



重难点手册

★九千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
!的畅销品牌



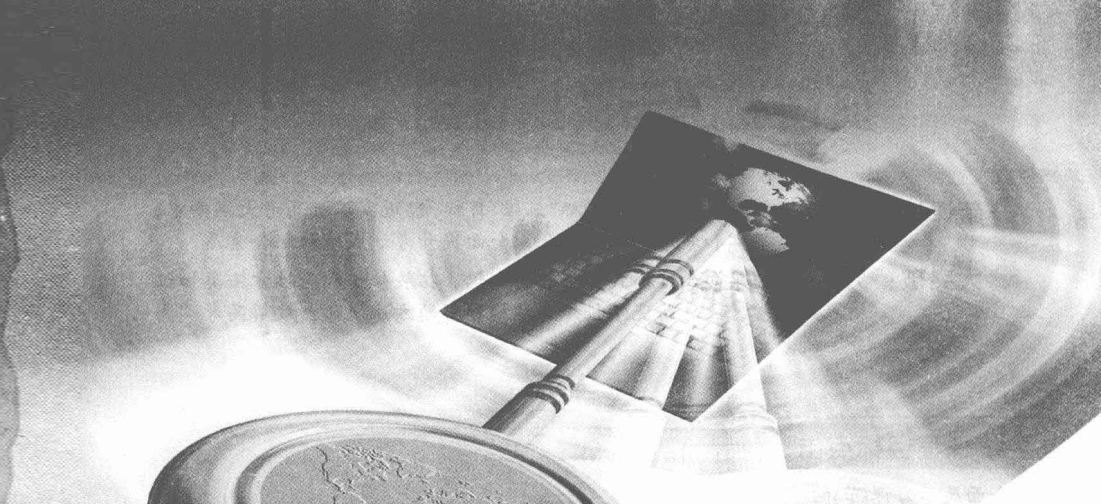
配人教A版

高中数学

选修 1-1

主审 蔡上鹤

主编 汪江松



重难点手册



配人教A版

高中数学

选修 1-1

主 审 蔡上鹤

主 编 汪江松

★ 九千万
★ 八省市
★ 十九年

胜宝典
线课堂
销品牌



华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学选修 1-1(配人教 A 版)/汪江松 主编.

—武汉:华中师范大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5622-4798-2

I. ①重… II. ①汪… III. ①数学课—高中—教学参考资料

IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 029291 号

重难点手册——高中数学选修 1-1(配人教 A 版)

主编:汪江松

责任编辑:汪兵 涂庆 责任校对:程珏 封面设计:新视点

选题设计:华大鸿图编辑室(027-67867361)

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号 邮编:430079

销售电话:027-67867371 027-67865356 027-67867076

传真:027-67865347 邮购:027-67861321

网址:<http://www.ccnu press.com> 电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:湖北恒泰印务有限公司 督印:章光琼

字数:310 千字

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:9.5

版次:2011 年 6 月第 2 版 印次:2011 年 6 月第 1 次印刷

定价:17.80 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:为维护著作人的合法权益,并保障读者的切身利益,本书封面采用压纹制作,压有“华中师范大学出版社”字样及社标,请鉴别真伪。若发现盗版书,请打举报电话 027-67861321。

体例特色与使用说明

- **新课标：**贯彻新课标精神，定位新课标“三维”目标，贴近新课标高考大纲要求，注重学习规律和考试规律的整合，全面提升考试成绩和综合素质。
- **大突破：**突破传统的单向学习模式，将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂，立体凸现学科知识结构和解题方法规律，破解高考“高分”瓶颈。

课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求，使同学们明确努力的方向和应达到的程度，便于自我评价和相互评价。

重点难点突破

把握学生思维情感的发展脉络，恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点，各个击破，扫清学生学习中的一切障碍，全力提高学生的学习效率。

