们先给出两个概念. 设 F 是定义在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一个 m 维实列向量函数族.

一致有界 若 $\exists M > 0$, 使得 $\|f(t)\| \leqslant M$ $(\forall f \in F, t \in [\alpha, \beta])$, 则称函数族 F 是一致有界的.

等度连续 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $|t_2 - t_1| < \delta(\forall t_2, t_1 \in [\alpha, \beta])$ 时, 对一切 $f \in F$ 均有

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| < \varepsilon,$$

则称函数族 F 是等度连续的.

Ascoli-Arzela 定理 设 $F = \{f(t)\}$ 是定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的一致有界、等度连续的函数族, 其中 $f(t) \in R^m$, 则从 F 中必可选取一个在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的序列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 设 $r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的全体有理点.

首先, 构造函数序列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$.

因为集合 $\{f(r_1) : f \in F\}$ 有界, 所以可选出一个收敛的子序列 $\{f_{1n}(r_1)\}_{n=1}^{\infty}$. 同理, 集合 $\{f_{1n}(r_2)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 从而可选出一个收敛的子序列 $\{f_{2n}(r_2)\}_{n=1}^{\infty}$. 这样, 继续下去, 便得可数个收敛的子序列:

$$
\begin{gathered}
f_{11}(r_1), f_{12}(r_1), \cdots, f_{1n}(r_1), \cdots \\
f_{21}(r_2), f_{22}(r_2), \cdots, f_{2n}(r_2), \cdots \\
\cdots\cdots \\
f_{n1}(r_n), f_{n2}(r_n), \cdots, f_{nn}(r_n), \cdots \\
\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

其中 $\{f_{n+1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{f_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 $(n=1,2,\cdots)$. 如命 $f_n(t)=f_{nn}(t)(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset F$.

其次, 利用 Cauchy 准则和有限覆盖定理证明 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的.

根据 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的取法知, 它在 $[\alpha,\beta]$ 的一切有理点上是收敛的. 这样, 由数列收敛的 Cauchy 准则知, 对 $\forall\varepsilon>0,\forall r_k,\exists N_\varepsilon(r_k)>0$, 使得 $m,n>N_\varepsilon(r_k)$ 时, 有

$$\|f_m(r_k)-f_n(r_k)\|<\varepsilon.$$

根据 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的等度连续性知, 对 $\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0$, 使得 $|t_2-t_1|<\delta_\varepsilon(\forall t_2,t_1\in[\alpha,\beta])$ 时, 对一切正整数 p 有

$$\|f_p(t_2)-f_p(t_1)\|<\varepsilon.$$

由于 $[\alpha,\beta]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B(r_k,\delta_\varepsilon)$, 其中 $B(r_k,\delta_\varepsilon)=(r_k-\delta_\varepsilon,r_k+\delta_\varepsilon)$, 所以由有限覆盖定理知, $[\alpha,\beta]$ 存在有限覆盖. 不妨设为 $[\alpha,\beta]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{j}B(r_k,\delta_\varepsilon)$. 令 $N=\max\{N_\varepsilon(r_1),N_\varepsilon(r_2),\cdots,N_\varepsilon(r_j)\}$, 则当 $m,n>N$ 时, 对 $\forall t\in[\alpha,\beta]$, 必存在某一个 $k:1\leqslant k\leqslant j$, 使得 $t\in B(r_k,\delta_\varepsilon)$, 这样通过插项即得

$$\|f_m(t)-f_n(t)\|\leqslant\|f_m(t)-f_m(r_k)\|+\|f_m(r_k)-f_n(r_k)\|+\|f_n(r_k)-f_n(t)\|<3\varepsilon.$$

由函数列收敛的 Cauchy 准则知, $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset F$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的. 证毕.

Schauder 不动点定理 设 D 是 Banach 空间 E 中有界闭凸集, $T:D\to D$ 全连续, 则 T 在 D 上必有不动点.

所谓 $T:D\to D$ 全连续是指, $T:D\to D$ 是连续的, 而且又是紧的.

Banach 压缩映像原理 设 (X,ρ) 是一个完备的度量空间, $\Omega\subset X$ 是一个非空闭集, $T:\Omega\to\Omega$. 若 $\exists\alpha\in[0,1)$ 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y),\ \forall x,y\in\Omega,$$

则存在唯一的 $x^*\in\Omega$, 使得 $Tx^*=x^*$. 这样的 x^* 称为 T 的不动点. 满足上述条件的算子 T 称为压缩映像 (或压缩算子).

