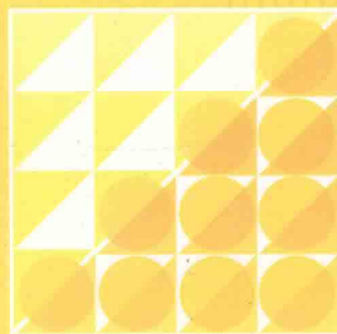


田宗漱 卞学鑽 (Theodore H. H. Pian) 著

多变量变分原理与 多变量有限元方法



科学出版社

多变量变分原理与 多变量有限元方法

田宗漱 卞学鑽(Theodore H. H. Pian) 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

多场变量有限元方法是有限元方法发展的前沿领域之一,具有重要的理论意义及重大的应用前景,它们大大地扩大了有限元的应用范围,解决了位移元所不能解决的一系列问题,并将这门学科推向一个新的高度。

本书系依照作者在此范畴多年研究所形成的独立见解,以各类变分原理及扩展的变分原理为纲,将到目前为止,40多年来世界各国学者在多场变量有限元方面所取得的结果,进行分类筛选,归纳梳理,形成的第一部系统论述多变量有限元方法的专著。本书系统地讲述了59类191种多变量有限元,对各类有限元,均由浅入深地讲述了其建立所依据的变分原理及泛函导出、本质约束条件,单元的列式及单刚计算,敛散问题,应用实例,此类元的特点及存在问题。对目前有争论及待解的重要问题,决不回避,而是分别阐述了双方论点,并给出双方主要参考文献,引导读者参与思考和探讨。本书将对拓展有限元的前沿领域、展示有限元方法在理论上的完备性与创新性、应用上的灵活性与适应性、以及促进有限元学科的发展起到开路作用。

本书可作为从事有限元计算的科学研究人员、工程技术人员及高等学校相关专业师生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

多变量变分原理与多变量有限元方法/田宗漱,卞学镛(Theodore H. H. Pian)
著. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-030482-7

I. 多… II. ①田… ②卞… III. ①多变量-变分学 ②多变量-有限元法
IV. ①O176 ②O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第038307号

责任编辑:沈 建/责任校对:张怡君 李 影

责任印制:赵 博/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年4月第 一 版 开本:16(787×1092)

2011年4月第一次印刷 印张:49 1/4

印数:1—2 000 字数:1 088 000

定价:200.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

有限元方法，是随机计算机发展而发展起来的学科。现在，它已经成为解微分方程边(初)值问题的强有力工具。

最初的有限元是建立在单场变量位移的基础上，这类有限元称为假定位移元。现在国内外的有限元书籍及高校所讲“有限元方法”课程，绝大多数是讲述这类单场变量的位移元。

但是，随着有限元方法在工程上的广泛应用，这种传统位移元的缺点及不足日益暴露出来，同时，工程上也要求快速地提高求解精度与计算效率，因此，近四十年来，相继建立了许多高性能的多场变量有限元，这些有限元统称为“高等有限元”，它们代表了有限元学科的发展方向，并具有广阔与重要的应用前景。

本着将这方面的知识系统地传授给读者，并将引向本学科的前沿，Pian 在美国麻省理工学院及田在中国科学院研究生院，曾分别讲授了“高等有限元方法”课程，它与现有的“有限元方法”不同，“高等有限元方法”是在更高的层次上，讲述了多年来国内外学者发展建立的先进多场变量变分原理及有限元方法。

我们通过大量文献，总结了世界诸子百家、依据变分原理、在多场变量有限元研究上所取得的重要成果(其中包括Pian所创立的的杂交应力元及我们多年的研究成果)，依照我们的见解进行了分类筛选、归纳整理、系统严谨地进行了论述，写成此书。同时，根据多年的教学与科研实践，不断地进行了改进与补充。

为了便于理解各类有限元建立的基本概念及基本理论，本书前面加述了小位移变形弹性理论变分原理等预备知识。

我们期望通过此书，引导读者走进有限元学科的深层领域，了解各类多场变量有限元的建立与应用、诸多学者的创新思维方法、这门学科现在取得的主要成果、它的研究动向及今后发展趋势，从而为解决工程疑难问题，提供先进数值工具。

