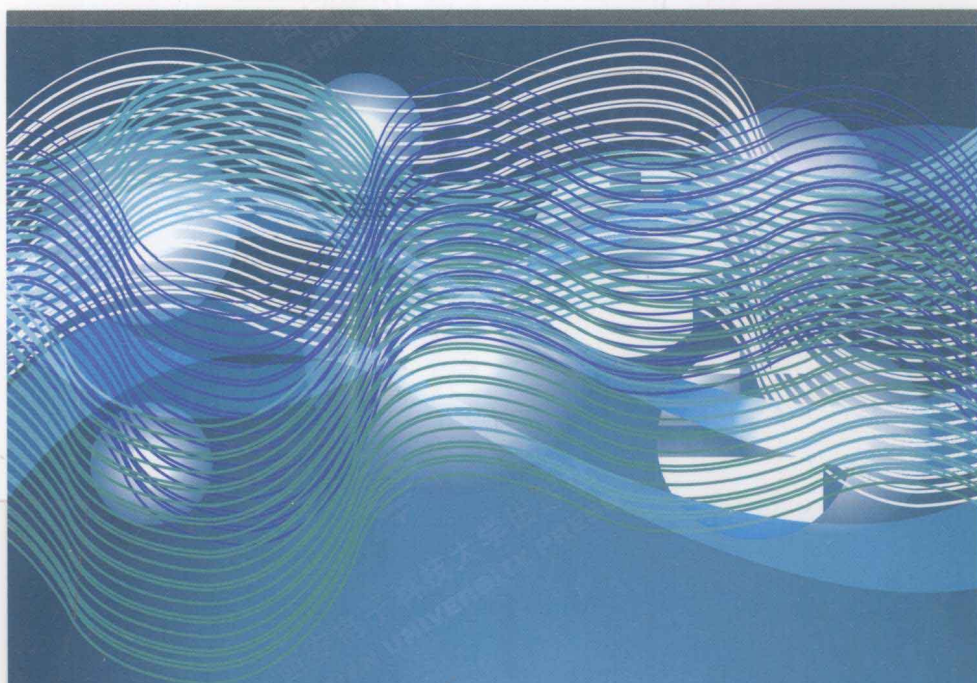


电磁理论中的 广义本征函数展开原理

Principles of Generalized Eigenfunction
Expansions in Electromagnetic Theory

龚书喜 著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

电磁理论中的 广义本征函数展开原理

Principles of Generalized Eigenfunction
Expansions in Electromagnetic Theory

龚书喜 著

西安电子科技大学出版社

2010

内 容 简 介

本书将自伴算子的广义本征函数展开的数学理论引入到电磁理论中,围绕着电磁理论中的广义本征函数展开问题进行介绍。全书分为八章,第一章对电磁理论中的广义本征函数展开问题的历史和现状作了简要评述;第二章证明了典型的广义本征函数系的完备性;第三章引入并研究了函数空间上的 δ -函数这样一个数学概念;第四章研究了算子方程的适定性问题以及并矢 Green 函数作为豫解核的广义本征函数展开问题;第五章基于 HTK 变换理论严格地建立了计算并矢 Green 函数的交换算子法,并给出了此法的应用举例;第六章导出了电磁场的源正交展开表示法,并给出此法的一些应用举例;第七章讨论了电型并矢 Green 函数的正则化问题;第八章给出了任意层数的平面分层均匀媒质中并矢 Green 函数的解;最后给出了全书的总结。

本书可作为电磁理论相关专业研究人员、高校教师和研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁理论中的广义本征函数展开原理/龚书喜著. —西安:西安电子科技大学出版社,2010.3

ISBN 978-7-5606-2369-6

I. 电… II. 龚… III. 自伴算子—应用—电磁理论 IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 002205 号

策 划 马乐惠

责任编辑 南 景 马乐惠

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2010年3月第1版 2010年3月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 6

字 数 135千字

印 数 1~500册

定 价 20.00元

ISBN 978-7-5606-2369-6/O·0102

XDUP 2661001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

本书将自伴算子的广义本征函数展开的数学理论引入到电磁理论中来,较为系统地研究了电磁理论中的广义本征函数展开问题。全书共分八章,概述如下:

第一章首先阐明了电磁理论中的一系列问题导致的广义本征函数问题,然后对电磁理论中广义本征函数展开问题的历史和现状作了简要评述,最后概述了本书所要完成的主要工作及其意义。

第二章证明了一些典型的广义本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性,通过这些具体的证明过程建立了研究 $\{L, M, N\}$ 完备性的一种方法——算子谱论法。

第三章引入并研究了函数空间上的 δ -函数,并利用此概念讨论了 Green 函数、并矢 Green 函数定义方程及其性质、广义 Helmholtz 定理等几个问题。

第四章研究了算子方程的适定性问题以及并矢 Green 函数作为豫解核的广义本征函数展开问题,其中基于广义本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性引入了矢量场(函数)的一种新的变换(命名为 Hansen - Tai - Kung 变换,简称 HTK 变换)理论;通过 HTK 变换理论,研究了解的适定性问题,并且证明了求解并矢 Green 函数的交换算子法的有效性,在连续谱问题中媒质有耗是保证解的适定性的充分必要条件。

