南京大学金陵学院 王国英 张 欣 编

工程数学

习题与解答 下

清华大学出版社

南京大学金陵学院 王国英 张 欣 编

工程数学
习题与解答 下

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《工程数学(二)》、《工程数学(三)》(王国英,清华大学出版社,2009)的配套教辅书,内容涵盖了主教材(复变函数、积分变换、线性代数、数值方法、概率与统计、离散数学部分)的全部习题及其解答,对初学者开拓思路、提高解题能力、深入理解教材内容有很大的帮助.

本书可供高等学校(独立学院)计算机、电子、通信类相关专业及其他非数学类专业的学生使用,对准备参加研究生入学考试的学生也有一定的参考价值,还可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学习题与解答.下/王国英,张欣编. --北京:清华大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-302-25548-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王… ②张… Ⅲ.①工程数学—高等学校—题解 Ⅳ.①TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 092603 号

责任编辑:冯 昕
责任校对:赵丽敏
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社 总 机:010-62770175
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
地 址:北京清华大学学研大厦 A 座
邮 编:100084
邮 购:010-62786544
印 装 者:北京市清华园胶印厂
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:11.5 **字 数**:248 千字
版 次:2011 年 8 月第 1 版 **印 次**:2011 年 8 月第 1 次印刷
印 数:1~3000
定 价:24.00 元

产品编号:040549-01

前言

工程数学是高等学校计算机、电子、通信等各专业必修的一门基础课.作者根据该课程的教学需要和学生学习的要求,编写了《工程数学习题与解答》一书,详细解答了《工程数学》(王国英,清华大学出版社,2009,全三册)中的全部习题.

工程数学是一门系统、综合的学科,内容广泛,教学进度快,不少习题有一定的难度,对初学者来说并不容易完成.为了弥补这一缺陷,也为了让广大读者能更有效地使用主教材,本书对主教材中的习题作了详尽的解答.为了开拓学生的眼界,还附加了一些习题(带星号者).在编写过程中力求严密,并尽量采用简便的方法,让读者更易理解.参考本书提供的解题方法,有利于读者开拓眼界,提升解题能力,掌握工程数学课程的基本概念和基本方法.

本书上册(微积分)部分章节将习题分为A组和B组,读者可根据自己的实际情况将书中内容的学习分为两个层次.下册内容包括复变函数、积分变换、线性代数、数值方法、概率与统计和离散数学.

本书注意博采众家之长,参考了不少同类书籍,获益良多,在此向这些书籍的作者深表感谢.由于编者水平所限,书中缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2010年9月

目 录

工程数学(二)

工程数学(三)

工程数学（二）

第 1 篇

复变函数

第 1 章习题一

1. 回答下列问题：

(1) a 是什么实数时，$\dfrac{a^2+a-6}{a+5}+\mathrm{i}(a^2+8a+15)$是实数，是纯虚数？

(2) m 是什么实数时，$(2m^2+5m-3)-\mathrm{i}(6m^2-m-1)$是实数，是虚数，是纯虚数？

解 (1) 设 $z=\dfrac{a^2+a-6}{a+5}+\mathrm{i}(a^2+8a+15)=\dfrac{(a+3)(a-2)}{a+5}+\mathrm{i}(a+3)(a+5)$.

由复数定义，当$(a+3)(a+5)=0$ 且 $a+5\neq0$，即 $a=-3$ 时，z 为实数；当$\dfrac{(a+3)(a-2)}{(a+5)}=0$ 且$(a+3)(a+5)\neq0$，即 $a=2$ 时，z 为纯虚数.

注意本题隐含条件 $a+5\neq0$.

(2) 设 $z=(2m^2+5m-3)-\mathrm{i}(6m^2-m-1)=(m+3)(2m-1)-\mathrm{i}(3m+1)(2m-1)$.

由复数定义，当$(3m+1)(2m-1)=0$ 即 $m=-\dfrac{1}{3}$或 $m=\dfrac{1}{2}$时，z 是实数；当

$$(m+3)(2m-1)=0,\quad 且\quad 2m-1\neq0,$$

即 $m=-3$ 时，z 是纯虚数；当$(3m+1)(2m-1)\neq0$ 即 $m\neq-\dfrac{1}{3}$且 $m\neq\dfrac{1}{2}$时，z 是虚数.