本书必然存在着一些缺点及不足，甚至还会有差错，诚恳欢迎大家批评指正。

目 录

前言

第1章 小位移变形弹性理论基本方程	(1)
§ 1.1 应力、应变、位移、体积力、表面力	(1)
§ 1.2 应变能和余能	(2)
1.2.1 应变能密度	(2)
1.2.2 余能密度	(3)
§ 1.3 小位移变形弹性理论基本方程	(3)
1.3.1 平衡方程(力学方程)	(3)
1.3.2 应变位移方程(几何方程)	(4)
1.3.3 应力应变关系(物理方程或本构方程)	(5)
1.3.4 边界条件	(10)
§ 1.4 散度定理(Divergence Theorem)	(12)
1.4.1 数学方面	(12)
1.4.2 力学方面	(12)
§ 1.5 虚功原理	(13)
1.5.1 虚位移原理	(13)
1.5.2 虚应力原理(虚余功原理)	(14)
§ 1.6 小结	(15)
参考文献	(16)
第2章 小位移变形弹性理论经典变分原理	(18)
§ 2.1 从经典变分原理的约束条件出发弹性理论基本方程分类	(18)
§ 2.2 小位移变形弹性理论最小势能(位能)原理	(19)
2.2.1 最小势能原理泛函的建立	(19)
2.2.2 最小势能原理及泛函约束条件	(20)
2.2.3 证明	(20)
§ 2.3 最小势(位)能原理的另一种表达式	(24)
§ 2.4 最小余能原理	(25)
2.4.1 最小余能原理泛函的建立	(25)
2.4.2 最小余能原理及泛函约束条件	(26)
2.4.3 证明	(26)
§ 2.5 弹性理论变分原理与数学变分命题	(29)
2.5.1 数学变分问题	(29)
2.5.2 弹性理论的变分问题	(30)
§ 2.6 小结	(30)
参考文献	(31)
第3章 小位移变形弹性理论广义变分原理	(33)
§ 3.1 函数的条件极值拉格朗日乘子法(Lagrange's Method of Multipliers)	(33)
3.1.1 一个约束条件下函数的极值	(33)
3.1.2 两个约束条件下函数的驻值	(38)

3.1.3 待定拉格朗日乘子法及已识别的拉格朗日乘子法	(39)
§ 3.2 罚函数法	(40)
§ 3.3 小位移变形弹性理论广义变分原理	(42)
§ 3.4 Hellinger-Reissner 变分原理	(43)
3.4.1 Hellinger-Reissner 变分原理泛函 $\Pi_{HR}(\sigma, u)$ 的建立	(43)
3.4.2 关于这个变分原理需注意的事项	(46)
§ 3.5 ϵ, u 双变量广义变分原理	(47)
3.5.1 ϵ, u 双变量广义变分原理泛函 $\Pi_{P_2}(\epsilon, u)$ 的建立	(47)
3.5.2 对这个变分原理的分析	(49)
§ 3.6 Π_{HR} 与 Π_{P_2} 两种广义变分原理泛函之间的关系	(50)
§ 3.7 Hu-Washizu(胡海昌-鹭津久一郎)广义变分原理	(51)
3.7.1 Hu-Washizu 变分原理泛函 $\Pi_{HW}(\sigma, \epsilon, u)$ 的建立	(51)
3.7.2 对于 Hu-Washizu 广义变分原理的分析	(52)
§ 3.8 弹性理论常规变分原理之间的关系	(54)
§ 3.9 建立广义变分原理的另外途径——罚函数法	(56)
§ 3.10 弹性理论变分原理的等价性	(56)
3.10.1 弹性理论变分原理的等价性	(56)
3.10.2 等价变分原理的导出	(57)
§ 3.11 具有参数的广义变分原理	(59)
3.11.1 多参数广义变分原理	(59)
3.11.2 参数化的多场变量变分原理	(62)
§ 3.12 小结	(66)
参考文献	(68)
第4章 根据最小势能原理建立的有限元	(70)
§ 4.1 协调的假定位移有限元	(70)
4.1.1 变分原理	(70)
4.1.2 单元列式	(71)
4.1.3 数值算例	(74)
§ 4.2 有限元收敛准则 几何各向同性	(84)
4.2.1 有限元单调收敛准则	(84)
4.2.2 非协调元的收敛条件	(91)
4.2.3 几何各向同性	(92)
§ 4.3 协调位移元应变能的特点	(93)
§ 4.4 早期位移元遇到的困难 锁住现象(Locking Phenomena)	(94)
4.4.1 体积锁住(Dilatation Locking)	(95)
4.4.2 剪切锁住(Shear Locking)	(101)
4.4.3 薄膜锁住(Membrane Locking)	(107)
4.4.4 位移元锁住现象小结	(108)
4.4.5 位移元的不足之处	(108)
§ 4.5 由 $\Pi_P(u, \lambda)$ 建立的 Wilson 非协调位移元	(108)
4.5.1 用低阶位移元解弯曲问题误差产生的原因	(109)
4.5.2 Wilson 元的协调性	(110)
4.5.3 Wilson 元的有限元列式	(111)
4.5.4 Wilson 元是否通过分片试验	(112)