方法技巧点拨

精选典型例题，通透讲解，并从中总结解题方法与技巧，点拨解题规律，启发学生思维，使学生深刻透彻地把握知识结构，培养学生灵活运用知识的能力。

高考真题链接

多角度深入剖析各类高考题，加深学生对所学知识的理解，激发学生深入探究学习的兴趣。



第一章

常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题

课程目标点击

1. 了解命题的概念，会用两个条件判断一个语句是否是命题。
2. 能正确指出已知命题的条件和结论，会将已知命题写成“若 p ，则 q ”的形式。
3. 会判断一些简单命题的真假，并能掌握用举反例的方法来判断某命题为假命题。

重点难点突破

1. 命题
一般地，在数学中我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题。

其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题。

命题通常用陈述句的真命题，而命题以疑问句、祈使句和感叹句的形式出现，如“ $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是奇函数吗？”、“证明： $\sin 2\alpha + 1 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ ”、“五角星中的黄金比真多啊！”都不是命题。

表示为两个奇素数之和；

是句，其次它的真假随着的

方法技巧点拨

用逻辑和科学的发展，总是可以确定的。

判断命题真假的常用方法

(1) 逻辑推理法

例 给出下列三个命题：

①若 $a > b > -1$ ，则 $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$ ；

②若正整数 m 和 n 满足 $m \leq n$ ，则 $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$ ；

③设 $P_1(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2 + y^2 = 9$ 上任一点，圆 O_2 以 $Q(a, b)$ 为圆心且半径为1，当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时，圆 O_1 与圆 O_2 相切，其中假命题的个数为()。

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

【思路点拨】从正面进行逻辑推理；①运用比较数大小的基本方法；②运用重要不等式；③注意点 P_1 与 O_2 的关系。

高考真题链接

例 (2010·江西·文)如图1-1-3， M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点，给出下列命题：

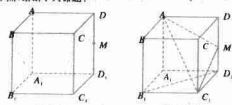


图 1-1-3

图 1-1-4

①过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、 BC 、 C_1D_1 都相交；

——新课标《数学重难点手册》新突破

- **讲实用：**完全同步于新教材，导-学-例-训四位一体，落实课程内容目标和考纲能力要求，揭密高考解题依据和答题要求，破解重点难点。
- **大品牌：**十多年的知名教辅品牌，一千多万学子全程参与，十余万名一线教师的倾力实验，堪称学习规律与考试技术深度融合的奇迹，成就畅销二十年不衰，普惠学子万千的佳话。

探究创新拓展

例 1 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbb{R}$, 对于命题“若 $a+b \geq 0$, 则 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$ ”.

(1) 写出其逆命题, 判断其真假, 并证明你的结论;
 (2) 写出其逆否命题, 判断其真假, 并证明你的结论.

思维点拨 大前提不变, (1) 可以用反证法证明, (2) 只需判断原命题的真假.

解 (1) 逆命题: 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$, 则 $a+b \geq 0$, 为真命题.
 用反证法证明: 假设 $a+b < 0$, 则 $a < -b, b < -a$.
 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数, 则 $f(a) < f(-b), f(b) < f(-a)$.
 所以 $f(a)+f(b) < f(-a)+f(-b)$. 这与题设相矛盾, 所以逆命题为真命题.

三级题型测训

- 夯实基础**
1. (2009 · 湖北 · 文) “ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的().
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 能力提升**
8. (2006 · 山东) 设 $p: x^2 - x - 20 > 0, q: \frac{1-x}{x+2} < 0$, 则 p 是 q 的().
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

探索拓展

14. 设 a, b 是方程 $x^2 - ax + 4 = 0$ 的两个实根, 试问: “ $a > 2$ 且 $b > 1$ ”是“两实根 a, b 均大于 1”的(充分, 必要)的什么条件?
15. 已知命题 $p: 2 - \frac{x-1}{2} > \frac{3}{4}$, 命题 $q: \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - 3 < 0$, 试问: “ q 是 $\neg p$ 的什么条件?”

