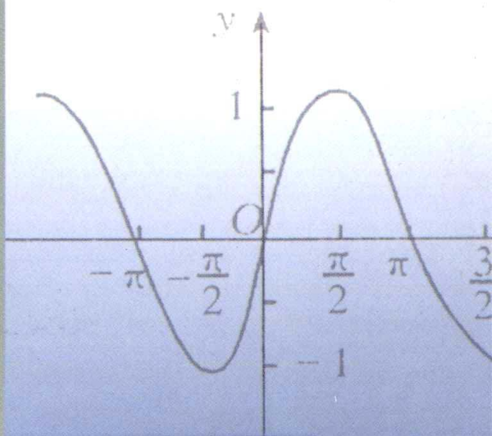
《考研数学复习全书》编写组

高等数学复习指南

Gaodeng Shuxue Fuxi Zhinan

考研数学复习全书　（理工类）

2002年



东南大学出版社

考研数学复习全书

高等数学复习指南
(理工类)

《考研数学复习全书》编写组

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,在对多年的研究生入学试题进行分析总结和多年的考研辅导实践的基础上编写而成的。

全书共分 8 章,每章内容包括内容提要、典型例题及练习题,并附有习题答案与提示。本书是报考工学硕士的高等数学复习指南,绝大部分内容也适用于经济类考生,可作为高等院校教师和学生的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学复习指南:理工类/《考研数学复习全书》编写组编.—南京:东南大学出版社,2000.10

(考研数学复习全书)

ISBN 7-81050-687-0

Ⅰ.高... Ⅱ.考... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51910 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人 宋增民

江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:24 字数:599 千字

2001 年 5 月第 1 版第 2 次印刷

总定价:70.00 元 本册定价:30.00 元

(凡有印装质量问题,可直接向发行科调换,电话:025-3792327)

序

在当今科学技术的各个领域,数学修养已成为工程技术人员必备的素质,计算机的发展,使数学的潜在威力越来越快地转化为现实生产力。近半个世纪以来,数学已不仅应用于自然科学和工程技术,在经济管理、社会科学、甚至文化艺术等领域也得到了广泛的应用,人们把数学作为工具,解决他们在各个领域中遇到的实际问题,同时也通过学习数学,培养创造性的思维能力。人们已开始重视数学技术和数学文化。

大学数学一直是我国理工科大学生的必修课。近年来,也已逐步成为文科(如经济、社会、政治学科)和其他学科的必修科目。随着教学改革的不断深入,随着计算机和信息技术的迅速发展,随着各门学科之间的加速渗透,从培养21世纪人才的角度来看,人们越来越认识到:大学数学教学的重点不仅仅是为专业课程提供数学工具,同时应重视提高大学生的数学素质。从这个意义上说,教学过程中不仅要向学生传授数学知识,使之掌握基本概念和基本理论,更重要的是培养学生对事物的归纳和抽象的思维能力,从具体到一般的联想能力,建立实际问题的数学模型的能力,正确的演绎推理习惯和动手运算的能力,自我更新知识的能力(自学能力),从而通过掌握数学的思想方法,激发学生的创造力。

我国高等教育正在蓬勃发展,招生规模迅速扩大,高校类型和人才培养目标也不尽相同。因此,在大学数学有一个基本要求的前提下,有必要根据专业类型和培养目标编写不同层次、不同要求的教材。基于此,我们与东南大学出版社共同努力,拟陆续编写出版"大学数学基础丛书",以满足不同类型学校和专业的需要,包括多种要求的高等数学、线性代数与几何、概率统计、数学建模,以及其他应用数学方法类教材,同时也考虑到研究生招生规模的扩大,广大学生对考研辅导参考书的迫切需要,首先编写了"考研数学复习全书"。

根据不同培养目标的需要,本套丛书力求对现有数学教材的教学内容进行调整和更新,并不同程度地增加一些近代数学的基础知识,以便为今后进一步的学习提供一个接口和开设一个窗口。同时针对不同学科,增加不同类型的应用实例(包括交通、经济、社会等领域的例子),以扩大学生的视野和提高学生的学习兴趣,特别是力求突出数学建模的思想,适当注意与计算机的结合等。