4.5.5 改进的 Wilson 元的数值算例	(117)
4.5.6 一个单元试验(Single-Element Test, 或 SET)及单独-单元试验(Individual Element Test 或 IET)	(118)
4.5.7 对于分片试验的不同学术见解	(119)
§ 4.6 平面理性非协调元	(120)
4.6.1 平面 5 结点理性元	(120)
4.6.2 平面 4 结点理性元	(125)
4.6.3 数值算例	(125)
§ 4.7 根据最小势能原理建立的具有转动自由度的位移元	(128)
4.7.1 Allman 3 结点三角形元	(128)
4.7.2 带转动自由度的 4 结点位移元	(133)
4.7.3 具有转动自由度的六面体位移元	(137)
§ 4.8 拟协调元	(143)
4.8.1 单元列式	(143)
4.8.2 算例	(144)
§ 4.9 小结	(154)
参考文献	(156)
第 5 章 根据修正的势能原理建立的有限元	(161)
§ 5.1 修正的势能原理 $\Pi_{mP1}(u, T)$ 混合元	(161)
5.1.1 修正的势能原理 $\Pi_{mP1}(u, T)$	(162)
5.1.2 有限元列式	(164)
5.1.3 $\Pi_{mP1}(u, T)$ 的应用实例	(165)
§ 5.2 修正的势能原理 $\Pi_{mP2}(T, u, \tilde{u})$ 杂交位移元 I	(167)
5.2.1 修正的势能原理 $\Pi_{mP2}(T, u, \tilde{u})$	(167)
5.2.2 有限元列式	(170)
5.2.3 用杂交位移元分析平面线性断裂力学问题——裂纹元 I	(171)
§ 5.3 广义协调等参元	(175)
5.3.1 广义协调元 常应力和线性应力下的广义协调条件	(175)
5.3.2 四边形广义协调等参元	(177)
§ 5.4 具有转动自由度的四边形广义协调元	(180)
§ 5.5 弹性薄板的修正势能原理 Π_{mP2}	(187)
§ 5.6 应用修正势能原理建立的薄板广义协调元	(191)
5.6.1 变分原理	(191)
5.6.2 薄板广义协调元的建立的基本思路	(193)
5.6.3 薄板广义协调元 I	(194)
5.6.4 薄板广义协调元 II	(198)
5.6.5 薄板广义协调元 III	(201)
§ 5.7 修正的势能原理 $\Pi_{mP3}(u, \tilde{u})$ 杂交位移元 II	(203)
5.7.1 变分泛函 $\Pi_{mP3}(u, \tilde{u})$	(203)
5.7.2 有限元列式	(203)
§ 5.8 小结	(204)
参考文献	(206)
第 6 章 根据余能原理及修正的余能原理建立的有限元模式(一)	(211)
§ 6.1 平衡元 I	(211)

