普通高等院校“十二五”规划教材

复变函数

FUBIAN HANSHU

李汉龙 缪淑贤 主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十二五"规划教材

复变函数

李汉龙　缪淑贤　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是作者在大学多年的教学实践中编写的.其内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数定理及其应用、共形映射、数学软件在复变函数中的应用和复变函数发展史八章.前七章配备了较多的例题和习题.书末附有自测题和习题答案.

本书既注意引导读者用复数的方法处理问题,又随时指出复数和实数中许多概念的异同点;在结构上既注意了它的完整性和系统性,又注意了它的应用性;同时加入了数学软件在复变函数中的应用和复变函数发展的历史材料.本书可作为理工科院校本科各专业复变函数课程的教材或参考书,也可以作为科研人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/李汉龙,缪淑贤主编. —北京:国防工业出版社,2011.1

普通高等院校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-07140-5

Ⅰ.①复... Ⅱ.①李... ②缪... Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 232084 号

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 16½ **字数** 379 千字

2011 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 28.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前言

复变函数课程的主要内容是讨论复数之间的相互依赖关系，其主要研究对象是解析函数.复变函数论是一门古老而富有生命力的学科.早在19世纪，Cauchy、Weierstrass及Riemann等人就已给这门学科奠定了坚实的理论基础.作为一种有力的工具，复变函数广泛地应用于自然科学的众多领域，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学及自动控制学等.复变函数又称复分析，是实变函数微积分的推广与发展，因此它不仅在内容上与实变函数微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似.当然，复变函数也有自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时须注意复变函数本身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法.

编写本书的主要目的是为理工科本科生提供一本比较系统、完整的“复变函数”教材.编者汇总了国内同类教材的主要优点，融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会，力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教学需求.

本书在每一章后精心设计了“小结”，可帮助读者更清楚、明了地把握学习要点，更深刻地理解该章的主要学习内容.全书习题通过在教学实践中不断积累更新而成，其内容涵盖了全书主要讲授内容的基本概念、基本理论和基本方法.书末给出习题答案或提示，其目的在于帮助读者尽快掌握本书所讲授的内容.附录中给出了七套自测题，供读者自测之用.

本书适当地介绍了本学科与其他学科之间的联系，给出了一些实际应用问题以帮助读者加深对课程的理解，培养解决实际问题的能力，从而达到学为所用的最终目的.另外还介绍了数学软件在复变函数中的应用以及复变函数发展的历史材料.带“*”号的章节，可根据各专业的不同需要选用.

本教材内容包含：第1章复数与复变函数、第2章解析函数、第3章复变函数的积分、第4章级数、第5章留数定理及其应用、第6章共形映射、第7章数学软件在复变函数中的应用、第8章复变函数发展史.其中第1章和第3章由艾瑛编写；第2章由韩孺眉编写；第4章由孙平编写；第5章由缪淑贤编写；第6章由李汉龙编写；第7章和第8章由孙海义编写.

全书由李汉龙统稿，缪淑贤、李汉龙审稿；本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书参考了国内外出版的一些教材，见本书所附参考文献.由于编者水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正.

编者

2010年9月

目　录

第1章　复数与复变函数

复变函数研究的对象是复数变量之间的函数关系. 因此,本章首先讨论什么是复数以及复数的运算和性质,在此基础上再介绍复平面上的区域、复变函数的极限与连续性等概念. 虽然其中的不少内容在中学里已经学过,或是高等数学的平行推广,但通过系统地回顾予以深化提高,或以复数的观点予以重新表述,意在勾勒出复数问题的思维特征,这对以后的学习十分重要.

1.1　复数及其代数运算

1.1.1　复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数,称为**复数**,其中 i 是代数方程 $x^2+1=0$ 的一个根,其含义为 $\mathrm{i}^2=-1$,称为虚数单位. 在电工学里例外,用 j 表示虚数单位.

x、y 是实数,分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记为 $x=\mathrm{Re}(z)$,$y=\mathrm{Im}(z)$. 当 $y=0$ 时,把 z 看成实数,记为 $z=x$;当 $x=0$,$y\neq0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**. 特别地,把复数零记为 $0=0+\mathrm{i}0$. 两个复数相等,当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 因此,任意两个复数不能像实数那样比较大小.

1.1.2　复数的代数运算

对于复数,必须规定其运算方法. 由于实数是复数的特例,规定复数运算的一个基本要求是:复数运算的法则施行于实数特例时,能够和实数运算的结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

设两复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,两复数相加减的法则是:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

复数的加法遵守交换律与结合律,而且减法是加法的逆运算.

两复数的积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 + x_1y_2),$$

复数的乘法遵守交换律与结合律,且遵守乘法对于加法的分配律.

