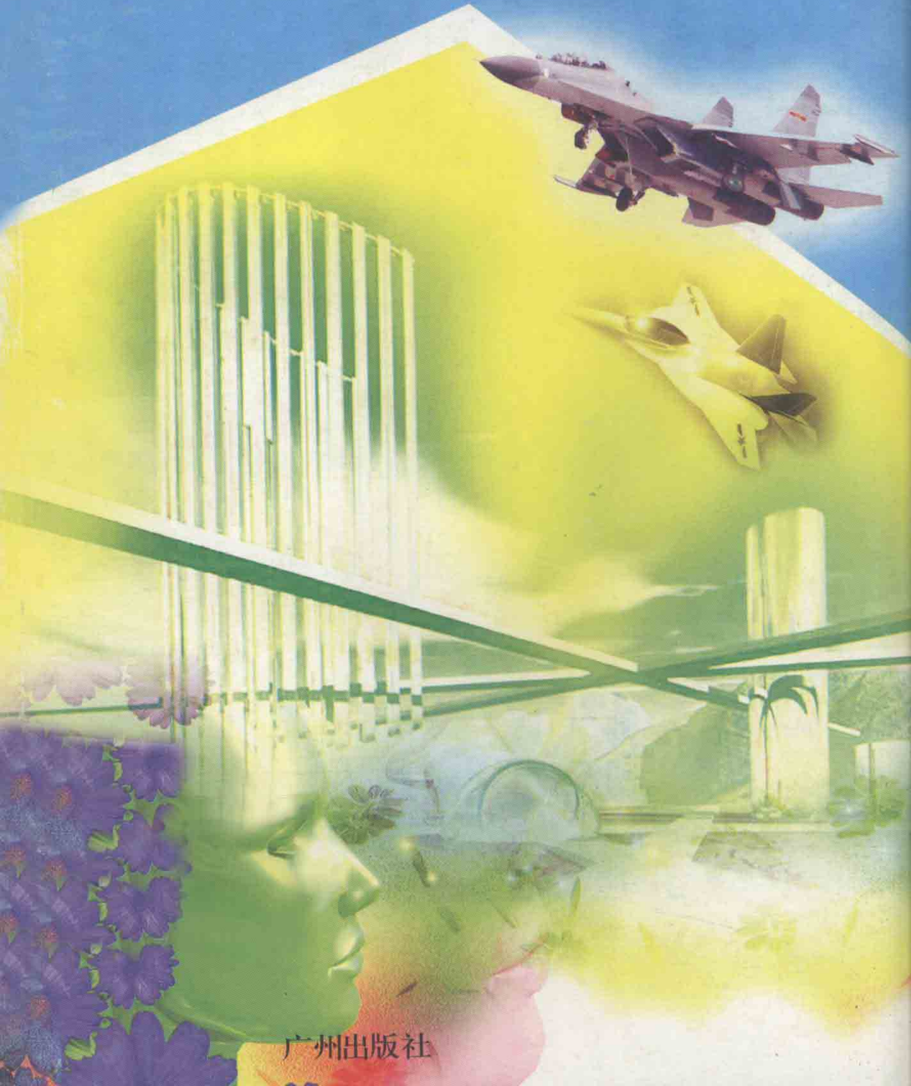
KE XUE WEN CONG

科学文丛

三角形吟味



广州出版社

科学文丛

三解形吟味

（80）

广州出版社出版

图书在版编目（CIP）数据

科学文丛．何静华 形继祖 主编．广州出版社．2003.