6.1.1	最小余能原理	(211)
6.1.2	有限元列式	(213)
§ 6.2	修正的余能原理 Π_{mc_1} 及 Π_{mc_2}	(214)
§ 6.3	薄板的余能原理及修正的余能原理	(216)
6.3.1	薄板余能原理	(216)
6.3.2	薄板的修正余能原理 Π_{mc}	(219)
§ 6.4	平衡元 II	(222)
6.4.1	Loof 元及 Semi-Loof 元	(222)
6.4.2	基于 Loof 元(或 Semi-Loof 元)的平衡元 II	(223)
6.4.3	平衡元 II 的有限元列式	(227)
6.4.4	平衡元 II 举例	(228)
6.4.5	平衡元 II 的特点	(230)
§ 6.5	弹性理论分区广义变分原理	(232)
6.5.1	分区三变量广义混合变分原理	(232)
6.5.2	多分区的广义变分原理	(235)
§ 6.6	分区有限元方法解断裂力学问题	(236)
6.6.1	用分区有限元方法计算混合型应力强度因子	(236)
6.6.2	用分区有限元方法计算两种材料 V 型切口的应力强度因子	(240)
6.6.3	小结	(243)
§ 6.7	早期杂交应力元 I	(243)
6.7.1	早期杂交应力元 I 的变分原理及有限元列式	(243)
6.7.2	算例	(245)
6.7.3	几点说明	(253)
§ 6.8	杂交应力元 I 的特点	(258)
§ 6.9	小结	(263)
	参考文献	(264)
第 7 章	根据修正的余能原理建立的有限元模式 I 的应用	(268)
§ 7.1	利用杂交应力模式 I 建立的裂纹元 II	(268)
7.1.1	裂纹元 II 的单元列式	(268)
7.1.2	对裂纹元 II 列式的几点说明	(269)
7.1.3	二维断裂问题数值算例	(271)
7.1.4	三维断裂数值算例	(272)
7.1.5	杂交应力裂纹元讨论	(276)
§ 7.2	轴对称实体回转元	(276)
7.2.1	单元假定应力场	(276)
7.2.2	单元边界位移及单元刚度矩阵	(281)
7.2.3	数值算例	(282)
7.2.4	小结	(286)
§ 7.3	杂交应力层合板元	(286)
7.3.1	扩展的修正余能原理	(286)
7.3.2	层合材料的有限元列式	(287)
7.3.3	四边形层合板元	(289)
7.3.4	数值算例	(292)
§ 7.4	分析具有无外力圆柱形槽孔三维应力分布的特殊杂交应力层合元	(295)

