中学数理化发展智能丛书

怎样学好高二代数

周长生　常相舜　刘　坤　谢长青　编著

中学数理化发展智能丛书

怎样学好高二代数

常相舜　刘　坤　周长杰　编

河南科学技术出版社

内容简介

本书对高中代数中的数列、数学归纳法、不等式的性质、证明、解法和复数等内容作了详尽的分析和系统的阐述。书中精选了适量的例题和习题（对例题进行了深入的分析，并给出了多种解法），书末附有练习题答案或提示。本书可作为高二代数课的学习用书或教学参考书。

中学数理化发展智能丛书

怎样学好高二代数

常相舜　刘　坤　周长杰　编

河南科学技术出版社出版

保定市满城科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092　毫米32开本　10.875印张　215千字

198 年　月第1版　　198 年　月第1次印刷

印数：1— 6470 册

ISBN-5349-0559-1/G·559

定价：　　3.60元

目　录

第五章　数列与数学归纳法

5.1　数列的概念

从1到10十个自然数按从小到大的次序排列起来，就成为下面的一列数：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10. \qquad (1)$$

如果把它们按从大到小的顺序排列起来，就成为与上面不同的一列数：

$$10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1. \qquad (2)$$

如果把这十个自然数的倒数从大到小排列起来，就又构成新的一列数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{10}. \qquad (3)$$

如果把这十个自然数随便排列一下，也会形成新的一列数：

$$1,\ 3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 5,\ 8,\ 4,\ 7,\ 10. \qquad (4)$$

-1的1次幂，2次幂，3次幂，4次幂，…，可排列成一列数：

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots.$$

$\sqrt{2}$ 的精确到1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值可排列成一列数：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots. \tag{6}$$

三个 1 排列成一列数：

$$1,\ 1,\ 1. \tag{7}$$

无穷多个 1 排列成一列数：

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots. \tag{8}$$

像上面这些例子所表示的，按一定次序排起来的一列数叫做**数列**．数列中的每一个数叫做这个数列的**项**．各项以它们在数列中的位置依次叫做数列的第 1 项（也叫首项），第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，…．

数列的项数可以是有限的，如上例中的(1)、(2)、(3)、(4)、(7)，这样的数列叫做有穷数列．

数列的项数也可以是无限的，如上例中的(5)、(6)、(8)，这样的数列叫做无穷数列．

只有 n 项的数列，其形式为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n. \tag{9}$$

有无限多项的数列，其一般形式为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots. \tag{10}$$

其中，a_n 是数列的第 n 项．有时我们把数列 (10) 简记做 $\{a_n\}$．

由数列的定义可知：一个数列中的每一项的值，都由它的项数确定．这就是说，数列可以看做一个定义域为自然数集 N（或它的有限子集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$）上的函数当自变量

从小到大依次取值时对应的一列函数值。

当这种函数关系可以用解析式表示时，这个解析式就叫做这个数列的通项公式。

例如，数列(1)，(2)，(3)，(5)，(7)，(8)的通项公式如下：

(1) $a_n = n$，$(1 \leqslant n \leqslant 10,\ n \in N)$；

(2) $a_n = 10 - (n-1)$，　$(1 \leqslant n \leqslant 10,\ n \in N)$；

(3) $a_n = \dfrac{1}{n}$，　$(1 \leqslant n \leqslant 10,\ n \in N)$；

(5) $a_n = (-1)^n$，　$(n \in N)$；

(7) $a_n = 1$，　$(1 \leqslant n \leqslant 3,\ n \in N)$；

(8) $a_n = 1$，　$(n \in N)$。

如果知道了一个数列的通项公式，就可以写出它的任何一项．如已知一个数列的通项公式是$a_n = \dfrac{1}{n}$，那么，它的第103项是 $a_{103} = \dfrac{1}{103}$。