第五章基于 HTK 变换理论严格地建立了计算并矢 Green 函数的交换算子法,给出了此法的应用举例;此外,还讨论了并矢 Green 函数在源区的不连续性方程以及确定(计算) $\vec{G}_e$ 的 $\vec{G}_m + BC$ 法。

第六章通过矢位 A 的 $\{\hat{c} f_K\}$ 展开导出了电磁场的源正交展开表示法,亦即 $M^{(c)} - N^{(c)}$ 表示法,并给出此法的一些应用举例;特别是用此法求出了旋转椭圆坐标系中(三维全空间)的并矢 Green 函数。

第七章讨论了电型并矢 Green 函数的正则化问题,得到了正则化的一个规则和 $\vec{G}_e$ 的较为一般的正则化,说明了 $\vec{G}_e$ 的位势理论解和广义本征函数展开理论解可以统一起来。

第八章给出了任意层数的平面分层均匀媒质中并矢 Green 函数的解,本章主要基于波矩阵方法和二重性原理;概述了平面分层均匀媒质中的并矢 Green 函数用于微带贴片天线谐振频率数值分析计算需要注意的问题。

最后,我们给出了本书的结论。

衷心感谢恩师西南交通大学教授任朗先生和西安电子科技大学教授茅于宽先生。在西安交通大学攻读博士学位期间,两位导师为作者的成长倾注了大量的心血,用科学的精神与博大精深的学识给予作者以深刻的教诲和悉心的指导。作者的博士学位论文^[74]工作奠定了本书的基础。

衷心感谢西安电子科技大学梁昌洪教授。作者在编写过程中始终得到梁昌洪教授良师益友般的关怀、指导与帮助。衷心感谢西安交通大学汪文秉教授对作者的关怀、指导与帮助。衷心感谢国际著名学者戴振铎(C. T. Tai)先生给予作者的关怀与精心指导。衷心感谢中国科学院院士、电子科技大学教授林为干先生对作者的关怀与指导。衷心感谢清华大学教授杨弃疾先生、西北工业大学林世明教授、上海大学钟顺时教授、西南交通大学杨儒贵教授对作者的指导、关怀与鼓励。衷心感谢西安电子科技大学王一平教授、汪茂光教授、徐国华教授、毛乃宏教授、马澄波教授、刘其中教授、傅德民教授对作者的关心与指导。衷心感谢西安电子科技大学天线与电磁散射研究所的全体同仁对作者工作的支持与帮助。

深切感谢资助本书的总装备部预研基金办公室给予作者的大力支持与帮助。

作 者
2009 年 12 月

目 录

第一章 绪论	1
第二章 广义本征函数系的完备性	8
2.1 矩形腔中本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性	8
2.2 矩形波导中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	11
2.3 三维全空间中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	15
2.3.1 直角坐标系中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	15
2.3.2 圆柱坐标系中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	18
2.3.3 椭圆柱坐标系中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	19
2.3.4 圆球坐标系中 $\{L, M, N\}$ 的完备性	21
2.4 结语及注记	22
第三章 函数空间上的 δ -函数和广义 Helmholtz 定理	24
3.1 引言	24
3.2 函数空间上的 δ -函数 ^[41, 49]	26
3.3 自伴边值问题的 Green 函数	27
3.4 电磁理论中的并矢 Green 函数	27
3.5 广义 Helmholtz 定理与矢量场的分解	28
3.6 结语及注记	32
第四章 并矢 Green 函数——豫解核及其展开理论	34
4.1 引言	34
4.2 基于 Hilbert 空间中的算子谱论方法	35
4.3 豫解核——并矢 Green 函数	37
4.4 变换分析方法及并矢 Green 函数的展开	38
4.5 结语及注记	44
第五章 计算并矢 Green 函数的交换算子法	47
5.1 引言	47
5.2 交换算子计算法	47
5.3 交换算子计算法应用实例	50
5.3.1 矩形波导中 $\vec{G}_e$ 和 $\vec{G}_m$ 的计算	50
5.3.2 三维全空间圆柱坐标系中 $\vec{G}_e$ 和 $\vec{G}_m$ 的计算	51
5.3.3 三维全空间球坐标系中 $\vec{G}_e$ 和 $\vec{G}_m$ 的计算	54
5.3.4 三维全空间直角坐标系中 $\vec{G}_e$ 和 $\vec{G}_m$ 的计算	55
5.3.5 三维全空间椭圆柱坐标系中 $\vec{G}_e$ 和 $\vec{G}_m$ 的计算	56
5.4 结语及注记	57

第六章 电磁场的源正交展开表示法	60
6.1 引言	60
6.2 三维全空间球坐标系情形	61
6.3 三维全空间圆柱坐标系情形	62
6.4 矩形波导情形	64
6.5 三维全空间旋转椭球坐标系情形	65
6.6 结语及注记	66
第七章 电型并矢 Green 函数的正则化问题	68
7.1 引言	68
7.2 $\vec{\vec{G}}_e$ 的正则化: 无限小主值体积	68
7.3 一个正则化规则	70
7.4 $\vec{\vec{G}}_e$ 的正则化: 任意主值体积	70
7.5 结语及注记	72
第八章 平面分层均匀媒质结构的并矢 Green 函数	74
8.1 引言	74
8.2 一个预备结果	74
8.2.1 电流源激励情形	75
8.2.2 磁流源激励情形	76
8.3 任意平面分层均匀媒质中的并矢 Green 函数	77
8.3.1 电流源激励情形	79
8.3.2 磁流源激励情形	82
8.4 直角坐标系和椭圆柱坐标系中的解	82
8.4.1 直角坐标系中的并矢 Green 函数	83
8.4.2 椭圆柱坐标系中的并矢 Green 函数	83
8.5 结语及注记	83
后记	85
参考文献	86