2. 计算：

(1) $(-6+3\mathrm{i})-(6+3\mathrm{i})$；

(2) $(1-3\mathrm{i}^7)+(2+4\mathrm{i}^9)-(3-5\mathrm{i}^3)$；

(3) $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$；

(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

解 (1) $(-6+3\mathrm{i})-(6+3\mathrm{i})=-12$.

(2) $(1-3\mathrm{i}^7)+(2+4\mathrm{i}^9)-(3-5\mathrm{i}^3)=1+3\mathrm{i}+2+4\mathrm{i}-3-5\mathrm{i}=2\mathrm{i}$.

(3) $\left|\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}}=1.$

(4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}=\frac{1}{8}[(\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i})^2]=\frac{1}{2}.$

3. 设复数 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$,求 z 的实部,虚部,模,辐角的主值.

解 $z=\frac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\frac{-5-10\mathrm{i}}{25}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i},$

所以 $\mathrm{Re}\,z=-\frac{1}{5},\mathrm{Im}\,z=-\frac{2}{5},$

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\tan\theta=\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=2$,且$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$在第Ⅲ象限,所以辐角的主值 $\theta=\pi+\arctan 2.$

4. 设 $4\mathrm{i}-2-\frac{x+\mathrm{i}y}{\mathrm{i}}=\frac{2(x-\mathrm{i}y)}{1-\mathrm{i}}$,求实数 x 和 y 的值.

解 $4\mathrm{i}-2=\frac{x+\mathrm{i}y}{\mathrm{i}}+\frac{2(x-\mathrm{i}y)}{1-\mathrm{i}}=\frac{x\mathrm{i}-y}{-1}+\frac{2(x-\mathrm{i}y)(1+\mathrm{i})}{2}=(x+2y)-y\mathrm{i}$,所以 $y=-4$,$x=6.$

5. 将下列复数表示为代数形式:

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$;　(2) $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$;

(3) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;　(4) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

解 (1) $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $-2+2\mathrm{i}$;　(3) $1-\mathrm{i}$;　(4) $\sqrt{3}\mathrm{i}$.

6. 将下列复数化为三角形式:

(1) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $2\mathrm{i}$;　(3) $1+\mathrm{i}$.

解 (1) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;　(2) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$;　(3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

7. 将下列复数化为指数形式:

(1) $\sqrt{3}(\cos 150°+\mathrm{i}\sin 150°)$;　(2) $\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$;　(3) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

解 (1) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}$.

注意:若写为$\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 150°}$是错误的,因为 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 中 x 必须为实数.

(2) $\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(3) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

注意：辐角有多值性，复数化为三角式或指数式表达式不唯一. 本题辐角的主值 $\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$，故其指数形式也可写为 $2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

第 1 章习题二

1. 计算 $\frac{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{994}}{(1+\mathrm{i})^{1988}}$.

解 $\frac{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{994}}{(1+\mathrm{i})^{1988}}=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^{994}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{994}(-\mathrm{i})^{994}$

$$=(-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{994}$$

$$=(-1)\left[\cos\left(662\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(662\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)(-1)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\left(\text{或 } e^{\mathrm{i}\frac{5}{3}\pi}\text{，或 }\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2. 若 $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n=-1$，求满足此等式的最小正整数 n.

解 $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n=\left[\frac{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right]^n=(-\mathrm{i})^n=-1.$

所以满足此式的最小正整数为 2.

3. 若 α,β 为不相等的复数，且 $|\alpha|=1$，证明 $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=1$.

证明 $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\bar{\alpha}(\alpha-\beta)}\right|=\frac{1}{|\bar{\alpha}|}=1.$

4. 已知复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，求证 $z^3+\frac{1}{z^3}=2\cos 3\alpha$.

证明一 $z^3+\frac{1}{z^3}=z^3+z^{-3}=(\cos 3\alpha+\mathrm{i}\sin 3\alpha)+[\cos(-3\alpha)+\mathrm{i}\sin(-3\alpha)]=2\cos 3\alpha.$

证明二 $z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)=8\cos^3\alpha-6\cos\alpha$

$$=2(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)=2\cos 3\alpha.$$

5. 设复数 $z_1=2-\sqrt{3}a+a\mathrm{i}$ 与 $z_2=\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)\mathrm{i}$ 的模相等，$\frac{z_2}{z_1}$ 的辐角主值等于 $\frac{\pi}{2}$，求实数 a,b.