因此，一个数列的通项公式确定了，这个数列就确定了。

然而，一个数列确定了，它的通项公式不一定是唯一的。例如数列(7)的通项公式可以是

$a_n = 1$，$(1 \leqslant n \leqslant 3,\ n \in N)$。

也可以是

$a_n = 1 + (n-1)(n-2)(n-3)$，$(1 \leqslant n \leqslant 3,\ n \in N)$。

$$a_n=(-1)^{(n-1)(n-2)(n-3)},\ (1\leqslant n\leqslant 3,\ n\in N).$$

同学们自己还可以写出很多。

还应注意，并不是每个数列都可写出通项公式。例如，质数数列2，3，5，7，9，11，13，17，19，23，… 就没有通项公式。数列(6)也没有通项公式。

但是，我们遇到的很多数列都有通项公式，对这些数列，找到它的通项公式，就容易研究了。

例1 写出数列的一个通项公式，使它的前4项是下列各数：

（1） 1，3，5，7；

（2） $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$；

（3） $\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{9}{10}$，$\frac{16}{17}$；

（4） 1，0，1，0；

（5） $\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$\frac{1}{3\cdot 4}$，$\frac{1}{4\cdot 5}$；

解：（1） $a_n=2n-1$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$；

（2） $a_n=(-1)^n\frac{1}{2n}$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$；

（3） $a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$；

（4） $a_n=1+(-1)^{n-1}$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$；

(5) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，($n=1, 2, 3, 4$)。

练习5.1

1.根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前8项：

(1) $a_n=n^3$；　　(2) $a_n=-5(-1)^n$；

(3) $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；　　(4) $a_n=n(n+2)$；

(5) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；

(6) $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。

2.写出下列数列的一个通项公式，它们的前4项分别是：

(1) 2，4，6，8；

(2) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$-\frac{1}{16}$；

(3) $\frac{1}{1\cdot2}$，$\frac{1}{2\cdot3}$，$\frac{1}{3\cdot4}$，$\frac{1}{4\cdot5}$；

(4) $1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$；

(5) 14，24，34，44；

(6) 2，0，2，0；

(7) $1\frac{1}{2}$，$2\frac{2}{3}$，$3\frac{3}{4}$，$4\frac{4}{5}$；

(8) 9，99，999，9999；

(9) -5，55，-555，5555；

(10) 3，3+2，3+2+2，3+2+2+2.

3.已知无穷数列1×2，2×3，3×4，…，$n(n+1)$，….

(1) 求这个数列的第10项，第31项及第48项；

(2) 420是不是这个数列中的一项？若是，是第几项？

4.(1) 已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，第2项是1，以后各项由公式$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$给出。写出这个数列的前8项。

(2) 用上面的数列，通过公式$b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$构造一个新的数列$\{b_n\}$，并写出这个数列的前8项。

5.2 等差数列

5.2.1 公差

从上一节中我们看到，数列是各种各样的．下面我们先研究一类常见的数列：

1，2，3，4，5，…；

1，3，5，7，9，…；

2，4，6，8，10，…；

14，24，34，44，54，…；

1，1，1，1，1；

50，100，150，200；

30，60，90；

$21，21\frac{1}{2}，22，22\frac{1}{2}，23，23\frac{1}{2}，24，24\frac{1}{2}，25.$

这些数列有什么共性？用一句话来概括就是：

从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，即

$$a_n-a_{n-1}=d,\ (n\geqslant 2).$$

其中 d 是常数．我们把这样的数列叫做等差数列．其中的常数 d 叫做等差数列的公差．

请读者把上面那些等差数列的公差写出来．

5.2.2 等差数列的通项公式

我们知道，一个数列的通项公式确定以后，这个数列就确定了，反之亦然．请读者自己写出上面那些等差数列的通项公式．

分析任何一个等差数列，我们都可以看到，数列的各项可以由首项和公差确定．因而它的通项公式应能由首项和公差确定．

如果 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项是 a_1，公差是 d，你能用 a_1 和 d 来表示它的第 n 项 a_n 吗？

下面我们来推导这个表达式．依等差数列的定义，有

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

……

这样推下去，可知

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

有的同学可能想到下面这种求法：依等差数列的定义有

$$a_2-a_1=d,$$

$$a_3-a_2=d,$$

$$a_4-a_3=d,$$

……

$$a_n-a_{n-1}=d.$$

把以上各式的等号两边分别相加，得

$$a_n-a_1=(n-1)d$$

即 $$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

这就是等差数列的通项公式．这个公式中含有四个量：等差数列的第一项 a_1，公差 d，第 n 项 a_n，第 n 项的项数 n．这四个量中知道了其中任何三个，就可求出第四个．