第一章 绪 论

自伴算子的广义本征函数(亦称本征泛函)和广义本征函数展开的数学理论形成于 20 世纪 50 年代后期^[1, 2]。

电磁理论中的一系列问题可导致广义本征函数和广义本征函数展开问题。最简单的例子是如下的传输线问题:

$$Af - k^2 f = g \quad (\operatorname{Re}(k) > 0, \operatorname{Im}(k) > 0) \quad (1-1)$$

式中, 算子 A 定义如下:

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in L^2 : f'' \in L^2\}, L^2 = L^2(R^1) \\ Af = -\frac{d^2 f}{dx^2} = -f'' \end{cases} \quad (1-2)$$

式中: $D(A)$ 代表算子 A 的定义域; L^2 代表由实轴上平方可积函数全体所构成的复 Hilbert 空间^[3]。

由式(1-2)定义的算子 A 是自伴的, 其谱占据复平面上的非负实轴且为纯连续谱, 即 A 的谱(集) $\sigma(A)$ 如下^[3]:

$$\sigma(A) = C\sigma(A) = [0, \infty) \quad (1-3)$$

式中, $C\sigma(A)$ 代表 A 的连续谱。

因为 A 的点谱 $P\sigma(A)$ 是空集, 所以不存在真正的本征函数^[3]。但是, 可以存在广义本征函数^[2]。

设 $\lambda \in C\sigma(A) = [0, \infty)$, 算子 A 的广义本征函数满足如下方程:

$$-\frac{d^2 f_\lambda}{dx^2} = \lambda f_\lambda \quad (1-4)$$

上述方程的解为(数值因子取为 1)

$$f_\lambda = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}, \lambda \in [0, \infty) \quad (1-5)$$

引入新变量 $h^2 = \lambda$, 式(1-5)可写成:

$$f_h = e^{ihx}, \quad h \in (-\infty, \infty) \quad (1-6)$$

$\{e^{ihx}, h \in (-\infty, \infty)\}$ 构成一个完备的广义本征函数系^[2], 其正交性可以表示如下:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx} e^{-ih'x} dx = \delta(h - h') \quad (1-7)$$

由式(1-7)容易看出广义本征函数 e^{ihx} 已经不是 L^2 中的元素了, 更不属于算子 A 的定义域 $D(A)$ (本征函数属于算子的定义域, 而广义本征函数不属于算子的定义域)。

任给 $f \in L^2$, 其广义本征函数展开如下:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ihx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ihx'} dx' \right] dh \quad (1-8)$$

式(1-8)就是 Fourier 积分公式,而展开系数就是 Fourier 变换。

式(1-8)可以写成如下更简洁的形式:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(f, \psi_h) dh \quad (1-9)$$

式中:

$$\psi_h = \psi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ihx} \quad (1-10)$$

$$(f, \psi_h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_h(x)} dx \quad (1-11)$$

式中, $\overline{\psi_h(x)}$ 代表 $\psi_h(x)$ 的复共轭。

电磁理论中更重要的一类广义本征函数展开问题是矢量场的广义本征函数展开问题。例如,如下的算子方程问题:

$$A\mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (\operatorname{Re}(k) > 0, \operatorname{Im}(k) > 0) \quad (1-12)$$

式中,算子 A 定义为

$$D(A) = \{\mathbf{F} \in L^2 : \nabla^2 \mathbf{F} \in L^2\}, L^2 = (L^2(R^3))^3$$

$$A\mathbf{F} = -\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (1-13)$$

式中, L^2 代表由三维欧氏空间上平方可积矢量函数全体所构成的复 Hilbert 空间^[3], 内积定义为

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \int_{R^3} \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot \overline{\mathbf{G}(\mathbf{R})} d^3 \mathbf{R} \quad (1-14)$$

式中, $\overline{\mathbf{G}(\mathbf{R})}$ 代表 $\mathbf{G}(\mathbf{R})$ 的复共轭。

同标量情形的证明^[3]完全相似,上述算子 A 是自伴算子,其谱占据复平面上的非负实轴且为纯连续谱,即 $\sigma(A)$ 如下:

$$\sigma(A) = C\sigma(A) = [0, \infty) \quad (1-15)$$

因为算子 A 的点谱 $P\sigma(A)$ 是空集,所以不存在真正的本征函数。但是,可以存在广义本征函数。

任给 $\lambda' \in C\sigma(A) = [0, \infty)$, 广义本征函数满足:

$$-\nabla^2 \mathbf{F}_{\lambda'} = \lambda' \mathbf{F}_{\lambda'} \quad (1-16)$$

令 $\lambda' = K^2$, 式(1-16)可写成:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_K - \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}_K = K^2 \mathbf{F}_K \quad (1-17)$$