探究创新拓展

体现特色栏目的全新面貌, 融入新课标的全新理念, 给出具有探究性的命题, 为学生提供自主探索、相互交流的学习平台。

三级题型测训

立足于消化教材, 注重基本题型的训练, 以中档题为出发点, 帮助同学们更深刻地领会相应知识点, 逐步养成灵活的解题能力和应用能力, 并精心挑选了少量高考拔高题与竞赛题, 使学生在收到立竿见影的学习效果的同时, 体验到探究创新的广阔空间。

第一章综合评价

(时间: 120 分钟 满分: 150 分)

- 一、选择题(每小题 5 分, 共 60 分)
1. 下列语句表示命题的是().
 (A) 昨天雨下得真大! (B) $x > 7$
 (C) 那本书买到了吗? (D) $3 < 8$
2. 若命题 p_1 是偶数, 命题 p_2 是质数, 则下列命题中为真命题的是().
 (A) $p_1 \wedge p_2$ (B) $p_1 \vee p_2$ (C) $\neg p_1$ (D) $\neg p_1 \wedge p_2$
3. 命题“若 $A \subseteq B$, 则 $A=B$ ”与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中, 真命题的个数是().
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4



答案详解

与提示

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题

变式引申

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, 求关于 x 的不等式 $x^2 + (2a+1)x + 2 < 0$ 的解集非空, 则 $\Delta = (2a+1)^2 - 4 \times 2 > 0 \Rightarrow 4a^2 + 4a - 2 > 0$, 解得 $a > \frac{1}{2}$ 或 $a < -1$. 命题为真.

2. 不正确. 如图 1-1-1, 平面 ABC 与平面 ADC 相交于 AC , 平面 ABC 与平面 ADC 的交线为 AC , 平面 ABC 与平面 ADC 的交线为 AC , 平面 ABC 与平面 ADC 的交线为 AC .

章末综合评价

选择新颖、典型、难度适中的试题进行检测, 引领主干知识, 使您在考试中立于不败之地!

答案详解与提示

附有三级题型测训和各章综合评价测试题的参考答案, 并对全部的试题给出了提示和解答过程。

《数学重难点手册》编委会

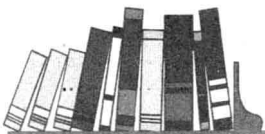
主 编	汪江松			
编 者	汪江松	刘 芸	刘元利	齐凤玲
	黄立俊	田祥高	谢志庆	甘大旺
	杨志明	柯红兵	蔡有缘	汪 丹
	胡燕丽	陈留闯	周 鹏	宋 庆
	徐更生	徐 斌	袁 雯	

目 录

第一章 常用逻辑用语	(1)
1.1 命题及其关系	(1)
1.1.1 命题	(1)
1.1.2 四种命题及其相互关系	(10)
1.2 充分条件与必要条件	(17)
1.3 简单的逻辑联结词	(29)
1.4 全称量词与存在量词	(38)
1.4.1 全称量词	(38)
1.4.2 存在量词	(44)
1.4.3 含有一个量词的命题的否定	(52)
第一章综合评价	(58)
第二章 圆锥曲线与方程	(61)
2.1 椭圆	(61)
2.1.1 椭圆及其标准方程	(61)
2.1.2 椭圆的简单几何性质	(72)
2.2 双曲线	(86)
2.2.1 双曲线及其标准方程	(86)
2.2.2 双曲线的简单几何性质	(101)
2.3 抛物线	(118)
2.3.1 抛物线及其标准方程	(118)
2.3.2 抛物线的简单几何性质	(131)
第二章综合评价	(146)



第三章 导数及其应用	(150)
3.1 变化率与导数	(150)
3.1.1 变化率问题 导数的概念	(150)
3.1.2 导数的几何意义	(157)
3.2 导数的计算	(166)
3.2.1 几个常用函数的导数与基本初等函数的导数公式	(166)
3.2.2 导数的运算法则	(174)
3.3 导数在研究函数中的应用	(181)
3.3.1 函数的单调性与导数	(181)
3.3.2 函数的极值与导数	(192)
3.3.3 函数的最大(小)值与导数	(205)
3.4 生活中的优化问题举例	(220)
第三章综合评价	(232)
答案详解与提示	(235)



第一章

常用逻辑用语



1.1 命题及其关系

1.1.1 命题



课程目标点击

1. 了解命题的概念, 会用两个条件判断一个语句是否是命题.
2. 能正确指出已知命题的条件和结论, 会将已知命题写成“若 p , 则 q ”的形式.
3. 会判断一些简单命题的真假, 并能掌握用举反例的方法来判断某一命题为假命题.