书号 ISBN7-83638-837-5

Ⅰ．科学．．．Ⅱ．．．．Ⅲ．文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082275 号

科学文丛

主　编：何静华 形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本：787×1092 1/32 印张：482.725

版次：2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价：（全套 104 本）968.80 元

目　　录

一、三角形的构成及边角关系

三角形有三条边、三个角这六个元素。这三条边之间的关系要遵循一定的规律，并且边与角之间也是相互制约的。

1. 三角形边与边的关系

三角形是一种很简单但又是最常见的几何图形，三角形的应用又往往与三角形的构成有关。

由三条线段首尾顺次连结所组成的图形是三角形。

是否任意三条线段都可以构成一个三角形呢？当然不行，如果长度分别为3,4,8的三条线段首尾连结就不能构成一个三角形（不妨动手画一画）。其中的奥妙在哪里呢？原来能构成一个三角形线段的长度是受到相互约束的。

你任意画一个三角形，$\triangle ABC$，其中 a,b,c 为三角形的三条边。不难发现，三角形三条边之间的一个基本性质：

$a+b>c, b+c>a, a+c>b$。

由此得到：三角形任何两边的和大于第三边。

这里"任何"二字的含义是指以上三个不等关系同时满足。

这个结论也是判断三条线段能否构成一个三角形的依据。

下面利用这个结论解决与三角形构成有关的问题。

将任意三角形的三边四等分,记$\triangle ABC$的周长为P,$\triangle A_1B_1C_1$的周长为P_1,则有$\frac{1}{2}P < P_1 < \frac{3}{4}P$成立。你能说出其中的道理来吗?

图1-1。连接C_1B_3,则在$\triangle B_1C_1B_3$中,$B_3C_1 + B_1B_3 > B_1C_1$,即$\frac{1}{4}BC + \frac{1}{2}AC > B_1C_1$,同理可证:$\frac{1}{4}AC + \frac{1}{2}AB > C_1A_1$,$\frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}BC > A_1B_1$,$\therefore \frac{1}{4}P + \frac{1}{2}P > P_1$ 即:$P_1 < \frac{3}{4}P$

另在$\triangle AB_1C_1$中有$B_1C_1 + AC_1 > \frac{3}{4}AC$,即$B_1C_1 + \frac{1}{4}AB > \frac{3}{4}AC$,同理可证$A_1C_1 + \frac{1}{4}BC > \frac{3}{4}AB$,$C_1B_1 + \frac{1}{4}AC > \frac{3}{4}BC$,$\therefore P_1 + \frac{1}{4}P > \frac{3}{4}P$,即$P_1 > \frac{1}{2}P$,故有$\frac{1}{2}P < P_1 < \frac{3}{4}P$成立。

又如,在$\triangle ABC$中,$BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,试证:sinA,sinB,sinC一定是某一个三角形三条边的长。

由于在$\triangle ABC$中,由正弦定理得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R(※)$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \mathrm{sinc} = \frac{c}{2R}$$

其中R为三角形ABC外接圆半径。在$\triangle ABC$中,由$a + b > c$,得:$\sin A + \sin B = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = \frac{a+b}{2R} > \frac{c}{2R} = \sin C$

同理要证:$\sin B + \sin C > \sin A$

这就表明:sinA、sinB、sinC必为某三角形的三边长。

注：把以 sinA，sinB，sinC 为边长的三角形称为“正弦”三角形。

三角形三边之间的结论运用广泛，表达形式多样，上面三个不等关系也可用一个式子表达：$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0$。这种表达形式体现一种整体处理思想，运用起来有时能恰到好处。

若有三个正数 a，b，c，满足 $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$，试判断以 a，b，c 的长为线段能否构成一个三角形？

只要将原不等式移项，分解因式即可化为 $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$

$\because a+b+c>0$，从而 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ 知 a，b，c 一定是某个三角形的三边长。

在某些特定条件下，还有较简单的形式，如在 $\triangle ABC$ 中，若已知其中两条线段 a，b，则第三条线段 c 必定满足：$a+b>C>|a-b|$。

两根木棒的长分别为 7cm 和 10cm，要选择第三根木棒，将它们钉成一个三角架，第三根木棒的长有什么限制？

根据以上结论，第三根木棒的长必须大于这两根的差 3cm，小于这两根的和 17cm。

又如，有一个不等边 $\triangle ABC$ 的两条高长是 4 和 12，若第三边高的长也是整数，你能确定它的范围吗？

事实上，设边 a，b 上的高为 4 和 12，hc 为 c 边上的高的长度，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则：$4a=12b=hc\times c=2s$，由 $a-b<c<a+b$ 有 $\frac{2S}{4}-\frac{2S}{12}<\frac{2S}{hc}<\frac{2S}{4}+\frac{2S}{12}$，$\therefore 3<hc<6$，$\because$ hc 为整数，且 $a\neq b\neq c$，知 $hc=5$，即第三边上的高为 5。