$\mathbf{F}_K$ 的任一直角坐标分量满足:

$$-\nabla^2 f_K = K^2 f_K \quad (1-18)$$

同时,式(1-12)的任一直角坐标分量满足:

$$A f - k^2 f = g \quad (1-19)$$

式中,算子 A 是如下的自伴算子^[3]:

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in L^2 : \nabla^2 f \in L^2\}, L^2 = L^2(R^3) \\ A f = -\nabla^2 f \end{cases} \quad (1-20)$$

且有 $\sigma(A) = C\sigma(A) = [0, \infty)$ 。

这样,我们看到 f_K (见式(1-18)) 是算子 A (见式(1-20)) 的广义本征函数。

式(1-18)在直角坐标系中的解为

$$f_K = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i(K_x x + K_y y + K_z z)} \quad (1-21)$$

$$(f_K, f_{K'}) = \int_{R^3} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\cdot\mathbf{R}} d^3\mathbf{R} = \delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}') \quad (1-22)$$

任给 $f \in L^2(R^3)$ 有:

$$f(\mathbf{R}) = \int_{K^3} f_K(f, f_K) d^3\mathbf{K} \quad (1-23)$$

式中,

$$(f, f_K) = \int_{R^3} f(\mathbf{R}) \overline{f_K(\mathbf{R})} d^3\mathbf{R} \quad (1-24)$$

式中, $\overline{f_K(\mathbf{R})} = \overline{f_K} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}$ 。

现在, 式(1-17)的解可以写成:

$$\mathbf{F}_K = (\hat{x} \text{ or } \hat{y} \text{ or } \hat{z}) f_K \quad (1-25)$$

任给 $\mathbf{F} \in (L^2(R^3))^3$ 有:

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 \int_{K^3} \hat{x}_j f_K(\mathbf{F}_j, f_K) d^3\mathbf{K} \quad (1-26)$$

式中, $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j \mathbf{F}_j$, $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$, $\hat{x}_3 = \hat{z}$ 。

等价地, 式(1-26)可以写成:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \int_{K^3} f_K(\mathbf{F}, f_K) d^3\mathbf{K} \quad (1-27)$$

式中, $(\mathbf{F}, f_K) = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j (\mathbf{F}_j, f_K)$ 。

式(1-27)就是 Fourier 积分公式, $(\mathbf{F}, f_K)$ 就是 $\mathbf{F}$ 的 Fourier 变换。式(1-26)是 $\mathbf{F}$ 的广义本征函数展开, 展开系数是 $(\mathbf{F}_j, f_K) = (\mathbf{F}, \hat{x}_j f_K)$ ($j=1, 2, 3$)。

如果式(1-18)在另外的坐标系中求解, 我们便得到广义本征函数的其他表示形式。式(1-18)在圆柱坐标系中的解为

$$f_K = \Psi_{\sigma n \lambda}(h) = J_n(\lambda r) \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} e^{ihz} \quad (1-28)$$

式中: $\lambda \in [0, \infty)$; $h \in (-\infty, \infty)$; $n=0, 1, 2, \dots$; $h^2 + \lambda^2 = K^2$ 。

圆球坐标系中式(1-18)的解为

$$f_K = \Psi_{\sigma mn}(K) = j_n(KR) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \quad (1-29)$$

式中: $K \in [0, \infty)$; $m \leq n$; $n=0, 1, 2, \dots$; $m=0, 1, 2, \dots$ 。

椭圆柱坐标系中式(1-18)的解为^[4, 9]

$$f_K = \Psi_{\sigma m \lambda}(h) = R_{\sigma m \lambda}(u) S_{\sigma m \lambda}(v) e^{ihz} \quad (1-30)$$

式中: $\lambda \in [0, \infty)$; $h \in (-\infty, \infty)$; $m=0, 1, 2, \dots$; $\lambda^2 + h^2 = K^2$ 。

存在如下的正交性:

$$(\Psi_{\sigma n \lambda}(h), \Psi_{\sigma n' \lambda'}(h')) = \frac{2\pi^2(1 + \delta_{0n})\delta_{m'}\delta(h-h')\delta(\lambda-\lambda')}{\lambda} \quad (1-31)$$

$$(\Psi_{\sigma mn}(K), \Psi_{\sigma m'n'}(K')) = \frac{\pi^2(1+\delta_{0m})}{K^2} \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{mn'} \delta_m \delta(K-K') \quad (1-32)$$

$$(\Psi_{\sigma m\lambda}(h), \Psi_{\sigma m'\lambda'}(h')) = \frac{\pi^2 I_{\sigma m\lambda} \delta_{mn'} \delta(h-h') \delta(\lambda-\lambda')}{\lambda} \quad (1-33)$$

任给 $f \in L^2(R^3)$ 有:

$$f(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_n \frac{2-\delta_{0n}}{4\pi^2} \Psi_{\sigma n\lambda}(h) (f, \Psi_{\sigma n\lambda}(h)) \quad (1-34)$$

$$f(\mathbf{R}) = \int_0^\infty K^2 dK \sum_{mn} C'_{mn} \Psi_{\sigma mn}(K) (f, \Psi_{\sigma mn}(K)) \quad (1-35)$$

式中, $C'_{mn} = \frac{2-\delta_{0m}}{2\pi^2} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$.

$$f(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_{-\infty}^\infty dh \sum_m \frac{1}{\pi^2 I_{\sigma m\lambda}} \Psi_{\sigma m\lambda}(h) (f, \Psi_{\sigma m\lambda}(h)) \quad (1-36)$$

式中, $I_{\sigma m\lambda}$ 参见参考文献[4].