重点难点突破

1. 命题

一般地, 在数学中我们把用语言、符号或式子表达的, 可以判断真假的陈述句叫做**命题**.

其中判断为真的语句叫做**真命题**, 判断为假的语句叫做**假命题**.

● 指点迷津

命题通常用陈述句来表述, 而不能以疑问句、祈使句和感叹句的形式出现. 如“ $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是奇函数吗?”、“证明: $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$ ”、“五角星中的黄金比真多啊!”都不是命题.



命题的正确与否,要看它是否与客观事实相符合.判断数学命题的正确与否,常用逻辑推理来推证,或举出反例予以否定.

● **方法总结** 判断一个语句是不是命题,就是要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件.

2. 命题的形式

数学中的命题通常可以表述成“若 p , 则 q ”的形式,也可以写成“如果 p , 那么 q ”、“只要 p , 就有 q ”等形式.其中 p 叫做命题的条件, q 叫做命题的结论.

对于一般的数学命题,其条件和结论通常比较好区分.但对有些数学命题,特别是简缩了的数学命题,通常其条件与结论并不那么分明,我们应该把它适当改写,就可以写成“若 p , 则 q ”的形式.

例如,“对顶角相等”,可改写成“如果两个角是对顶角,那么这两个角相等”.

又如,“平行于同一个平面的两个平面平行”,可改写成“如果两个平面平行于同一个平面,那么这两个平面平行”.

● **指点迷津** 科学猜想也是命题.例如:

哥德巴赫猜想:每一个不小于 6 的偶数都可以表示为两个奇素数之和;

寿命猜想:人类的正常寿命是 200 岁.

这样的表述也是命题,因为这类猜想首先是陈述句,其次它的真假随着时间的推移和科学的发展,总是可以确定的.



方法技巧点拨

1. 判断命题真假的常用方法

(1) 逻辑推证法

例 1 给出下列三个命题:

① 若 $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$;

② 若正整数 m 和 n 满足 $m \leq n$, 则 $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$;

③ 设 $P_1(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2 + y^2 = 9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a, b)$ 为圆心且半径为 1, 当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

思路点拨 从正面进行逻辑推证: ① 运用比较实数大小的基本方法; ②



运用重要不等式;③注意点 P_1 与 $\odot O_2$ 的关系.

【解】 ①方法 1 $\because a \geq b > -1, \therefore a+1 \geq b+1 > 0.$

$$\therefore \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} \geq 0, \therefore \frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}.$$

方法 2 $\because f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数,

\therefore 当 $a \geq b > -1$ 时, $f(a) \geq f(b)$, 即 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$. 故①为真命题.

②因为正整数 m, n 满足 $m \leq n$, 有 $m > 0, n-m \geq 0$, 由均值不等式有 $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{m+(n-m)}{2} = \frac{n}{2}$. 故②为真命题.

③该命题的实质是 $P_1(x_1, y_1)$ 在 $\odot O_1$ 上, 又 $P_1(x_1, y_1)$ 也在 $\odot O_2$ 上, 但两圆相交于 P_1 并不能保证两圆相切. 故③为假命题.

答案 B

变式引申 1 “已知 $a, x \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $x^2 + (2a+1)x + a^2 + 2 \leq 0$ 的解集非零, 则 $a \geq 1$.” 试判断该命题的真假.

(2) 举反例判定假命题

例 2 (2006·湖北, 文) 关于直线 m, n 与平面 α, β , 有下列四个命题:

①若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$;

②若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$;

③若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$;

④若 $m \parallel \alpha, n \perp \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel n$.

其中真命题的序号是().

(A) ①②

(B) ③④

(C) ①④

(D) ②③

思路点拨 运用正方体中的线面关系, 常可依“实物”的直观性举反例.

【解】 如图 1-1-1, α, β 分别为正方体的上、下底面, 显然图中的 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 但 $m \nparallel n$, 故①为假命题, 可排除 A, C.