再如，已知三角形的长的差是 5，若此三角形的周长为偶数，则第三边长的最小值为________。

A.8　　B.7　　C.6　D.3

这里,不妨设三角形三条边的长分别为 a、b、c,且 $a-b=5$。

由于 $a+b>c>a-b$,即:$C>5$,又 $a+b+c$ 为偶数,$a+b$ 与 $a-b$ 的奇偶性相同。

$\therefore a+b$ 为奇数,故 C 为奇数,$C=7$,第三边长的最小值为 7。

由以上几例可看出:已知三角形两边求第三边或周长及其他有关线段的取值范围时,常利用这种不等式 $a+b>C>|a-b|$(a, b, c 为三角形的三边)的形式来处理。再来一例:

已知△ABC 中,AD 为中线,AE 为∠BAC 的平分线,$AB=C$,$AC=b$,求 AD、AE 的取值范围。

分析:(1)取 AB 的中点 F,连接 DF,则 $DF=\frac{b}{2}$,$AF=\frac{C}{2}$,在△ADF 中 $\frac{1}{2}|b-c|<AD<\frac{1}{2}(b+c)$。

(2)过 C 作 AE 的平行线,交 BA 的延长线于 G,$\because \angle G=\angle BAE=\angle EAC=\angle ACG$,$\therefore AG=AC=b$,且 $\frac{AE}{GC}=\frac{BA}{BG}=\frac{c}{b+c}$,$\therefore \frac{c}{b+c}GC=AE$。在△ACG 中有 $0<GC<2b$,$\therefore 0<AE<\frac{2bc}{b+c}$。

若已知最长的线段(三条线段中),可利用简单的结论:三条线段中,较短的两条线段的和若大于最长的第三条线段,则这三条线段就能组成一个三角形,否则不能组成三角形。

为什么可以如此简易判定?因为三条线段 a,b,c,若 a 为最长边,那么 $a\geqslant b$,$a\geqslant c$ 从而必有 $c+a>b$,$b+a>c$,所以当 $b+c>a$ 时,三条线段中任何两条线段的和都大于第三条线段,故这三条线段可以组成三角形。

快速抢答题:有下列长度的三条线段能否组成三角形?

(1)3cm,4cm,8cm;

(2)5cm,6cm,11cm;

(3)5cm,6cm,10cm;

(4)5cm,$\sqrt{41}$cm,$\sqrt{2}$cm;

这里显然不难:(1)$\because 3+4<8$,$\therefore$这三条线段不能组成三角形。(2)$\because 5+6=11$,$\therefore$这三条线段不能组成三角形。(3)$\because 5+6>10$,$\therefore$这三条线段可以构成三角形。(4)由$\sqrt{41}>5>\sqrt{2}$,$\because (5+\sqrt{2})^2=27+10\sqrt{2}>27+14=41$,$\therefore 5+\sqrt{2}>\sqrt{41}$,$\therefore$这三条线段可组成三角形。

又如,平面上有四点A、B、C、D,其中任何三点不共线。连接每两点得六条线段,证明:必定存在这样一点,由此点引出的三条线段可构成一个三角形。

分析:在连接的六条线段中,必有一条最长,不妨设为AB,由于$DA+DB>AB$,$CA+CB>AB$,$\therefore DA+DB+CA+CB>2AB$,即$(DA+CA)+(DB+CB)>2AB$。

不难理解,在$(DA+CA)$和$(DB+CB)$两者中,必有一个大于$\frac{2AB}{2}=AB$,不妨设$DA+CA>AB$。根据三条线段中,较短的两条线段的和若大于最长的第三条线段,则这三条线段就组成一个三角形,说明由点A引出的线段AB,AC,AD可构成一个三角形。

2. 三角形边、角的相互制约

三角形三条边的关系直接影响三角形的内角,一般地,有下面的结论:

在一个三角形中,如果两条边不等,那么所对的角也不等,大

边所对的角较大。若 a,b,c 是 Rt△ABC 的三条边,则有 $a^2+b^2=c^2$ $\Leftrightarrow\angle c=90°$;

由此不难理解下面的关系也成立:

$a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow\angle c>90°$;

$a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow\angle c<90°$;

也就是说:1. 三角形的一边长的平方大于(小于)另两边的平方和时,这一条边所对的三角形的内角是钝角(锐角)

2. 在钝角(或锐角)三角形中,最长的边的平方大于(或小于)另两边的平方和。

这样根据三角形三边长可对三角形按角分类。

问题 1:若 $x+2,x+4,x+6$ 为三边组成一个钝角的三角形,那么 x 的取值范围是什么?

分析:同时考虑构成三角形的条件 $a+b>c$(c 为最大边)及构成钝角三角形的条件:$a^2+b^2<c^2$

那么$\begin{cases}(X+2)+(X+4)>X+6\\(X+2)^2+(X+4)^2<(X+6)^2\end{cases}$

$\therefore 0<X<4$

问题 2:已知一个锐角三角形的三边分别为$\sqrt{3}$,2,X,则 X 的取值范围是什么?

这里,有两条边是已知的,已知 $2-\sqrt{3}<X<2+\sqrt{3}$,考虑"钝角三角形"这个条件,不知哪是最大边,于是讨论:

当 X 为最大边时,

由$\begin{cases}(\sqrt{3})^2+x^2<X^2\\2-\sqrt{3}<X<2+\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore\sqrt{7}<X<2+\sqrt{3}$

当 X 不为最大边时

由$\begin{cases}(\sqrt{3})^2+x^2<2^2\\2-\sqrt{3}<X<2+\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore 2-\sqrt{3}<X<1$

$\therefore$ X 的取值范围为 $2-\sqrt{3}<X<1$ 或 $\sqrt{7}<X<2+\sqrt{3}$

问题 3:请你会诊

下面一道题的解答选自同学的作业,其解答是错误的。你能指出错在哪里吗?

在△ABC 中,$BC=3,AB=3\sqrt{3},\angle C=60°$。求∠A 的度数。

错解为:在△ABC 中,由正弦定理

$\frac{3}{\sin A}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}\quad \sin A=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle A=30°$ 或 $150°$

分析:在△ABC 中,$\because AB=3\sqrt{3}>3=BC$, $\therefore \angle C=60°>\angle A$ 那么∠A 只能为 30°。

问题 4:已知△ABC 的内角 $A>B>C$,在△ABC 内(包括边界)找一点 P,使 P 到三边的距离之和为最大。

分析:P 是△ABC 内的任意一点,当 P 变化时,显然 P 到△ABC 三边的距离 PD、PE、PF 都在变化,为了方便,我们把其中的某个固定下来,考察其和的最大值的情况。

解:先将 PD 的长固定下来,这时 P 点只在线段 $B'C'$ 上变动。因此 $PD+PE+PF$ 的最大值问题转化为求 $PE+PF$ 的最大值问题。作 $C'N\perp AB, PN\perp C'N$,则 $PF=NN$。

又 $\because \angle N'PC'=\angle B, \angle EC'P=\angle C, \angle B>\angle C$,

$\therefore PE\leqslant CN'$(P 与 C' 重合时取等号)

$\therefore PE+PF\leqslant C'N$

因此当 PD 固定 P 在 C′点时，PD + PE + PF 取得最大值。

当 P 点在△ABC 内变化时，PD 变动时，使得 PD + PE + PF 达到最大值的点 P 只需在 AC 边上找即可，由∠A > ∠C，及上述讨论可知 C 点是使 PD + PE + PF 取最大值时的点。

说明：①在变量较多的求最值问题中，可先固定某个变量，对其他变量进行讨论，然后再讨论固定下来的变量变动时的情况，进而求得最大值。②利用结论："在一个三角形中，较大的角所对的边也较大"，从而将条件中角的不等关系转化成边的不等关系。