在式(1-34)~式(1-36)中将 $f \in L^2(R^3)$ 换为 $\mathbf{F} \in (L^2(R^3))^3$, 我们便得到了 $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ 的广义本征函数展开. 其他坐标系中的情况这里不予讨论了, 理论上 11 种坐标系^[5]中可求得式(1-18)的分离变量解.

上述广义本征函数 $\mathbf{F}_K$ 具有如下的结构:

$$\mathbf{F}_K = (\hat{x} \text{ or } \hat{y} \text{ or } \hat{z}) f_K \quad (\text{简记为 } \hat{c} f_K) \quad (1-37)$$

式中, f_K 是标量广义本征函数.

我们已经看到, 上述结构的广义本征函数 $\mathbf{F}_K$ 使得矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ 的广义本征函数展开问题标量化了, 广义本征函数系 $\{\mathbf{F}_K\}$ 的完备正交性实际上就是标量广义本征函数系 $\{f_K\}$ 的完备正交性. 我们称矢量场的这种展开为 $\hat{c} f_K$ 展开.

电磁理论中应用甚为广泛, 因而也十分重要的一类广义本征函数 $\mathbf{F}_K$ 具有与式(1-37)中的 $\mathbf{F}_K$ 完全不同的结构, 它们是通过如下的方式产生的:

$$\mathbf{F}_K = (T_L \text{ or } T_M \text{ or } T_N) f_K \quad (1-38)$$

$$\mathbf{L} = T_L f_K = \nabla f_K \quad (1-39)$$

$$\mathbf{M} = T_M f_K = \nabla \times (\hat{c} f_K) \quad (1-40)$$

$$\mathbf{N} = T_N f_K = \frac{1}{K} \nabla \times \nabla \times (\hat{c} f_K) \quad (1-41)$$

式中, $\hat{c}$ 为常矢量(如 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)或球径向矢量 $\mathbf{R}$ ^[4].

根据参考文献[5], 在一定的意义上来说, 领示矢量 $\hat{c}$ 在柱形坐标系中的最佳选择是 $\hat{c} = \hat{z}$, 而在圆球和圆锥坐标系中则为 $\hat{c} = \mathbf{R}$.

式(1-37)和式(1-38)给出的两类广义本征函数具有许多完全不同的性质. 比如 $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{N}$ 满足如下方程:

$$-\nabla \nabla \cdot \mathbf{L} = K^2 \mathbf{L} \quad (1-42)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} = K^2 \mathbf{M} \quad (1-43)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{N} = K^2 \mathbf{N} \quad (1-44)$$

而式(1-37)中的 $\mathbf{F}_K$ 不满足上述方程。广义本征函数系 $\{\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}\}$ 的完备性、正交性不是显而易见的, 需要深入地进行研究。

电磁理论中还有一系列问题导致广义本征函数展开问题, 例如波导中电磁场的求解问题^[4]。总之, 在涉及连续谱的问题中会出现广义本征函数展开问题。

电磁理论中矢量场的(广义)本征函数展开的研究始于 Hansen(1935 年, 1936 年, 1937 年)^[6, 7, 8]。Hansen^[6] 首先研究了与式(1-17)形式上完全相同的矢量波动方程(矢量 Helmholtz 方程)的求解问题, 引入了现在人们称之为 Hansen 矢量的 $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ ($\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ 这种符号似乎是 Stratton^[9] 首先使用的)。在球坐标系中解的表达式如下^[9] (与参考文献[6]中解的形式不尽相同):

$$\mathbf{L}_{\sigma mn}(k) = \nabla \Psi_{\sigma mn}(k) \quad (1-45)$$

$$\mathbf{M}_{\sigma mn}(k) = \nabla \times (\mathbf{R} \Psi_{\sigma mn}(k)) \quad (1-46)$$

$$\mathbf{N}_{\sigma mn}(k) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{R} \Psi_{\sigma mn}(k)) \quad (1-47)$$

式中: k 代表波数, $k > 0$ (见参考文献[6]中的方程(4)); $\Psi_{\sigma mn}(k)$ 见式(1-29)。

Hansen 给出的另外一组解是^[6, 9]:

$$\mathbf{L}_{\sigma mn}^{(1)}(k) = \nabla \Psi_{\sigma mn}^{(1)}(k) \quad (1-48)$$

$$\mathbf{M}_{\sigma mn}^{(1)}(k) = \nabla \times (\mathbf{R} \Psi_{\sigma mn}^{(1)}(k)) \quad (1-49)$$

$$\mathbf{N}_{\sigma mn}^{(1)}(k) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{R} \Psi_{\sigma mn}^{(1)}(k)) \quad (1-50)$$

$$\Psi_{\sigma mn}^{(1)}(k) = h_n^{(1)}(kR) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \quad (1-51)$$