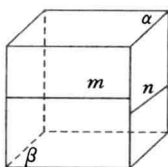


图 1-1-1

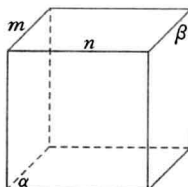


图 1-1-2

对于命题④, 如图 1-1-2, α 为正方体的下底面, β 为侧面, 图中的 $m \parallel \alpha$,



$n \perp \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 但 $m \not\parallel n$, 故④为假命题, 可排除 B.

答案 D

变式引申 2 “已知直线 m, n 与平面 α, β . 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$, 且 $m \perp n$, 则 $\alpha \parallel \beta$.” 此命题正确与否? 请说明理由.

(3) 综合使用两种方法

例 3 (2010 · 哈尔滨高三质检题) 下列命题中, 真命题的序号为 _____ . (写出所有真命题的序号)

- ① 实数 a, b 满足 $|a| < 2, |b| < 1$, 则 $|a-b| < 1$;
- ② 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 - (-1)^n$, 则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- ③ 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x+1) = f(x-1)$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称;
- ④ 函数 $y = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2x\right)$ 是偶函数.

思路点拨 综合运用函数、三角函数、数列及不等式的知识进行判断, 既可用正面推证, 也可用举反例来否定.

【解】 ① 中若令 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$, 均满足条件, 但 $|a-b| = \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1$, ① 为假命题;

② 中由 $a_n = S_n - S_{n-1} = [1 - (-1)^n] - [1 - (-1)^{n-1}] = 2(-1)^{n-1}$, 又 $a_1 = S_1 = 2$, 知 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, -1 为公比的等比数列, ② 为真命题;

③ 中由 $f(x+1) = f(x-1)$ 可得 $f(x) = f(x+2)$, 即函数 $y = f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 其图象不一定是关于直线 $x=1$ 对称, ③ 为假命题;

④ 由诱导公式知 $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x$, 为偶函数, ④ 为真命题.

答案 ②④

变式引申 3 (2007 · 北京, 文) 对于函数① $f(x) = |x+2|$, ② $f(x) = (x-2)^2$, ③ $f(x) = \cos(x-2)$, 判断如下两个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是().

- (A) ①② (B) ①③ (C) ② (D) ③

2. 将命题改写成“若 p , 则 q ”的形式



(1)对于简缩后的命题,先还原,再改写

例 4 将下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式,并判断命题的真假:

(1)到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上;

(2)实数的平方为正数.

思路点拨 对于简缩后的命题,首先分析其简缩了什么,其次分清条件与结论,然后用清晰流畅的语句写成“若 p , 则 q ”的形式,最后依要求判断命题的真假.

【解】 (1)若一个点到已知线段两个端点的距离相等,则这个点在这条线段的垂直平分线上,为真命题.

(2)若一个数为实数,则它的平方是正数,为假命题,因为 $0^2=0$.

(2)当用文字语言不便表述时,可用数学语言表述

例 5 将下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式:

(1)三角形两边之和大于第三边;

(2)实数的平方非负.

【解】 (1)若 a, b, c 为三角形的三边之长,则 $a+b>c$, 且 $a+c>b, b+c>a$.

(2)若 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 \geq 0$.



高考真题链接

例 1 (2010·江西,文)如图 1-1-3, M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点,给出下列命题:

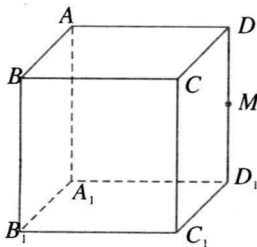


图 1-1-3

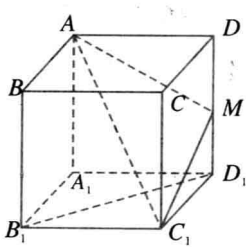


图 1-1-4

①过 M 点有且只有一条直线与直线 AB, B_1C_1 都相交;

②过 M 点有且只有一条直线与直线 AB, B_1C_1 都垂直;

③过 M 点有且只有一个平面与直线 AB, B_1C_1 都相交;

④过 M 点有且只有一个平面与直线 AB, B_1C_1 都平行.

其中真命题是().



(A)②③④

(B)①③④

(C)①②④

(D)①②③

思路点拨 依四个选项的特点,只须举反例否定其中一个命题即可.