解 因为$|z_1|=|z_2|$，所以$\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=1$，而$\dfrac{z_2}{z_1}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，所以$z_2=z_1\mathrm{i}$，即$\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)\mathrm{i}=2\mathrm{i}-\sqrt{3}a\mathrm{i}-a$，所以$\begin{cases}\sqrt{3}b-1=a,\\ \sqrt{3}-b=2-\sqrt{3}a,\end{cases}$ 于是$\begin{cases}a=\sqrt{3}-1,\\ b=1.\end{cases}$

6. 求$-2+2\mathrm{i}$的立方根.

解 $-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$，所以$-2+2\mathrm{i}$的立方根为

$$\sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right]\quad(k=0,1,2),$$

即

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+\mathrm{i},$$

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i},$$

以及

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}.$$

7. 已知$x^2+y^2=xy=1$，求$x^{3n}+y^{3n}$的值($n\in\mathbf{Z}$).

解 因为$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$，$x^3y^3=1$，所以$x^3,y^3$是方程$z^2+1=0$的两个根$\mathrm{i}$和$-\mathrm{i}$. 所以

$$x^{3n}+y^{3n}=(x^3)^n+(y^3)^n=\mathrm{i}^n+(-\mathrm{i})^n=\begin{cases}2, & n=4k,\\ 0, & n=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}.\\ -2, & n=4k+2,\end{cases}$$

注意：$\mathrm{i}^n+(-\mathrm{i})^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n+\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^n=2\cos\dfrac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}.$

第2章习题

1. 已知$|z|=1+3\mathrm{i}-z$，求复数z.

解 令$z=x+3\mathrm{i}$，$|z|=|x+3\mathrm{i}|=1+3\mathrm{i}-z=1-x$，则$x^2-2x+1=x^2+9$，$2x=-8$，$x=-4$，$z=-4+3\mathrm{i}$.

2. 已知$f(z)=\dfrac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$，求：(1) $f(2+3\mathrm{i})$；(2) $f(1-\mathrm{i})$.

解 (1) $f(2+3\mathrm{i})=\dfrac{147}{229}+\dfrac{72}{229}\mathrm{i}$.　　(2) $f(1-\mathrm{i})=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$.

3. 函数$\omega=\dfrac{1}{z}$把下列z平面内的曲线映射成ω平面内什么样的曲线？

(1) $x^2+y^2=2$;　　　(2) $y=x$.

解　(1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\omega=u+\mathrm{i}v=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$，由 $x^2+y^2=2$，得

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $u^2+v^2=\frac{1}{2}$. 因此 $\omega=\frac{1}{z}$ 把 z 平面上的圆周 $x^2+y^2=2$ 映成 ω 平面上的圆周 $u^2+v^2=\frac{1}{2}$.

另解

$$u^2+v^2=\omega\overline{\omega}=\frac{1}{z\overline{z}}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，由 $y=x$ 得 $\omega=\frac{x-\mathrm{i}x}{2x^2}=\frac{1}{2x}-\frac{\mathrm{i}}{2x}$，所以 $u=-v$，即 $u+v=0$，即 $\omega=\frac{1}{z}$ 把 z 平面上的直线 $y=x$ 映成 ω 平面上的直线 $u+v=0$.

4. 指出下列函数的解析性区域：

(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$;　(2) $f(z)=(z-1)^3$.

解　(1) $u=x^2, v=-y$. 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$，所以 $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$ 在复平面内处处不解析.

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，由 $f(z)=(z-1)^3$ 得

$$\begin{aligned}f(z)&=(x-1+\mathrm{i}y)^3=(x-1)^3+3(x-1)^2(\mathrm{i}y)+3(x-1)(\mathrm{i}y)^2+(\mathrm{i}y)^3\\&=(x-1)^3-3(x-1)y^2+\mathrm{i}[3(x-1)^2y-y^3],\end{aligned}$$

所以 $u=(x-1)^3-3(x-1)y^2, v=3(x-1)^2y-y^3$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3(x-1)^2-3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6(x-1)y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6(x-1)y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3(x-1)^2-3y^2,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$，满足 C-R 条件. 故 $f(z)=(z-1)^3$ 在整个复平面上解析.

5. 设函数 $f(z)=x^2+axy+by^2+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$. 问常数 a,b,c,d 取何值时，$f(z)$ 在复平面内处处解析.