再看看三角形的计数问题

问题 5：求三边长都是连续自然数，周长不超过 100 的锐角三角形的个数。

不妨设锐角△ABC 的三边长分别为 $n-1,n,n+1$，则

$$\begin{cases}(n-1)+n>n+1 & \text{（三角形性质）}\\ (n-1)+n+n+1\leqslant 100 & \text{（周长不超过 100）}\\ (n-1)^2+n^2>(n+1)^2 & \text{（锐角三角形）}\end{cases}$$

$\therefore 5\leqslant n\leqslant 33$

所求三角形的个数为 29。

注：这是根据条件列出不等式(组)求解。

问题 6：三边长均为整数且最大边长是 11 的三角形共有多少个？

先设 x,y,z 分别表示三角形的三边长，且 $x\leqslant y\leqslant z$，由题设知 $z=11$，且 $x+y>z$，所以 $y\geqslant 6$，当 $y=6$ 时，只能有 $x=6$，此时只有一个整数的三角形；当 $y=7$ 时，x 可取值 5,6,7，此时有三个整数边的三角形；……，如此推算，可得下表：

y的取值	x可能的取值	x可能取值的个数
6	6	1
7	5,6,7	3
8	4,5,6,7,8	5
9	3,4,5,6,7,8,9,	7
10	2,3,4,5,6,7,8,9,10	9
11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	11

所以满足题设计条件的三角形个数是:

$1+3+5+7+9+11=36$

注:1. 这是根据条件分类讨论列出表格统计求解。

2. 若此题中的最大边长改为111,求解时要注意通过找规律来求出结果。

下面我们看一个通过找规律求出结果的例子:

问题7:若三角形的三条边a、b、c都是正整数,并且满足条件$a\leqslant b\leqslant c$,当$b=2000$时,满足条件的三角形有多少个?

分析:2000这个数较大,从此数着手较困难,从$b=1,2,\cdots\cdots$,逐步考虑。a,b,c除了应该满足条件$a\leqslant b\leqslant c$外,根据三角形两边之和大于第三边,还应该满足条件$c<a+b$。

(1)当$b=1$时,满足条件的a、c都只能取$a=1,c=1$。这时,满足条件的三角形只有1个。

(2)当$b=2$时,根据$a\leqslant b=2,c\geqslant b=2$,以及$c<a+b=a+2$,可知,a,b,c的取法只可能有以下几种:$a=1,b=2,c=2$;$a=2,b=2,c=2$;$a=2,b=2,c=3$。这时满足条件的三角形有3个。

(3)当$b=3$时,根据$a\leqslant b=3,C\leqslant b=3$以及$c<a+b=a+3$,可

知，a,b,c 的取法只可能有以下几种：$a=1,b=3,c=3$；$a=2,b=3,c=3$；$a=2,b=3,c=4$；$a=3,b=3,c=3$；$a=3,b=3,c=4$；$a=3,b=3,c=5$。这时，满足条件的三角形有 6 个。

(4)当 $b=4$ 时，类似分析可知满足条件的三角形有 10 个。

我们发现 b 与满足条件的三角形的个数有以下规律

b	满足条件三角形的个数
1	1
2	$3=1+2$
3	$6=1+2+3$
4	$10=1+2+3+4$

这就启发我们讨论一般情形。当 $b=k(k=1,2,3,4,\cdots,2000)$，由于 $a\leqslant b=K$，故 a 可取 $1,2,\cdots,K$。分别讨论如下：若取 $a=1$，由 $C\geqslant b=K$ 以及 $C<a+b=1+K$ 可知，只能取 $C=K$；若取 $a=2$，由 $c\geqslant b=k$ 以及 $c<a+b=2+k$ 可知，可取 $c=k,k+1$；这样依次讨论下去，若取 $a=k$，由 $c\geqslant b=k$ 以及 $c<a+b=k+k$ 可知，可取 $c=k,k+1,\cdots,k+k-1$。这就知道，这时满足条件的三角形个数是