7.4.1 单元假定应力场	(296)
7.4.2 单元边界位移场	(299)
7.4.3 数值算例	(300)
§ 7.5 具有一个无外力直表面的层合元	(304)
7.5.1 每层具有 8 结点及一个无外力直表面的层合元	(304)
7.5.2 每层具有 12 结点及一个无外力直表面层合元	(305)
§ 7.6 联合具有一个无外力圆柱表面及具有一个无外力直表面两种层合杂交 应力元, 求解具有槽孔层合板问题	(311)
7.6.1 具有倒圆角方孔的四层层合板	(312)
7.6.2 具有倒圆角矩形孔的四层层合板	(315)
7.6.3 具有单侧 U-型槽孔层合板	(317)
§ 7.7 利用杂交应力元分析自由振动问题	(320)
7.7.1 弹性体自由振动基本方程	(320)
7.7.2 弹性体自由振动的变分原理及广义变分原理	(320)
7.7.3 有限元列式	(324)
7.7.4 数值算例	(326)
§ 7.8 小结	(325)
参考文献	(327)
第 8 章 修正的余能原理建立的杂交应力有限元模式(二)	(331)
§ 8.1 修正的余能原理 $\Pi_{mc}^*(u, \tilde{u})$ 及早期杂交应力模式 II	(331)
8.1.1 修正的余能原理 $\Pi_{mc}^*(u, \tilde{u})$	(331)
8.1.2 有限元列式	(332)
8.1.3 早期杂交应力模式 II $[\Pi_{mc}^*(u, \tilde{u})$ 或 $\Pi_{mc}^*(\sigma^*, \tilde{u})]$ 中应力场 σ^* 的选择	(333)
§ 8.2 利用早期杂交应力模式 II 建立的平面裂纹元 III	(334)
8.2.1 弹性理论平面问题复变函解的基本方程	(335)
8.2.2 平面杂交裂纹元 III 的建立	(340)
§ 8.3 三维杂交应力(或杂交位移)裂纹元 III	(344)
8.3.1 具有半无限平面裂纹弹性体的位移及应力三维解	(345)
8.3.2 选择单元场变量 u 及 $\tilde{u}$	(348)
8.3.3 导出单元刚度矩阵	(349)
8.3.4 数值算例	(349)
§ 8.4 三种杂交裂纹元小结	(351)
8.4.1 三种杂交裂纹元的基本实施方案及所依据的变分原理	(351)
8.4.2 三种裂纹元的数值算例比较	(352)
8.4.3 诸多学者对于三类杂交裂纹元的研究	(353)
§ 8.5 具有随机分布增强相非匀质材料的有限元分析	(353)
8.5.1 Accorsi 及 Chamarajanagar 的变换应变(Transformation Strain)法	(354)
8.5.2 应用杂交应力模式 I 分析随机分布增强相非匀质材料	(358)
8.5.3 应用杂交应力模式 II 分析具有随机分布增强相的非匀质材料问题	(361)
§ 8.6 杂交-Trefftz 有限元	(371)
8.6.1 变分泛函	(371)
8.6.2 有限元列式	(377)
8.6.3 薄板弯曲单元及数值算例	(379)
§ 8.7 修正的余能原理 $\Pi_{mc}^{**}(\sigma, u, \tilde{u})$ 及杂交应力元	(385)

8.7.1 变分原理	(385)
8.7.2 有限元列式	(385)
§ 8.8 小结	(386)
参考文献	(388)
第9章 根据 Hellinger-Reissner 原理及修正的 Hellinger-Reissner 原理建立的有限元模式(一)	(393)
§ 9.1 由 Hellinger-Reissner 原理建立的有限元模式	(393)
9.1.1 变分泛函	(393)
9.1.2 有限元列式	(394)
9.1.3 几点注意事项	(396)
§ 9.2 早期杂交应力元小结	(398)
9.2.1 三种早期杂交应力元	(398)
9.2.2 假定应力杂交模式小结	(399)
§ 9.3 扫除附加的运动变形模式(扫除多余的零能模式)	(399)
9.3.1 附加运动变形模式	(399)
9.3.2 扫除附加运动变形模式	(400)
9.3.3 选择单元应力场以扫除零能模式的具体方法及实例	(402)
9.3.4 对单元稳定所需最小应力参数[式(9.3.1)]的意见	(407)
§ 9.4 具有一个无外力圆柱表面的三维杂交应力元及具有圆弧形槽孔构件的受力分析	(407)
9.4.1 单元假定应力场的类型	(408)
9.4.2 单元假定应力场	(410)
9.4.3 三种类型应力场数值比较	(413)
§ 9.5 具有一个无外力直表面的三维杂交应力元及一系列槽孔板的受力分析	(418)
9.5.1 具有一个无外力直表面杂交应力元	(418)
9.5.2 算例	(419)
§ 9.6 具有结点转动自由度的特殊杂交应力元	(429)
9.6.1 单元的建立	(429)
9.6.2 算例	(429)
9.6.3 小结	(431)
§ 9.7 由 Hellinger-Reissner 原理建立的另一种有限元模式	(431)
9.7.1 传统列式方法	(431)
9.7.2 新的列式方法	(433)
9.7.3 数值算例	(435)
§ 9.8 利用 Hellinger-Reissner 原理及修正的 Hellinger-Reissner 原理建立的杂交元及解除锁住现象	(435)
9.8.1 解除体积锁住	(436)
9.8.2 解除剪切锁住	(440)
9.8.3 解除薄膜锁住	(444)
9.8.4 锁住问题小结	(448)
§ 9.9 小结	(449)
参考文献	(452)