以上两定理的证明参阅文献 [18, 19].

定理 1.1.1(Peano, 解的存在性定理) 若 $f(t,x)$ 在空间 R^{n+1} 中某一区域

$$\overline{R}: \quad |t-t_0| \leqslant a, \ \|x-x_0\| \leqslant b \quad (a>0, \ b>0)$$

上连续, 则初值问题 (1.1.2) 至少在区间 $J: |t-t_0| \leqslant h$ 上存在一解 $x=\varphi(t)$, 其中 $h=\min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}, M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{R}}\|f(t,x)\|$.

关于该定理的证明, 这里给出 Euler 折线法、Tonelli 逼近法及 Schauder 不动点法三种证明方法.

方法 1 Euler 折线法.

以平面系统为例说明其证明思路. 从 (t_0,x_0) 出发, 沿 (1.1.2) 的方程所确定的线素场向右作直线段, 其斜率为 $f(t_0,x_0)$; 在这直线段上再取一点 (t_1,x_1), 过此点沿线素场向右再作直线段, 其斜率为 $f(t_1,x_1)$; 如此下去, 即可得到一条右行折线. 同理可得一条左行折线. 这条折线称为 (1.1.2) 的方程过点 (t_0,x_0) 的 Euler 折线. 当每次所做线段非常小时, 这条折线就近似于 (1.1.2) 的积分曲线.

证明 构造 Euler 折线, 然后使用 Ascoli-Arzela 定理证之.

首先, 构造 Euler 折线族, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 (1.1.2) 的一个 ε 逼近解 $\varphi_\varepsilon(t)$ 满足

(1) 当 $t\in J$ 时, $(t,\varphi_\varepsilon(t))\in\overline{R}$;

(2) $\varphi_\varepsilon(t)$ 在 J 上连续, 并在 J 上除有限个点外, 处处具有连续导数, 而在这有限个点处, 其左、右导数存在;

(3) $\|\varphi_\varepsilon'(t)-f(t,\varphi_\varepsilon(t))\|\leqslant\varepsilon, \forall t\in J$; 但在导数不存在点处, $\varphi_\varepsilon'(t)$ 应理解为右导数 (在 $t=t_0+h$ 处为左导数).

以右半区间 $J^+=[t_0,t_0+h]$ 为例说明上述 $\varphi_\varepsilon(t)$ 的存在性并证明定理的结论成立 (对于左半区间类似可证).

因为 $f(t,x)\in C(\overline{R})$, 所以 $f(t,x)$ 在 $\overline{R}$ 上一致连续. 故对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_\varepsilon>0$, 使得 $(t,x),(\overline{t},\overline{x})\in\overline{R}$, 且 $|t-\overline{t}|<\delta_\varepsilon, \|x-\overline{x}\|<\delta_\varepsilon$ 时有

$$\|f(t,x)-f(\overline{t},\overline{x})\|<\varepsilon.$$

对区间 J^+ 进行分割 T: $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=t_0+h$, 并使分割细度 $\|T\|$ 满足

$$\|T\|=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\{|t_{k+1}-t_k|\}<\min\left\{\delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M}\right\}.$$

定义函数 $\varphi_\varepsilon(t)$ 如下:

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(t_0)=x_0, \\ \varphi_\varepsilon(t)=\varphi_\varepsilon(t_k)+f(t_k,\varphi_\varepsilon(t_k))(t-t_k), \ t_k<t\leqslant t_{k+1}, \ k=0,1,2,\cdots,n-1. \end{cases}$$

易证这样定义的 $\varphi_\varepsilon(t)$ 即满足上述条件 (1)、(2) 和 (3).

其次, 设 ε_m 递减趋于零 $(m \to \infty)$. 由刚证得的结论知, 对每个 ε_m, 存在 (1.1.2) 的一个 ε_m 逼近解 $x = \varphi_m(t)$, 它在 J^+ 上有定义, $\varphi_m(t_0) = x_0$, 且

$$\|\varphi_m(t) - \varphi_m(\bar{t})\| \leqslant M|t - \bar{t}|, \ \forall t, \bar{t} \in J^+.$$

于是在上式中令 $\bar{t} = t_0$ 得

$$\|\varphi_m(t)\| \leqslant \|x_0\| + M|t - t_0| \leqslant \|x_0\| + Mh, \ \forall t \in J^+.$$

故 $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 J^+ 上是一致有界、等度连续的. 由 Ascoli-Arzela 定理, $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 存在一致收敛子列 $\{\varphi_{m_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, 令其极限为 $\varphi(t)$, 则 $\varphi(t) \in C(J^+)$.