两复数的商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0),$$

这里除法是乘法的逆运算.

对 $z=x+\mathrm{i}y$,记 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y=x+\mathrm{i}(-y)$,称为 z 的**共轭复数**. 显然 $\bar{\bar{z}}=z$,即 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭复数.

共轭复数有下列性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $z\cdot\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(3) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

当 $\overline{z}=z$ 时，复数 z 为实数；当 $z=-\overline{z}$ 时，复数 z 为纯虚数. 在计算$\frac{z_1}{z_2}$时，可利用性质(2)把分子与分母同乘以$\overline{z_2}$，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 1 设 $z_1=5-5\mathrm{i}$，$z_2=-3+4\mathrm{i}$，求$\frac{z_1}{z_2}$与 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}$$
$$=\frac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

从而 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$.

例 2 设 $z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与 $z\cdot\overline{z}$.

解 $z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以 $\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$.

$$z\cdot\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 3 设两复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明 $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

证
$$\begin{aligned}z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+\\&\quad\ \mathrm{i}(-x_2y_1+x_1y_2)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2}).\end{aligned}$$

或者 $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面

1. 复平面的建立

由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数(x,y)唯一确定，(x,y)就称为复数 z 的实数对

形式. 于是能够建立起平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系，从而可以借助横坐标为 x、纵坐标为 y 的点表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(图 1.1). 由于 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为**实轴**；y 轴上的非零点对应着纯虚数，故 y 轴称为**虚轴**. 这样表示复数的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 引进了复平面之后，复数与复平面上的点建立了一一对应的关系. 为了方便起见，今后不再区分“数”与“点”，说到“点”，可以指它所代表的“数”；说到“数”，也可以指这个数所代表的“点”. 这样可以借助几何直观研究复变函数问题，丰富了复变函数的内容，也为复变函数应用于实际提供了条件.

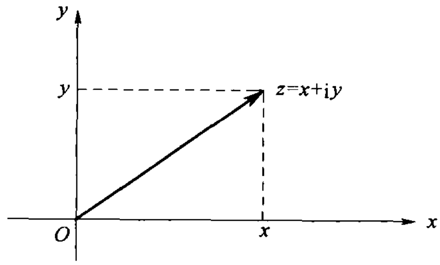

图 1.1

在复平面上，从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量)，这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法保持一致.

例如，设　$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2).$$

由图 1.2 可以看出，(z_1+z_2)所对应的向量，就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量.

又如，将(z_1-z_2)表成$(z_1+(-z_2))$，可以看出，(z_1-z_2)所对应的向量就是 z_1 所对应的向量与$(-z_2)$所对应的向量的和向量，也就是从 z_2 到 z_1 的向量(图 1.3).

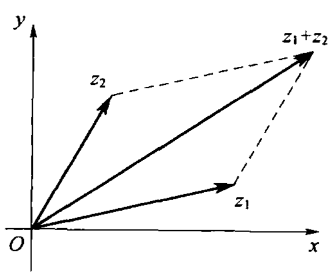

图 1.2

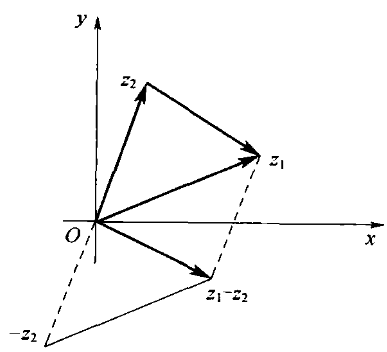

图 1.3

2. 复数的模与辐角

在复平面上，复数 z 与向量$\overrightarrow{Oz}$一一对应，因此 z 可用向量$\overrightarrow{Oz}$表示(图 1.1). 向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为 z 的**模**或**绝对值**，记为$|z|$或 r，因而有$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

下列关于模的性质成立

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|,$$
$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

由图 1.2 和图 1.3，有下面的三角不等式成立

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \ (\text{三角形两边之和大于第三边})$$
$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \ (\text{三角形两边之差小于第三边}).$$

实轴正向到非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应向量$\overrightarrow{Oz}$间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**(Argument)，记为

$$\theta = \mathrm{Arg}z,$$

这时有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

任一非零复数 z 有无穷多个辐角，其中任意两个辐角值相差 2π 的整数倍，把取值于 $(-\pi,\pi]$ 的辐角称为 z 的**辐角主值**，记为 $\arg z$，于是

$$\arg z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

当 $z=0$ 时，辐角无意义.

由图 1.4，辐角主值 $\arg z (z\neq 0)$ 可由 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系来确定(注意：$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$，$-\pi<\arg z\leqslant\pi$).