本套教材是在东南大学出版社和江苏省工业与应用数学学会的鼓励和大力支持下出版的,在此表示感谢。各教材的作者在编写和出版过程中付出了辛勤的劳动,在此一并致谢。

编写体现教改思想的教材是一个迫切而艰难的课题,应从多方面、多角度探索和实践,我们的尝试只是初步的,希望起到抛砖引玉的作用,盼望"百花齐放"的局面,不断把数学教学改革引向深入。

大学数学基础丛书编委会

2000年9月

修订前言

本套考研数学复习全书自第1版发行后,受到了广大读者的欢迎,同时也给我们提出了宝贵的建议和要求。据此,我们对第1版作了如下修改:一是增加了2001年全国研究生入学考试数学试题;二是在对2001年全国考研数学试题分析及对2002年研究生入学考试数学试题预测的基础上,对例题及习题进行了调整,并增加了例题分析与总结。

本套考研数学复习全书中的《高等数学复习指南(理工类)》由东南大学的董梅芳、黄骏、王海燕、黄安才老师,河海大学的郁大刚、丁莲珍老师,南京邮电大学的薛志纯老师,扬州大学的张兴龙老师修订,并由董梅芳、薛志纯老师统稿。

我们希望本书能为有志报考硕士研究生的读者提供更多的帮助,也相信本书会更受读者的欢迎。

编者

2001年3月

前　言

随着研究生招生规模的不断扩大，广大考生迫切需要一套系统的研究生考前复习指导书。为此，江苏省部分高校的一批多年参与考研辅导工作和考研阅卷工作、且有较高学术造诣和丰富教学经验的教师联合编写了本套考研数学复习全书，包括《高等数学复习指南(理工类)》、《线性代数与概率统计复习指南》、《数学模拟试题及分析(理工类)》，以适应不同类型的考生的要求。

本套考研数学复习全书是根据国家教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在对历年来的研究生入学考试试题进行了详细分析和总结的基础上编写而成的。全书系统性强、题型全面、突出重点、突破难点。通过对基本概念、理论和方法的归纳总结，典型例题的详细分析，使读者熟练掌握基本解题方法，注重解题思路和解题技巧，解答疑难问题，力求培养考生分析问题和解决问题的能力，提高考生的应试能力。

本套指导书中的《高等数学复习指南(理工类)》，由东南大学的董梅芳、黄骏、王海燕、黄安才老师，河海大学的郁大刚、丁莲珍老师，南京邮电大学的薛志纯、周华老师，江苏理工大学的丁丹平老师，扬州大学的张兴龙老师编写，由董梅芳、薛志纯老师统稿。

在本书的编写出版过程中，得到了东南大学出版社及有关高校数学系领导和教师的大力支持，在此一并表示感谢！

编者

2000 年 9 月

目　　录

1　函数、极限、连续

1.1　函数

1.1.1　函数

设数集 $D \subset R$,若对于任一 $x \in D$,按照一定的对应法则 f,总有确定的数值 y 与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为 $y = f(x)$,称 D 为函数的**定义域**,$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 为 f 的**值域**。

定义域和对应法则是确定一个函数的两要素。

1.1.2　反函数

设有函数 $y = f(x), x \in D$。对 $y \in f(D)$,由 $y = f(x)$ 可确定 x 与之对应,由此确定的函数称为 $y = f(x)$ 的**反函数**,记为 $x = f^{-1}(y)$,习惯上记为 $y = f^{-1}(x)$。

函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

1.1.3　复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,$D = \{x \mid x \in D_\varphi$ 且 $\varphi(x) \in D_f\} \neq \varnothing$,则当 $x \in D$ 时,由 $y = f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的**复合函数**。

1.1.4　初等函数

由常数和基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的并可用一个解析式子表示的函数,称为**初等函数**。

1.1.5　函数的几个重要性质

1) 有界性　若存在 $M > 0$,使得对任一 $x \in I \subset D$,都有 $|f(x)| \leqslant M$($f(x) \leqslant M$ 或 $f(x) \geqslant -M$),则称 $f(x)$ **在 I 上有界**(有上界或有下界)。