注意到如下关系是有趣的:

$$\nabla^2 \Psi_{\sigma 00}^{(1)} + k^2 \Psi_{\sigma 00}^{(1)} = \frac{4\pi i}{k} \delta(R) \quad (1-52)$$

式(1-52)表明: 在广义函数微分的意义上, $\Psi_{\sigma 00}^{(1)}(k)$ 不是广义本征函数 f_K (式(1-18)), $\delta(R)$ (式(1-52)) 是由 $\Psi_{\sigma 00}^{(1)}(k)$ 在坐标原点处的奇异性引起的。同样地, $\Psi_{\sigma mn}^{(1)}(k)$ 不是广义本征函数 f_K (式(1-18))。因此, 我们的广义本征函数(式(1-29))中不含有此类解。类似的论证适用于式(1-28)和式(1-30)。

Stratton^[9] 详细地研究了 Hansen 矢量的正交性质。在参考文献[9]中 $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ 是作为如下的矢量 Helmholtz 方程的解而引入的:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0 \quad (1-53)$$

式中, $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon + i \omega \mu \sigma$ 。

由于 k^2 是复数, 式(1-53)的解与广义本征函数 $\mathbf{F}_K$ (式(1-17)) 不同, 称之为矢量波函数^[9] 是恰当的。

Morse 和 Feshbach^[5] 深入地研究了矢量 Helmholtz 方程(式(1-17))的求解问题, 尤其是 Hansen 矢量的构造问题。参考文献[5]给出的 $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ 的构造如下:

$$\mathbf{L} = T_L \Psi_L \quad (1-54)$$

$$\mathbf{M} = T_M \Psi_M \quad (1-55)$$

$$\mathbf{N} = T_N \Psi_N \quad (1-56)$$

式中, Ψ_L 、 Ψ_M 、 Ψ_N 是标量 Helmholtz 方程的解, 其边界条件由相应的矢量 L 、 M 、 N 的边界条件决定。

L 、 M 、 N 的上述构造不但适用于纯连续谱问题(此时式(1-54)~式(1-56)退化为式(1-39)~式(1-41)), 适用于纯点谱问题(如腔体问题), 而且适用于点谱和纯连续谱迭加而成的连续谱问题(如波导问题)。换言之, 式(1-54)~式(1-56)同时解决了本征函数(点谱问题)和广义本征函数(连续谱问题)的构造问题。

然而, 参考文献[5]中很少考虑广义本征函数展开问题, 即连续谱问题。在球坐标系情况下得到的矢量 Helmholtz 方程的解与参考文献[6, 9]一致。如前所述, 这样的解并不都是广义本征函数。

Tai 的杰出工作^[4]使我们认识了广义本征函数展开问题。尽管在其中广义本征函数 M 、 N 被称为矢量波动方程在坐标原点处有限的本征函数, 尽管参考文献[4]中没有引进自伴算子(如果引进自伴算子, 注意到了算子 $\{\nabla \times \nabla \times\}$ 的谱论性质, 自然也就不会有排除广义本征函数 L 的理由了), 但是参考文献[4]毕竟给出了广义本征函数系 $\{M, N\}$ 的正交性质与众多的并矢 Green 函数的广义本征函数展开(当然这些展开式是不完全的)以及系统的研究方法。

因为(广义)本征函数展开问题常常和算子方程的求解相联系, 所以在电磁理论中研究的着眼点往往放在 Green 函数——“豫解核”的广义本征函数的展开上。因为通常要求解的是矢量场, 所以 Green 函数为一并矢函数^[5]。

并矢 Green 函数是 Schwinger 在 20 世纪 40 年代初期首先引入的, 首篇公开文献是参考文献[10]。参考文献[5]对并矢 Green 函数进行了广泛的研究, 其中包括(广义)本征函数展开问题。同一时期, Tai 独立地进行了并矢 Green 函数的广义本征函数展开研究^[11, 12]。

1971 年, Tai 的专著^[4]出版了, 其核心内容是各种并矢 Green 函数的广义本征函数展开。1972 年, Brundell 发现了参考文献[4]中电型并矢 Green 函数展开的不完全性, 导致了参考文献[13, 14]和[15]的研究工作。参考文献[15]给出了对参考文献[4]的重要修正, 参考文献[16]又给出了进一步修正。

在(广义)本征函数系 $\{L, M, N\}$ 构成一完备正交系的前提下, 并矢 Green 函数的研究实质上归结为其展开式的计算研究。因此, 参考文献[15]以后的工作实质上是并矢 Green 函数的计算研究(假定 $\{L, M, N\}$ 构成一完备正交系)。参考文献[17]研究了矩形腔中的并矢 Green 函数。参考文献[18]着重研究了电型 Green 函数的无旋分量, 纠正了一些错误观念。

近年来从事此方面工作的研究者有: Rahmat-Samii^[19]、Kisliuk^[20, 21]、Pathak^[22]、Pearson^[23]、Tai^[24]、Lee 等^[25]、Yaghjian^[26]、Wang^[27]、Daniel 等^[28, 29]、Bressan 等^[30]、Collin^[31, 32]、潘生根^[33, 34]、周学松^[35, 36]、宋文森^[37, 38]、龚书喜^[39, 40, 73, 74]等。其中, 参考文献[39]首次研究了广义本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性问题(L 、 M 、 N 的广义本征函数性就是那时候认识的)。以上是相关研究工作的简要评述。