最后, 证 $\varphi(t)$ 是 (1.1.2) 在 J^+ 上的解.

事实上, 由 $\varphi_m(t)$ 为 (1.1.2) 的 ε_m 逼近解知

$$\varphi_m'(t) = f(t, \varphi_m(t)) + g_m(t), \ \|g_m(t)\| \leqslant \varepsilon_m, \ t \in J^+,$$

从而

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \int_{t_0}^{t} g_m(s)ds, \ t \in J^+.$$

故

$$\varphi_{m_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{m_k}(s))ds + \int_{t_0}^{t} g_{m_k}(s)ds, \ t \in J^+.$$

由 f 在 $\overline{R}$ 上一致连续及 $\{\varphi_{m_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 在 J^+ 上一致收敛于 $\varphi(t)$ 知, $\{f(t, \varphi_{m_k}(t))\}_{k=1}^{\infty}$ 在 J^+ 上一致收敛于 $f(t, \varphi(t))$. 这样, 在上式中令 $k \to \infty$ 得

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \ t \in J^+.$$

由 $\varphi \in C(J^+)$ 知, $\varphi(t)$ 是 (1.1.2) 在 J^+ 上的解. 证毕.

方法 2 Tonelli 逼近法.

证明的基本思想是用逐次逼近法作近似解, 再用 Ascoli-Arzela 定理证之.

证明 以右行解为例给出证明, 对左行解类似可证.

对 $\forall m \in N_+$(N_+ 表示正整数集合), 令

$$\begin{cases} \varphi_m(t) = x_0, & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \dfrac{h}{m}, \\ \varphi_m(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{h}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t_0 + \dfrac{h}{m} \leqslant t \leqslant t_0 + h. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

首先, 说明定义 (1.1.3) 的合理性.

事实上, 当 $t \in \left[t_0 + \frac{h}{m}, t_0 + \frac{2h}{m}\right]$ 时, $t - \frac{h}{m} \in \left[t_0, t_0 + \frac{h}{m}\right]$, 从而 (1.1.3) 中第二式右端积分号下的函数有定义, 故 $\varphi_m(t)$ 在 $\left[t_0, t_0 + \frac{2h}{m}\right]$ 上有定义, 且在此区间上有

$$\|\varphi_m(t) - x_0\| \leqslant M\left(t - \frac{h}{m} - t_0\right) \leqslant M \cdot \frac{h}{m} \leqslant Mh \leqslant b,$$

所以 $(t, \varphi_m(t)) \in \overline{R}$.

类似地, 可以确定 $\varphi_m(t)$ 在 $\left[t_0 + \frac{2h}{m}, t_0 + \frac{3h}{m}\right]$ 上的值, 以及

$$\|\varphi_m(t) - x_0\| \leqslant M \cdot \frac{2h}{m} \leqslant Mh \leqslant b, \quad t \in \left[t_0 + \frac{2h}{m}, t_0 + \frac{3h}{m}\right].$$

故 $\varphi_m(t)$ 在 $\left[t_0, t_0 + \frac{3h}{m}\right]$ 上有定义, 且在此区间上有 $(t, \varphi_m(t)) \in \overline{R}$.

上述过程继续下去, 经有限步之后便得 $\varphi_m(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义, 且在此区间上 $(t, \varphi_m(t)) \in \overline{R}$.

其次, 证明 $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 有一致收敛子列, 且其极限函数为 (1.1.2) 的解.

事实上, 由 $\varphi_m(t)$ 的定义知, $\varphi_m(t) \in C[t_0, t_0 + h]$ 且

$$\varphi_m(t_0) = x_0, \quad \|\varphi_m(t) - x_0\| \leqslant b.$$

又由 (1.1.3) 得

$$\|\varphi_m(t_2) - \varphi_m(t_1)\| \leqslant M|t_2 - t_1|, \quad \forall t_2, t_1 \in [t_0, t_0 + h],$$