例1 等差数列中已知 $a_1=0$，$d=-2$，求它的第 9 项．

解： 由等差数列的通项公式得

$$\begin{aligned}a_9&=a_0+(9-1)d\\&=0+(9-1)(-2)\\&=-16.\end{aligned}$$

答：这个等差数列的第 9 项是 -16．

例2 等差数列中，已知 $a_1=-5$，$d=-4$，问它的第几项是 -401？

解：$\because$ $a_1=-5$，$d=-4$，由等差数列通项公式得

$$-401=-5+(n-1)(-4),$$

$$\therefore\quad n=100.$$

答：这个数列的第100项是-401。

例3 已知梯子各级的宽度成等差数列，最高一级宽33cm，最低一级宽110cm，中间还有10级，求相邻两级宽度相差多少？

分析：这是一个等差数列中已知a_1，a_{12}，求公差d的问题。

解：由题意，各级的宽度成等差数列且$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$。由等差数列通项公式得

$$110=33+(12-1)d,$$

$$\therefore\quad d=7.$$

答：相邻两级宽度相差7cm。

例4 一剧场前10排的座位数成等差数列，公差是3，已知第10排座位是131个。问第一排有多少个座位？

分析：这是等差数列中，已知d，a_{10}，10，求a_1的问题。

解：$\because$ $a_{10}=131$，$n=10$，$d=3$，由等差数列的通项公式得

$$131=a_1+(10-1)\times 3,$$

$$\therefore\quad a_1=131-27=104.$$

答：第一排有104个座位。

注：本题也可把第10排看做a_1，那么第一排就是a_{10}。这

时公差 $d=-3$，则有 $a_{10}=a_1+(10-1)d$。

即 $$a_{10}=131+9(-3)$$
$$=131-27=104.$$

因而第一排有104个座位。

有关等差数列通项公式的问题，其基本类型就是上述四种。复杂的问题不过是上述四种基本类型的某种组合。

例5 一种车床变速箱的8个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是24与45，求其余各齿轮的齿数。

分析：这是已知等差数列的首项$a_1=24$，末项 $a_8=45$，项数$n=8$，求其余各项的问题。首先要求出公差d，再求出a_2，a_3，…，a_7。

（解法略）。

答：其余各齿轮的齿数从小到大分别是27，30，33，36，39，42。

例6 一个等差数列的第7项是11，第18项是2，求这个数列的通项公式。

解：由已知条件和通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$，得

$$\begin{cases}11=a_1+(7-1)d,\\2=a_1+(18-1)d.\end{cases}$$

解这个方程组，得$a_1=15\dfrac{10}{11}$，$d=-\dfrac{9}{11}$。

∴ 这个等差数列的通项公式是

$$a_n=15\frac{10}{11}+(n-1)\left(-\frac{9}{11}\right).$$

注：如果本题只要求公差d，可用下列方法：

把第7项看做第1项，则第18项就是第12项．则有

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即 $a_{18}=a_7+(18-7)d,$

$$\therefore\quad d=\frac{a_{18}-a_7}{11}=\frac{-9}{11}.$$

一般地，等差数列中知道了第m项a_m和第p项a_p，

则 $d=\dfrac{a_m-a_p}{m-p}.$

或 $a_m=a_p+(m-p)d.$

例7 求证：公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_p+a_q=a_r+a_s$的充要条件是 $p+q=r+s$.

证明：$\because$ a_p，a_q 是等差数列$\{a_n\}$中的两项，

$\therefore$ $a_q=a_p+(q-p)d.$

同理$a_r=a_p+(r-p)d.$

$a_s=a_p+(s-p)d,$

由 $a_p+a_q=a_r+a_s$，得

$$a_p+a_p+(q-p)d=a_p+(r-p)d+a_p+(s-p)d$$

$$(q-p)d=(r+s-2p)d$$

$\because$ $d\neq0$， $\therefore$ $q-p=r+s-2p$， $\therefore$ $p+q=r+s.$

$\therefore$ $p+q=r+s$ 是 $a_p+a_q=a_r+a_s$的必要条件．