【解】 如图 1-1-4,平面 BB_1D_1D 过点 M ,且与 AB, B_1C_1 相交;平面 AMC_1 过点 M ,且与 AB, B_1C_1 相交,故③为假命题.

答案 C

例 2 (2009·江西)如图 1-1-5,正四面体 $ABCD$ 的顶点 A, B, C 分别在两两垂直的三条射线 Ox, Oy, Oz 上,则在下列命题中,错误的为().

(A) $O-ABC$ 是正三棱锥

(B)直线 $OB \parallel$ 平面 ACD

(C)直线 AD 与 OB 所成的角是 45°

(D)二面角 $D-OB-A$ 为 45°

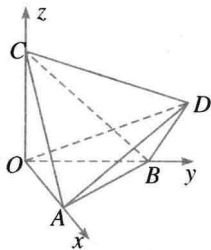


图 1-1-5

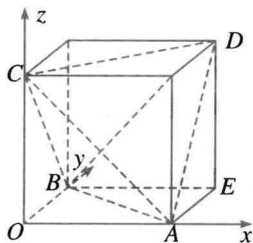


图 1-1-6

思路点拨 由顶点 A, B, C 分别在两两垂直的三条射线上,不难联想将正四面体补形为正方形,再来逐一考查各命题.

【解】 如图 1-1-6,以正四面体的棱为面对角线构造正方形,显然 A 正确;

由 $OB \parallel AE$ 知 C 正确;

又 $AE \cap$ 平面 $ACD = A$,且 AE 不在平面 ACD 上,所以 OB 与平面 ACD 也相交, B 错.

答案 B

例 3 (2010·四川,文)设 S 为实数集 \mathbf{R} 的非零子集,若对任意 $x, y \in S$,都有 $x+y, x-y, xy \in S$,则称 S 为封闭集,下列命题:

①集合 $S = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \text{ 为整数}\}$ 为封闭集;

②若 S 为封闭集,则一定有 $0 \in S$;

③封闭集一定是无限集;



④若 S 为封闭集, 则满足 $S \subseteq T \subseteq \mathbf{R}$ 的任意集合 T 也是封闭集, 其中的真命题是_____。(写出所有真命题的序号)

思路点拨 推证与举反例相结合.

【解】 对于整数 a_1, a_2, b_1, b_2 , 有 $a_1 + b_1\sqrt{3} + a_2 + b_2\sqrt{3} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in S$, $a_1 + b_1\sqrt{3} - (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} \in S$, $(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in S$, 所以①为真命题.

若 S 是封闭集, 且存在元素 $x \in S$, 那么必有 $x - x \in S$, 即 $0 \in S$, 故②为真命题.

设 $S = \{0\}$, 显然 S 也是封闭集, 但为有限集, ③为假命题.

设 $S = \{0\}, T = \{0, 1, 2, 3\}$, 显然 $2 \times 3 \notin T$, ④为假命题.

答案 ①②



探究创新拓展

例 1 (2006 · 上海) 如图 1-1-7, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O . 对于平面上任意一点 M , 若 p, q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p, q) 是点 M 的“距离坐标”. 已知常数 $p \geq 0, q \geq 0$, 给出下列三个命题:

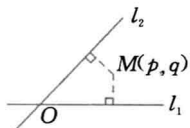


图 1-1-7

①若 $p = q = 0$, 则“距离坐标”为 $(0, 0)$ 的点有且仅有 1 个;

②若 $pq = 0$, 且 $p + q \neq 0$, 则“距离坐标”为 (p, q) 的点有且仅有 2 个;

③若 $pq \neq 0$, 则“距离坐标”为 (p, q) 的点有且仅有 4 个.

上述命题中, 正确命题的个数是().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

思路点拨 理解“斜坐标系”中“距离坐标”的定义, 再运用定义对 3 个命题进行逐个考查.