所以 $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上是一致有界且等度连续的函数族. 根据 Ascoli-Arzela 定理, $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上存在一致收敛于某一函数 $\varphi(t)$ 的子列 $\{\varphi_{m_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$. 既然每一个 $\varphi_{m_k}(t)$ 都在 $[t_0, t_0+h]$ 上连续, 因此 $\varphi(t) \in C(J^+)$, 其中 $J^+ = [t_0, t_0 + h]$. 根据 (1.1.3) 得

$$\begin{aligned}\varphi_{m_k}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{h}{m_k}} f(s, \varphi_{m_k}(s))ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{m_k}(s))ds - \int_{t-\frac{h}{m_k}}^{t} f(s, \varphi_{m_k}(s))ds.\end{aligned}$$

由于 f 在有界闭集 $\overline{R}$ 上连续, 从而一致连续, 故 $\{f(t, \varphi_{m_k}(t))\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上一致收敛于 $f(t, \varphi(t))$. 这样, 在上式中令 $k \to +\infty$ 即得

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

因此, $\varphi(t)$ 是 (1.1.2) 的解. 证毕.

方法 3 Schauder 不动点法.

在 Banach 空间 $C(J)$ 中, 通过构造适当的非空有界闭凸集 D 及适当的算子 $T: D \to D$, 利用 Schauder 不动点定理证之.

证明 令 $E = C(J)$, 并在 E 上定义范数 $\|x\|_C = \max\{\|x(t)\| : t \in J\}$ $(\forall x \in E)$, 则 E 是一个 Banach 空间. 考虑 Banach 空间 E 的一个子集

$$D = \{x \in E : \|x - x_0\|_C \leqslant Mh\},$$

并定义 D 上的算子 T:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall x \in D.$$

显然, 为了证明定理 1.1.1, 只要证明算子 T 在 D 上有一个不动点即可.

利用范数的三角不等式知, D 是 E 上的有界闭凸集及 $T: D \to D$. 下证 T 是全连续的.

首先, T 是连续的.

事实上, 令 $x_n \in D(n = 1, 2, \cdots), x^* \in D$ 且 $x_n \to x^*(n \to \infty)$, 则由收敛的定义知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使得$n > N$ 时, 对 $\forall t \in J$ 有

$$\|x_n(t) - x^*(t)\| \leqslant \|x_n - x^*\|_C < \varepsilon.$$

故函数列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J 上一致收敛于 $x^*(t)$. 又 $f(t, x)$ 在 $\overline{R}$ 上连续, 从而一致连续, 所以 $\{f(t, x_n(t))\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J 上一致收敛于 $f(t, x^*(t))$. 这样, 由

$$(Tx_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds,$$

得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(Tx_n)(t) =& x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \\
=& x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))ds \\
=& x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))ds = (Tx^*)(t),
\end{aligned}$$

此示 T 是 D 上的连续算子.

其次, T 是紧的.

事实上, 对 $\forall x \in D, t_1, t_2 \in J$, 有

$$\|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))ds\right\|\leqslant M|t_1-t_2|,$$

可见 $T(D)$ 作为定义在 J 上函数族是等度连续的. 此外,

$$\|(Tx)(t)\|=\left\|x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right\|\leqslant \|x_0\|+M|t-t_0|\leqslant \|x_0\|+Mh,$$

所以 $T(D)$ 是一致有界函数族.

这样, 由 Ascoli-Arzela 定理知, $T(D)$ 是相对紧的. 从而 T 为紧算子.

由 Schauder 不动点定理知, $\exists x^*\in D$, 使得 $Tx^*=x^*$, 即 $x^*(t)$ 为 (1.1.2) 的定义在 J 上的解. 证毕.

方程 (1.1.1) 的右端函数 $f(t,x)$ 仅仅连续, 并不能保证初值问题 (1.1.2) 解的唯一性, 如方程 $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{|x|}$ 过点 $(0,0)$ 的解就有 $x(t)\equiv 0, t\in(-\infty,+\infty)$ 和

$$x(t)=\begin{cases} 0, & t\in(-\infty,0],\\ \dfrac{t^2}{4}, & t\in(0,+\infty).\end{cases}$$

因此, 为了保证 (1.1.2) 解的唯一性, 必须对 $f(t,x)$ 再附加一定的条件. 通常的附加条件为 f 关于 x 满足 Lipschitz 条件.