本书将自伴算子广义本征函数展开的数学理论引进到电磁理论中来, 以此理论为依据来研究电磁理论中的广义本征函数展开问题。广义函数论和泛函分析是研究中使用的数学理论和方法。本书研究的问题如下:

1. 广义本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性问题

函数系的完备性是展开理论的基础, 完备性没有证明之前展开理论就缺乏严密的科学基础。本书第二章以自伴算子的谱理论和广义函数论相结合的方法研究了一些具有代表性的(广义)本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性。主要的结果是给出了研究完备性的一种方法——算子谱论法及一些(广义)本征函数系 $\{L, M, N\}$ 完备性的数学证明。

第三章引入并研究了函数空间上的 δ -函数。这样一个 δ -函数是在用另外一种方法^[39]研究 $\{L, M, N\}$ 的完备性时自然地引入的, 它导致对并矢 Green 函数满足的微分方程的修正。这样的 δ -函数在一系列问题尤其是 Green 函数问题的研究中是有用的, 广义 Helmholtz 定理的导出和表述亦有赖于此概念。

2. 矢量场作为算子方程的解之适定性问题——逆算子的有界性问题

算子方程解的存在性、唯一性和稳定性是算子方程求解时需要研究的问题。本书第四章研究了这个问题以及算子的“豫解核”——并矢 Green 函数的(广义)本征函数展开问题。

3. 并矢 Green 函数的(积分)计算问题

在求得了并矢 Green 函数的(广义)本征函数展开之后, 如何计算其中的某一积分已成为较多参考文献中讨论的课题^[15, 23, 31, 33, 37, 40], 这涉及到并矢 Green 函数的源区性质问题。本书第五章集中讨论了这个问题, 给出了计算并矢 Green 函数的交换算子法及其证明, 同时给出了电磁并矢 Green 函数在源区的不连续性方程^[40, 41]。

第六章给出了并矢 Green 函数的另外一种求解方法——矢位 A 的 $\hat{c}f_K$ 展开法, 这导致了电磁场的源正交表示法。

4. 并矢 Green 函数的位势理论解和广义本征函数展开理论解的关系问题

电型并矢 Green 函数的位势理论解具有不可积奇异点, 因而需要特殊处理^[25, 26]。电型并矢 Green 函数的广义本征函数展开理论解是否具有同样的不可积奇异点, 这个问题在文献中并没有统一的意见。本书第七章考虑了这个问题, 得到的结论是: 并矢 Green 函数的广义本征函数展开理论解具有可积奇异点, 因而不需要特殊处理。第七章还给出了电型并矢 Green 函数位势理论解新的正则化公式。

5. 任意层数的平面分层均匀媒质中并矢 Green 函数的求解问题

这个问题理论上并不复杂, 但实际求解需要解大量的线性方程组。本书第八章考虑了这个问题, 给出了简单的求解方法和解的表达式。

以上诸问题是文献中没有解决或没有很好解决的问题。解决这些问题或提供解决这些问题的方法构成了本书的主要内容。

第二章 广义本征函数系的完备性

广义本征函数系的完备性是广义本征函数展开方法的数学基础。广义本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性一直是人们关心但未解决的问题^[39, 42, 43]。正是由于这一问题没有解决, Tai 的专著^[4]中排除了广义本征函数 L 。

本征函数系的完备性可由变分原理给予证明^[5, 44]。然而, 广义本征函数系的完备性证明是不能由变分原理推演出来的。原因如下: 广义本征函数是非平方可积函数, 而平方可积条件对变分原理而言是必要的。

本章给出的方法适用于广义本征函数系和本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性研究。此方法充分利用了算子的谱结构和广义函数论的一些结论, 可以称之为算子谱算法。

2.1 矩形腔中本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性

下面研究算子 A 的本征函数系的完备性问题:

$$D(A) = \{F \in L^2 : \nabla^2 F \in L^2, n \times F|_{\Gamma} = 0, \nabla \cdot F|_{\Gamma} = 0\}$$

$$AF = -\nabla^2 F \quad (2-1)$$

式中: $L^2 = (L^2(\Omega))^3$ 代表由腔体中平方可积矢量函数全体构成的复 Hilbert 空间, $\Omega = \{x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, l)\}$; $\Gamma = \partial\Omega$ 是 Ω 的边界。

由矢量 Green 定理^[5]容易证明算子 A 是对称的。此外, 通过分布论——广义函数论^[3]容易证明算子 A 是自伴的。 A 是正定算子, 这是容易验证的。

算子 A 的本征函数满足如下方程:

$$-\nabla^2 F_K = K^2 F_K, F_K \in D(A) \quad (2-2)$$

显然, 如下的函数是上述方程的解:

$$F_K = x \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (2-3a)$$

$$F_K = y \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (2-3b)$$

$$F_K = z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l} \quad (2-3c)$$

$$K^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = K_{mp}^2 > 0 \quad (2-3d)$$