【解】 ①若 $p = q = 0$, 则“距离坐标”为 $(0, 0)$ 的只有点 O , 故①正确;

②若 $pq = 0$, 且 $p + q \neq 0$ 的点有无穷多, 它们是直线 l_1 与 l_2 上除去点 O 的点, 故②不正确;

③若 $pq \neq 0$, 又 $p \geq 0, q \geq 0$, 则“距离坐标”为 (p, q) 的点有且仅有 4 个, 这 4 个点分居两直线 l_1, l_2 相交所成的 4 个角的内部, 且两两关于点 O 对称, 故③正确.



答案 C

例 2 把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题.

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于_____对称,则函数 $g(x)=$ _____.(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形)

思路点拨 本题为开放性试题,答案不唯一,主要用函数 $f(x)$ 的图象关于坐标轴或坐标原点或某条直线对称的数形结合思想来处理.

【解】 可填写下列情形中的一种:

- ① x 轴, $g(x)=-3-\log_2 x$;
- ② y 轴, $g(x)=3+\log_2(-x)$;
- ③ 直线 $y=x$, $g(x)=2^{x-3}$;
- ④ 直线 $y=-x$, $g(x)=-2^{-x-3}$;
- ⑤ 坐标原点, $g(x)=-3-\log_2(-x)$.



三级题型测试

1 夯实基础

1. 给出下列语句:

- ① 太阳是绕着地球转的;
- ② 禽流感能人传人吗?
- ③ $\{1,2,3\} \subseteq \mathbf{R}$;
- ④ $|x+a|$;
- ⑤ $a+2\sqrt{3}$ 是有理数;
- ⑥ 奇数的偶次方是偶数.

其中命题的个数是().

- (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

2. (2006·北京,文) 设 A, B, C, D 是空间四个不同的点,在下列命题中,不正确的是().

- (A) 若 AC 与 BD 共面,则 AD 与 BC 共面
- (B) 若 AC 与 BD 是异面直线,则 AD 与 BC 是异面直线
- (C) 若 $AB=AC, DB=DC$,则 $AD=BC$
- (D) 若 $AB=AC, DB=DC$,则 $AD \perp BC$

3. 若 A, B 是两个集合,则下列命题中是真命题的是().

- (A) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B = A$
- (B) 若 $A \cap B = B$,则 $A \subseteq B$
- (C) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cup B = A$
- (D) 若 $A \cup B = B$,则 $B \subseteq A$

4. (2006·天津,文) 设 l 为一条直线, α, β, γ 为三个互不重合的平面,给出下面



三个命题:

$$\textcircled{1} \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \perp \beta;$$

$$\textcircled{2} \alpha \perp \gamma, \beta // \gamma \Rightarrow \alpha \perp \beta;$$

$$\textcircled{3} l \perp \alpha, l \perp \beta \Rightarrow \alpha // \beta.$$

其中正确的命题有().

- (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

5. 已知函数 $f(x) = |x^2 - 2ax + b|$ ($x \in \mathbf{R}$), 给出下列两个命题:

①若 $a^2 - b \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是增函数;

② $f(x)$ 有最小值 $b - a^2$.

其中正确命题的序号是_____.

6. 把下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式.

(1) 平行四边形对角线互相平分;

(2) 垂直于同一平面的两直线平行;

(3) 当 $k < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的值随 x 的增大而减小.

能力提升

7. (2006 · 天津) 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面. 考查下列命题, 其中正确的命题是().

(A) $m \perp \alpha, n \subset \beta, m \perp n \Rightarrow \alpha \perp \beta$

(B) $\alpha // \beta, m \perp \alpha, n // \beta \Rightarrow m \perp n$

(C) $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n // \beta \Rightarrow m \perp n$

(D) $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m \Rightarrow n \perp \beta$

8. (2009 · 广东, 文) 给定下列四个命题:

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;

②若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;

③垂直于同一条直线的两条直线相互平行;

④若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中为真命题的是().

- (A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ②和④

9. 设命题 p : 函数 $y = \lg(x^2 + 2x - c)$ 的定义域为 \mathbf{R} . 命题 q : 函数 $y = \lg(x^2 + 2x - c)$ 的值域为 \mathbf{R} . 若命题 p, q 有且仅有一个正确, 则 c 的取值范围为().

- (A) \emptyset (B) $(-\infty, -1)$ (C) $[-1, +\infty)$ (D) \mathbf{R}