$1+2+3+\cdots\cdots+2000=2001000$ 个。

问题 8：已知三角形的三条边长均为整数，其中有一条边长为 4，但它不是最短边，这样的三角形共有多少个？

由于已知三角形中的一条边不是最短边，不妨设最短边为 a，另一条边为 c，则 $a<4$。根据三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边的性质，那么就有下面的式子成立：

$a+4>c>4-a$，且 $c\geqslant a$。

当 $a=1$ 时，$5>c>3$，c 为 4，三边长分别为 1，4，4；

当 $a=2$ 时,$6>c>2$,c 为 3,4,5,三边长分别是 2,4,3;2,4,4;2,4,5;

当 $a=3$ 时,$7>c>\geqslant 3$(这里不是 $c>4-3=1$),c 为 3,4,5,6,三边长分别是 3,4,3;3,4,4;3,4,5;3,4,6。

问题 9:以三角形的三个顶点和它的内部的九个点(共 12 个点)为顶点,能把原三角形分割成的小三角形个数是多少个?

(A)15; (B)19; (C)22; (D)不能确定。

设分割成的小三角形的个数是 n,则这些三角形内角的总和为 $n\cdot180°$,另一方面,以原三角形内部的 9 个点为顶点的那些角的总和为 $9\cdot360°$,以原三角形的三个顶点为顶点的那些角的和为 $180°$,所以,$n\cdot180°=9\cdot360°+180°$,即 $n=19$。

注:这是从所有三角形的内角总和来考虑,是一种整体处理思想。

3. 三角形中边、角不等关系

三角形中,边、角不等关系主要有以下三条结论:

i)三角形任何两边的和大于第三边;

ii)三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角;

iii)三角形中,大角(边)对大边(角)。

证明线段或角不等,若它们在同一个三角形中,可直接应用这几个结论进行证明;如欲证的边角不在同一个三角形中,则除了要添加辅助线构造三角形外,还要利用代数的有关知识。

在证明边、角不等问题时,常用的思路有以下几种:

(1)构造三角形,当所比较的几何元素不在同一个三角形中时,常利用各种变换,使这些几何元素变换到同一个三角形中。

例 1　已知$\triangle ABC$中，$AB > AC$，AD 平分$\angle BAC$，求证：$DB > DC$.

分析：由于所比较的线段不在同一三角形中，且条件中有角平线 AD，故可采用“翻折”的方法，将一个三角形翻到另一个三角形中去。

证明：在 AB 上截取 $AC' = AC$ 连 DC'。

则$\triangle AC'D \cong ACD$，

$\therefore DC' = DC, \angle 3 = \angle 4$

$\because \angle BC'D > \angle 3, \angle 4 > \angle C'BD$.

$\therefore \angle BC'D > \angle C'BD$，$\therefore BD > DC'$，即 $DB > DC$。

例 2　在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，点 D 在$\triangle ABC$内，且$\angle ADB > \angle ADC$，求证：$\angle DBC > \angle DCB$。

分析：利用 $AB = AC$，可将$\triangle ABC$旋转一个顶角至$\triangle ACE$的位置，得 $CE = BD$，$AE = AD$，$\angle AEC = \angle ADB$，由$\angle AEC > \angle ADC$，$\angle AED = \angle ADE$，得$\angle CED > \angle CDE$，从而 $CD > CE$，即 $CD > BD$，可证$\angle DBC > \angle DCB$.

例 3　四边形 ABCD 中，$AB = CD$，$AD \neq BC$，M，N 分别是 AD，BC 的中点，则 AB 与 MN 的大小关系为____。

(A)$AB = MN$　(B)$AB < MN$　(C)$AB > MN$　(D)以上三种情况都有可能出现。

分析：遇到中点，常用的方法是作三角形的中位线，连接 BD 取 BD 的中点 P，连接 PM，PN。显然 $MP = \frac{1}{2}AB$，$NP = \frac{1}{2}DC$，由 $AB = CD$ 知，$MP + NP = AB$，P，N 构成三角形，于是 $AB = MP + PN > MN$，故选(C)。

注：此题是将线段 AB 分成两条线段，利用代换转化到一个三角形中。