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

在复平面上 z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称，因此 $|z|=|\bar{z}|$，$\arg\bar{z}=-\arg z$.

例 1 (1) 求 $\arg(2-2\mathrm{i})$ 及 $\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})$.

(2) 求 $\arg(-3+4\mathrm{i})$ 及 $\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$.

解 (1) $\arg(2-2\mathrm{i})=\arctan\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$,

$$\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i}) = \arg(2-2\mathrm{i}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(2) $\arg(-3+4\mathrm{i})=\arctan\dfrac{4}{-3}+\pi=-\arctan\dfrac{4}{3}+\pi$,

$$\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arg(-3+4\mathrm{i}) + 2k\pi = (2k+1)\pi - \arctan\frac{4}{3}.$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

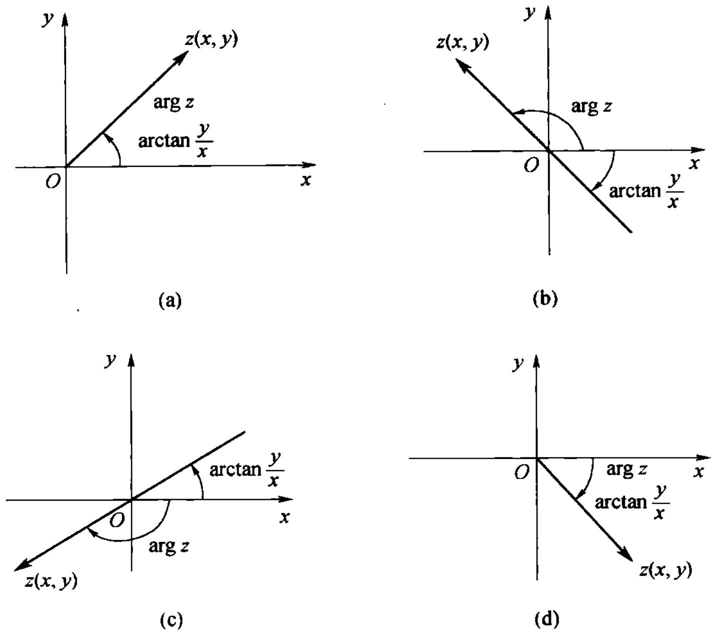

图 1.4

例 2 设 z_1、z_2 是两个复数,求证:

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

(2) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证 (1) $|z_1z_2|=\sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}}=\sqrt{(z_1z_2)(\bar{z}_1\,\bar{z}_2)}=\sqrt{(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)}=|z_1||z_2|$.

(2)
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+(\overline{z_1\bar{z}_2}+z_1\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

3. 复数的各种表示

从直角坐标与极坐标的关系:$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z,即

$$z = r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

称为复数的**三角表示式**.

由欧拉(Euler)公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,得

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

称为复数的**指数表示式**,并称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数的代数表示式.

复数的这三种表示法可以相互转化,以适应讨论不同问题的需要.

例 3 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z=1+\mathrm{i}$; (2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$; (3) $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha, 0<\alpha\leqslant\pi$.

解 (1) $r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\arg z=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

因此 z 的三角表示式为 $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，指数表示式为 $z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

(2) $r=|z|=1$，又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}.$$

因此 z 的三角表示式为 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$，指数表示式为 $z=e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

(3) $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$（三角表示式）

$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}$.（指数表示式）

4. 复数方程表示平面曲线

下面说明两个问题：平面曲线怎样用复数形式的方程（或不等式）来表示？对于给定的复数形式的方程（或不等式），怎样确定它所表示的曲线？

设平面曲线 C：$F(x,y)=0$，若令 $z=x+iy$，经变换 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$，可得曲线 C 的复数方程：

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0.$$

例如，直线方程 $3x+2y=1$ 可化为

$$(3-2i)z+(3+2i)\bar{z}=2.$$

若平面曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，这里 $x(t)$、$y(t)$ 是实的连续函数，则可得曲线 C 的复数形式的参数方程为

$$z=z(t)=x(t)+iy(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

其中 t 为参数.

例如，椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=3\cos t\\y=4\sin t\end{cases},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

对应的复数方程为

$$z=z(t)=3\cos t+i4\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

例 4 (1) 求过两点 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的直线的复数方程；

(2) 求过两点 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的直线段的复数方程.

解 (1) 通过两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty).$$

因此,其复数方程为 $z=z_1+t(z_2-z_1)$,$t\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)\ , 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

若取 $t=\frac{1}{2}$,得线段$\overline{z_1 z_2}$的中点为 $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

例 5 求以 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为中心,R 为半径的圆周的复数方程.

解 如图 1.5 所示,复数形式的参数方程为 $z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,也可记为 $|z-z_0|=R$.