注　一般证明 $f(x)$ 在 I 上无界的方法是:找一数列 $\{x_n\} \subset I$,使 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$。

2) 单调性　若对任意的 $x_1 < x_2$,且 $x_1, x_2 \in I \subset D$,总有 $f(x_1) < (>) f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加(减少)**。

3) 周期性　若存在 $T > 0$,使当 $x \in D$ 时,有 $x \pm T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**。通常称使 $f(x + T) = f(x)$ 成立的最小 T 为 $f(x)$ 的周期。

注　若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 $\dfrac{T}{a}$ 为 $f(ax + b)$ 的周期($a > 0$)。若 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期,$i = 1,2,\cdots,n$,则 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$ 及 $f_i(x)$ 经初等运算所得函数的公共周期。

4) 奇偶性　若对任意 $x \in T$,总有 $f(-x) = -f(x)$($f(-x) = f(x)$),则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数。

奇(偶)函数的图形关于原点(y 轴)对称。

注　2 个奇或偶函数的运算具有以下结论:奇 ± 奇 = 奇;偶 ± 偶 = 偶;奇 $\frac{\times}{\div}$ 奇 = 偶;偶 $\frac{\times}{\div}$ 偶 = 偶;奇 $\frac{\times}{\div}$ 偶 = 奇。

例题精选 1.1

【例 1】　设 $f(x)$ 的定义域为[0,1],求下列函数的定义域:

(1) $f(\ln(\ln x))$;

(2) $f(\sin x) + f(\cos x)$。

解　(1) 令 $u = \ln(\ln x)$,$f(u)$ 的定义域为[0,1],故 $0 \leqslant \ln(\ln x) \leqslant 1$,于是 $1 \leqslant \ln x \leqslant e$,$e \leqslant x \leqslant e^e$,因此 $f(\ln(\ln x))$ 的定义域为 $[e,e^e]$。

(2) 求 $f(\sin x) + f(\cos x)$ 的定义域,即求下列不等式组的解:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

因此 $f(\sin x) + f(\cos x)$ 的定义域为 $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$。

【例 2】　求函数 $y = \sin \dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域。

解　$y = \sin \dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 为 $y = \sin \dfrac{\pi}{2} u$ 和 $u = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的复合函数。由于 $1 + x^2 \geqslant 2|x|$,所以 $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$,于是 $u = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$,$y = \sin \dfrac{\pi}{2} u$ 的值域为 $[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$。

【例 3】　已知

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ x & x \leqslant 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ x^3 & x > 1 \end{cases}$$

求 $f(g(x))$,$g(f(x))$。

解　这是求 2 个分段函数的复合函数。首先

$$f(g(x)) = \begin{cases} \ln g(x) & g(x) > 0 \\ g(x) & g(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

其次,由 $g(x) > 0$,得 $x > 1$ 或 $x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$,此时

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0 \\ x^3 & x > 1 \end{cases}$$

$$\ln g(x)=\begin{cases}\ln x^2 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0\\ \ln x^3 & x>1\end{cases}$$

而当 $x=0$ 时,$g(x)=0$,综上得

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln x^2 & x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0\\ \ln x^3 & x>1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

同理可得

$$g(f(x))=\begin{cases}f^2(x) & f(x)\leqslant 1\\ f^3(x) & f(x)>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln^2 x & x>0 \text{ 且 } f(x)\leqslant 1\\ x^2 & x\leqslant 0 \text{ 且 } f(x)\leqslant 1\\ \ln^3 x & x>0 \text{ 且 } f(x)>1\\ x^3 & x\leqslant 0 \text{ 且 } f(x)>1\end{cases}=\begin{cases}\ln^2 x & 0<x\leqslant \mathrm{e}\\ x^2 & x\leqslant 0\\ \ln^3 x & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

【例 4】 (1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$;

(2) 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且当 $y=1$ 时,$z=x$,求 $f(x)$;

(3) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)(a^2\neq 1)$,其中 $\varphi(x)$ 是已知函数,在 $x\neq 1$ 时有定义,求 $f(x)$。