定理 1.1.2(Picard, 解的存在唯一性定理) 若 $f(t,x)$ 在空间 R^{n+1} 中某一区域

$$\overline{R}: |t-t_0|\leqslant a,\ \|x-x_0\|\leqslant b\quad (a>0,b>0)$$

上连续, 并且关于 x 满足 Lipschitz 条件, 即 $\exists L>0$, 使得 $(t,x),(t,\overline{x})\in\overline{R}$ 时有

$$\|f(t,x)-f(t,\overline{x})\|\leqslant L\|x-\overline{x}\|,$$

则初值问题 (1.1.2) 至少在区间 $J: |t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一解 $x=\varphi(t)$, 其中 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}, M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{R}}\|f(t,x)\|$.

关于该定理的证明, 这里介绍逐次逼近法和 Banach 压缩映像不动点方法.

方法 1 Picard 逐次逼近法.

证明的主要思想就是从初值 x_0 开始, 通过反复迭代, 相继作一串逐次逼近序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, 然后证明这个序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J 上一致收敛于我们所要求的解.

证明 我们分五个步骤来证明之.

步骤 1. Cauchy 问题 (1.1.2) 的解等价于如下积分方程的解

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{1.1.4}$$

事实上, 令 $x=\varphi(t)$ 是 Cauchy 问题 (1.1.2) 的解, 于是由 (1.1.2) 对 t 积分便有

$$\varphi(t)=C+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds,$$

再由初值条件得 $C=x_0$, 因此 $x=\varphi(t)$ 是 (1.1.4) 的解.

反之, 设 $x=\varphi(t)$ 是积分方程 (1.1.4) 的解, 从 (1.1.4) 可知 $\varphi(t)$ 是连续的, 从而 $f(t,\varphi(t))$ 也是连续的, 因此 $\varphi(t)$ 是可微的; 于是对积分方程 (1.1.4) 的两侧求导数, 便得

$$\varphi'(t)=f(t,\varphi(t)),$$

并且由 (1.1.4) 知 $x=\varphi(t)$ 满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,$$

即 $x=\varphi(t)$ 是 (1.1.2) 的解.

步骤 2. 作 (1.1.4) 的 Picard 近似解序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

令 $\varphi_0(t)=x_0,\varphi_1(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))ds,\ t\in J$, 则

$$\|\varphi_1(t)-x_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,x_0)\|ds\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b,\ t\in J. \tag{1.1.5}$$

假设已定义第 n 次近似解为

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_{n-1}(s))ds \ \text{且}\ \|\varphi_n(t)-x_0\|\leqslant b,\ t\in J. \tag{1.1.6}$$

令第 $n+1$ 次近似解为

$$\varphi_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))ds, \tag{1.1.7}$$

则

$$\|\varphi_{n+1}(t)-x_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\varphi_n(s))\|ds\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b,\ t\in J.$$

这样, 我们利用数学归纳法得到了一个定义在 J 上的连续函数列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $(t,\varphi_n(t))\in\overline{R}(\forall n\in N_+,t\in J)$.

步骤 3. 证明序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J 上一致收敛.

由于序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛问题等价于级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]$$

的收敛问题, 故我们只要证明上级数在 J 上一致收敛即可.

由 $f(t,x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件及 (1.1.6) 得

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^n}{n!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!},\ t\in J,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{1.1.8}$$

事实上, 由 (1.1.5) 可知 (1.1.8) 对 $n=1$ 成立. 现假设 (1.1.8) 对 $n=k$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s)))ds\right\| \\
&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)\|ds\right| \\
&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^k}{k!}ds\right| \\
&\leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!},\ t\in J.
\end{aligned}$$

由此可知 (1.1.8) 对任意正整数 n 均成立. 根据函数项级数一致收敛的 M 判别法即得 $\varphi_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]$ 一致收敛. 从而 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛. 令 $\varphi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)$, 则 $\varphi(t)\in C(J)$ 且 $\|\varphi(t)-x_0\|\leqslant b$.

步骤 4. 证明 $\varphi(t)$ 是积分方程 (1.1.4) 的解.

在 (1.1.7) 中, 令 $n\to\infty$ 得

$$\varphi(t)=x_0+\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))ds.$$

由 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J 上一致收敛于 $\varphi(t)$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)>0$, 使得 $n>N$ 时, 对一切 $t\in J$ 有

$$\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\|<\frac{\varepsilon}{Lh}.$$

因此, 当 $n>N$ 时, 对一切 $t\in J$ 均有

$$\left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi(s)))ds\right\|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi_n(s)-\varphi(s)\|ds\right|\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{Lh}\cdot h=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))ds=\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds.$$