解　$u=x^2+axy+by^2$，　$v=cx^2+dxy+y^2$，　$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by$，　$\frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy$，　$\frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y$，

要使 $f(z)$ 在复平面内解析，则须

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $\begin{cases}2x+ay=dx+2y,\\ax+2by=-2cx-dy,\end{cases}$ 比较系数得 $a=2, b=-1, c=-1, d=2$.

第2篇

积分变换

第3章习题一

1．下列周期函数的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

(1) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$　　(2) $f(x)=e^{2x},-\pi\leqslant x<\pi$;

(3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3},-\pi\leqslant x<\pi$;　　(4) $f(x)=|\sin x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解　(1) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,-\infty<x<+\infty$.

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\,dx=\dfrac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n2}{n^2+4}\left(\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}\left(\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

代入 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，得

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$$

$$x\neq(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

(3) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{18\sqrt{3}}{\pi}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{9n^2-1}\sin nx,x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(4) $f(x)$ 为偶函数，且

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}, & n=2k, \\ 0, & n=2k+1, \end{cases}$$

所以 $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x-\frac{1}{35}\cos 6x-\cdots\right),-\infty<x<+\infty.$

2. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数.

解　$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx\right],x\in[-\pi,\pi].$

3. 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$展开成正弦级数.

解　$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,x\in(0,\pi].$

4. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解　展开成正弦级数. 将 $f(x)$先作奇延拓,再作以 2π 为周期的周期延拓.

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\sin nx\,dx$$
$$=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right],\quad n=1,2,\cdots,$$

所以 $2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx,x\in[0,\pi).$

展开成余弦级数. 将 $f(x)$先作偶延拓,再作以 2π 为周期的周期延拓.

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$$
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\,dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\cdot 8}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以 $2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in[0,\pi].$

第 3 章习题二

1. 将函数 $f(x)=|x|$在$(-l,l)$上展开成傅里叶级数.

解　$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=l,$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{4l}{\pi^2}\dfrac{1}{(2n+1)^2}, & k=2n+1,\\ 0, & k=2n,\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以 $f(x)=|x|=\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{l}x,x\in(-l,l)$.

2. 设 $f(x)$是周期为 4 的函数，它在$[-2,2)$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 试将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 已知 $2l=4$，故 $l=2$，

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}x=1,$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=[1-(-1)^n]\frac{1}{n\pi},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x,\quad x\neq 0,\pm 2,\pm 4,\cdots.$$

3. 将下列函数展开成正弦级数和余弦级数.

(1) $f(x)=x^2,0\leqslant x\leqslant 2$； (2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

解 (1) $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\dfrac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2)$,

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2].$$

(2) 展开成正弦级数. 将 $f(x)$先作奇延拓，再作周期延拓得 $F(x)$，则 $F(x)$是以 4 为周期的奇函数，$F(x)$处处连续，又满足收敛定理条件，且在$[0,2]$上 $F(x)=f(x)$.

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right),$$

在上式第二个积分中令 $2-x=t$，则

$$\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^1 t\sin(n\pi-\frac{n\pi}{2}t)\mathrm{d}t=(-1)^{n-1}\int_0^1 t\sin\frac{n\pi t}{2}\mathrm{d}t,$$

于是 $b_n=\dfrac{1}{2}[1+(-1)^{n-1}]\displaystyle\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$，则 $n=2k$ 时，$b_n=0$；

$n=2k-1$ 时，$b_{2k-1}=2\int_0^1 x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{k-1}8}{(2k-1)^2\pi}, k=1,2,\cdots,$

故

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2},\quad x\in[0,2].$$

展开成余弦级数.将 $f(x)$ 先作偶延拓再作周期延拓得 $G(x)$，则 $G(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，又满足收敛定理条件，且在$[0,2]$上 $G(x)=f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x\right]=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $2-x=t$，则

$$\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^1 t\cos\frac{n\pi t}{2}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=[1+(-1)^n]\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=[1+(-1)^n]\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1\right]\\&=[1+(-1)^n]\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\right],\end{aligned}$$

当 $n=2m-1$ 时，$a_{2m-1}=0$；

当 $n=2m$ 时，$a_{2m}=\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2m)^2}[(-1)^m-1]=\begin{cases}0, & m=2k,\\ \frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}, & m=2k-1,\quad k=1,2,\cdots.\end{cases}$

故

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[0,2].$$

第 3 章习题三

1. 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\\ -1, & -1\leqslant t<0,\\ 1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & 1<t<+\infty;\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}A, & A\neq 0, 0\leqslant t<\tau,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$