式中, $m, n, p=0, 1, 2, \dots$, 但要保证 $F_K \neq 0$ 。

在 $b < a < l$ 的条件下, 最小本征值为 K_{101}^2 。

显然, 本征函数系 $\{F_K\}$ (式(2-3)) 构成一完备正交系。

式(2-2)的另外一组解如下:

$$L = \nabla \Psi_L \quad (2-4)$$

$$M = \nabla \times (\hat{z} \Psi_M) \quad (2-5)$$

$$N = \frac{1}{K} \nabla \times \nabla \times (\hat{z} \Psi_N) \quad (2-6)$$

$$\Psi_L = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (2-7)$$

$$\Psi_M = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (2-8)$$

$$\Psi_N = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l} \quad (2-9)$$

$$K^2 = K_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \quad (2-10)$$

式中, $m, n, p=0, 1, 2, \dots$, 但要保证 L, M, N 都不为零。

算子 A 的最小本征值为 K_{101}^2 (假定 $b < a < l$), 这对应于最低谐振模式。 $\{L, M, N\}$ 构成一正交系。正交关系如下:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} L_{mnp} \cdot M_{m'n'p'} d^3R = 0 \\ \int_{\Omega} L_{mnp} \cdot N_{m'n'p'} d^3R = 0 \\ \int_{\Omega} M_{mnp} \cdot N_{m'n'p'} d^3R = 0 \\ \int_{\Omega} L_{mnp} \cdot L_{m'n'p'} d^3R = \frac{abl}{8} K_{mnp}^2 \delta_{mn} \delta_{m'} \delta_{pp'} \\ \int_{\Omega} M_{mnp} \cdot M_{m'n'p'} d^3R = \frac{abl}{8} K_t^2 (1 + \delta_{0m}) (1 + \delta_{0n}) \delta_{mn} \delta_{m'} \delta_{pp'} \\ \int_{\Omega} N_{mnp} \cdot N_{m'n'p'} d^3R = \frac{abl}{8} K_t^2 (1 + \delta_{0p}) \delta_{mn} \delta_{m'} \delta_{pp'} \end{cases} \quad (2-11)$$

式中, $K_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ 。

如果将式(2-5)和式(2-6)中 $\hat{z}$ 换为 $\hat{y}$, 则 $\Psi_M^{(y)}$ 和 $\Psi_N^{(y)}$ 如下:

$$\Psi_M^{(y)} = \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}$$

$$\Psi_N^{(y)} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}$$

如果将领示矢量选为 $\hat{x}$, 则又得到一组解^[5]。

现在我们来证明领示矢量为 $\hat{z}$ 的本征函数系 $\{L, M, N\}$ 的完备性, 这只要研究 $(L^2(\Omega))^3$ 稠密子集上的情况便足够了^[45]。任给 $F \in D(A)$, 我们要证明: 如果任给 L, M, N , 恒有 $(F, L) = (F, M) = (F, N) = 0$, 则有 $F = 0$ 。

证明 依定义有:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}, \mathbf{L}) &= \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{L} d^3 \mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \Psi_L d^3 \mathbf{R} \\
 &= \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \Psi_L dS - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Psi_L d^3 \mathbf{R}
 \end{aligned} \quad (2-12)$$

因为 $\Psi_L|_{\Gamma}=0$, 故有:

$$(\mathbf{F}, \mathbf{L}) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Psi_L d^3 \mathbf{R} \quad (2-13)$$

若 $(\mathbf{F}, \mathbf{L})=0$ 对所有的 $\mathbf{L}$ 成立, 则

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Psi_L d^3 \mathbf{R} = 0 \quad (\text{对任何 } \Psi_L) \quad (2-14)$$

由本征函数系 $\{\Psi_L\}$ 的完备性推得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (2-15)$$

同理, 依定义有:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}, \mathbf{M}) &= \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} d^3 \mathbf{R} \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \Psi_M) d^3 \mathbf{R} \\
 &= - \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{z}}) \Psi_M dS + \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \Psi_M d^3 \mathbf{R}
 \end{aligned} \quad (2-16)$$

因为 $\mathbf{n} \times \mathbf{F}|_{\Gamma}=0$, 故

$$(\mathbf{F}, \mathbf{M}) = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Psi_M d^3 \mathbf{R} \quad (2-17)$$

若 $(\mathbf{F}, \mathbf{M})=0$ 对全部的 $\mathbf{M}$ 成立, 则

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Psi_M d^3 \mathbf{R} = 0 \quad (\text{对任何 } \Psi_M, \text{ 但 } m=n=0 \text{ 的除外}) \quad (2-18)$$

然而, 当 $m=n=0$ 时有:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \Psi_M d^3 \mathbf{R} = \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{z}} \Psi_M) dS = 0 \quad (2-19)$$

综合式(2-18)和式(2-19)有:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Psi_M d^3 \mathbf{R} = 0 \quad (\text{对任何 } \Psi_M) \quad (2-20)$$

由本征函数 $\{\Psi_M\}$ 系的完备性得

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (1-21)$$

同样地,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}, \mathbf{N}) &= \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d^3 \mathbf{R} \\
 &= \frac{1}{K} \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \times \nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \Psi_N) d^3 \mathbf{R} \\
 &= - \frac{1}{K} \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{M}(\Psi_N)) dS + \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{M}(\Psi_N) d^3 \mathbf{R}
 \end{aligned} \quad (2-22)$$

式中,

$$\mathbf{M}(\Psi_N) = \nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \Psi_N) \quad (2-23)$$