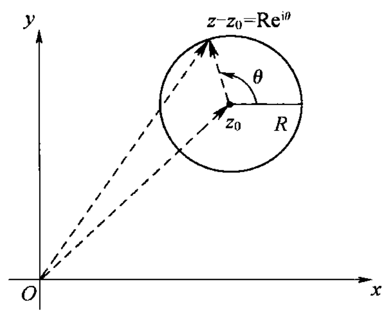

图 1.5

下面来确定复数方程(或不等式)所表示的曲线.

例 6 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$; (2) $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$;

(3) $|z+\mathrm{i}|=2$; (4) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$表示所有与点 2i 和 -2 距离相等的点的轨迹. 故方程表示的曲线是连接点 2i 和 -2 的线段的垂直平分线(图 1.6(a)).

设 $z=x+\mathrm{i}y$,方程变为$|x+y\mathrm{i}-2\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}+2|$,化简得 $y=-x$.

(2) 方程 $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$表示从实轴正向到$(z-\mathrm{i})$的夹角为$\frac{\pi}{4}$的点的轨迹,故方程表示的曲线是从 i 出发与实轴交角为$\frac{\pi}{4}$的半射线(不包含 i),如图 1.6(b)所示.

(3) 方程$|z+\mathrm{i}|=2$ 表示所有与点$-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹,即中心为$-\mathrm{i}$ 半径为 2 的圆(图 1.6(c)).

设 $z=x+\mathrm{i}y$,方程变为$|x+(y+1)\mathrm{i}|=2$.

也就是$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$,或 $x^2+(y+1)^2=4$.

(4) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\mathrm{i}+\bar{z} = x + (1-y)\mathrm{i},$$

所以

$$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y=4,$$

从而所求曲线的方程为 $y=-3$，这是一条平行于实轴的直线，如图 1.6(d)所示.

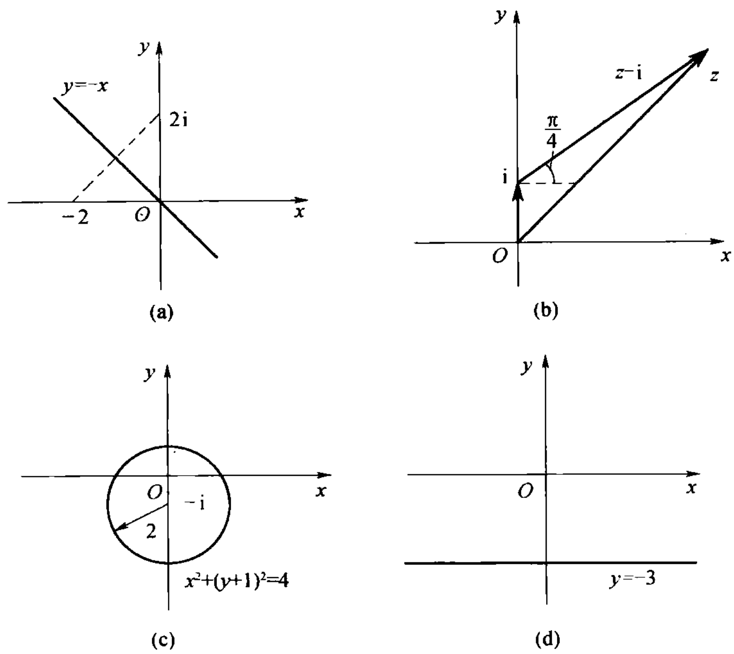

图 1.6

1.2.2 复球面

除了用平面上的点或向量来表示复数外，还可以用球面上的点来表示复数.

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面，球面上的一点 S 与原点重合(图 1.7). 通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N. 称 N 为**北极**，S 为**南极**.

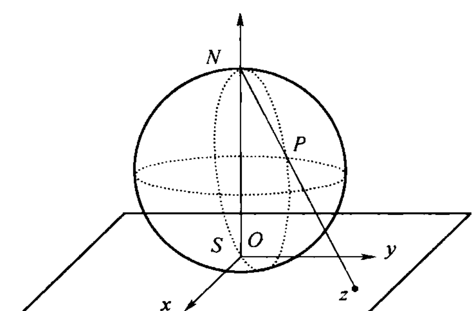

图 1.7

对于复平面上任何一点 z，如果用一直线把点 z 与北极 N 连接起来，那么该直线段一定与球面相交于异于 N 的一点 P. 反过来，对于球面上任何一个异于 N 的点 P，用一直线段把 P 与 N 连接起来，这条直线段的延长线就与复平面相交于一点 z. 这就说明：球面上的点，除去北极 N 外，与复平面上的点之间存在着一一对应的关系. 前面已经讲过，复数