解 (1) **方法 1** 由已知

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3x}{2x+(x-1)}=\frac{3\dfrac{x}{x-1}}{2\dfrac{x}{x-1}+1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

这种解法的关键是变形,凑出 $f(x)$。

方法 2 先由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 解出 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$,再将其代入 $f(3x)$ 得

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{\dfrac{3f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{3f(x)}{f(x)-1}-1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

(2) 由 $y=1$ 时 $z=x$,得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$,令 $u=\sqrt[3]{x}-1$,$x=(u+1)^3$,于是

$$f(u)=(u+1)^3-1=u^3+3u^2+3u$$

即得

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

(3) 题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数的等式,此类题目的解法一般是利用变量代换,设法得到一个方程组,然后解出 $f(x)$。为此,令 $t=\dfrac{x}{x-1}$,则 $x=\dfrac{t}{t-1}$,代入原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$$

于是得到关于 $f(x), f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 的二元一次方程组

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - af(x) = \varphi(x) \\ f(x) - af\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \end{cases}$$

解得

$$f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$$

【例5】 设 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$，且在 $[0,2]$ 上，$f(x) = x(x-2)$，试求 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表达式。

解 设法利用所给的关系式 $f(x+2) = 2f(x)$ 来扩充 $f(x)$ 的定义域。

当 $x \in [2,4]$ 时，$x-2 \in [0,2]$，因此

$$f(x-2) = (x-2)(x-4)$$

$$f(x) = 2f(x-2) = 2(x-2)(x-4)$$

当 $x \in [-2,0]$ 时，$x+2 \in [0,2]$，因此

$$f(x+2) = (x+2)x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+2) = \frac{1}{2}x(x+2)$$

当 $x \in [-4,-2]$ 时，$x+2 \in [-2,0]$，由上得

$$f(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)(x+4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+2) = \frac{1}{4}(x+2)(x+4)$$

综上得 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x+2)(x+4) & -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ \dfrac{1}{2}x(x+2) & -2 < x \leqslant 0 \\ x(x-2) & 0 < x \leqslant 2 \\ 2(x-2)(x-4) & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

【例6】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $a>0, b>0$，若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明：$f(a) + f(b) > f(a+b)$。

证 由 $a>0, b>0$ 得 $a < a+b, b < a+b$，再由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，得

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(a+b)}{a+b}, \qquad \frac{f(b)}{b} > \frac{f(a+b)}{a+b}$$

即

$$(a+b)f(a) > af(a+b), \qquad (a+b)f(b) > bf(a+b)$$

两式相加得

$$(a+b)(f(a)+f(b)) > (a+b)f(a+b)$$

从而有

$$f(a)+f(b)>f(a+b)$$

【例 7】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶(奇)函数,且图形关于 $x=2$ 对称,证明 $f(x)$ 为周期函数,并求周期 T。

证 要证 $f(x)$ 为周期函数,只需设法找到 $T>0$,使 $f(x)$ 满足关系式 $f(x+T)=f(x)$ 即可。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,又 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,故有

$$f(2+x)=f(2-x)$$

以 $x-2$ 代入 x,得

$$f(x)=f(4-x)$$

在上式中,再用 $-x$ 代替 x,得

$$f(-x)=f(4+x)$$

因此 $f(x+4)=f(x)$,故 $f(x)$ 为周期函数,且以 4 为周期。

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,又 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,故有

$$f(2+x)=f(2-x)$$

即

$$f(x)=f(4-x)$$

在上式中,用 $-x$ 代替 x,得

$$f(x+4)=f(-x)$$

再用 $x+4$ 代替 x,得

$$f(x+8)=f(-(x+4))=-f(x+4)=-f(-x)=f(x)$$

故 $f(x)$ 为周期函数,且以 8 为周期。

【例 8】 设 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1}$,求 $f(x)$。

解 在

$$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1} \tag{1}$$

中以 $\frac{1}{x}$ 代换 x,得

$$2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x+x^2} \tag{2}$$

式(1)$\times x^2-$式(2)$\times 2$ 得

$$-3f(x)=\frac{-3x}{x+1}$$

即

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$