第 10 章 根据 Hellinger-Reissner 原理及修正的 Hellinger-Reissner 原理建立的有 限元模式(二)	(456)
§ 10.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_1}(\sigma, u)$ 及 $\Pi_{mR_1}^1(\sigma, u)$ 混合元模式	(456)
10.1.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理 Π_{mR_1} 及所建立的混合元 I_a	(456)
10.1.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_1}^1$ 及所建立的混合元 I_b	(460)
10.1.3 算例	(461)
§ 10.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_2}(u, \tilde{u}, \sigma, T)$	(463)
§ 10.3 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_3}(u, \tilde{u}, \sigma)$ 及 $\Pi_{mR_3}^1(u, \tilde{u}, \sigma)$ 所建立 的杂交应力元	(465)
10.3.1 变分公式	(465)
10.3.2 有限元列式	(466)
10.3.3 应用实例	(467)
10.3.4 用 Π_{mR_3} (或 $\Pi_{mR_3}^1$) 进行有限元列式时的三种特殊情况	(469)
10.3.5 利用正交插值函数进行有限元列式	(471)
§ 10.4 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_4}(\sigma, u_q, u_\lambda, \tilde{u})$ 及 $\Pi_{mR}(\sigma, u_q, u_\lambda)$	(472)
10.4.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_4}(\sigma, u_q, u_\lambda, \tilde{u})$	(472)
10.4.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR}(\sigma, u_q, u_\lambda)$ 及所建立的杂交应力元	(473)
§ 10.5 非协调杂交应力元的理性列式 (I) —— 平衡法	(479)
10.5.1 非协调杂交应力元理性列式方法 (I) —— 平衡法	(479)
10.5.2 非协调杂交应力元理性列式 (I) —— 平衡法实例	(481)
10.5.3 小结	(496)
§ 10.6 修正的理性平衡列式方法	(497)
10.6.1 修正方法	(497)
10.6.2 修正平衡法实例	(498)
§ 10.7 修正的理性平衡列式法建立三维特殊层合元	(505)
10.7.1 层合材料的修正 Hellinger-Reissner 原理	(505)
10.7.2 层合元单刚建立	(508)
10.7.3 建立层合板元——元 SLR10	(509)
10.7.4 数值算例	(512)
10.7.5 小结	(516)
§ 10.8 非协调杂交应力元的理性列式 (II) —— 表面虚功法	(516)
10.8.1 约束方程及单刚的建立	(516)
10.8.2 对非协调杂交应力元理性列式的说明	(518)
10.8.3 非协调杂交应力元理性列式 (II) —— 表面虚功法实例	(519)
§ 10.9 非协调杂交应力元理性列式 (III) —— 正交法	(526)
10.9.1 非协调位移元与杂交应力元的对应性	(526)
10.9.2 非协调杂交应力元理性列式 (III) —— 正交法	(527)
10.9.3 非协调杂交应力元理性列式 (III) —— 正交法实例	(528)
§ 10.10 通过应力张量转换方法建立几何形状歪斜单元的应力场	(530)
10.10.1 建立四结点一般四边形平面元的应力场	(530)
10.10.2 建立三维 8 结点一般六面体元的应力场	(531)
10.10.3 具有一个无外力斜边, 且外边界上 2 个结点含有转动自由度的 4 结点杂交	

应力元——元SDR4 I	(533)
§ 10.11 利用斜坐标建立平面四边形杂交应力元	(538)
10.11.1 4 结点四边形平面元	(538)
10.11.2 数值算例	(542)
§ 10.12 基于 Π_{mR} 根据变分-渐近法建立的杂交元 层合板自由直边应力分析	(545)
10.12.1 边界层问题	(545)
10.12.2 有限元列式	(546)
10.12.3 数值算例	(548)
§ 10.13 小结	(549)
参考文献	(552)
第 11 章 根据修正的 Hellinger-Reissner 原理及具有一个参数的广义变分原理建立的有限元模式 (三)	(557)
§ 11.1 根据修正的 Hellinger-Reissner 原理建立的具有转动自由度的杂交应力元	(557)
11.1.1 第一类 4 结点膜元	(557)
11.1.2 第二类 4 结点膜元——元 O7 β	(562)
11.1.3 第三类 4 结点膜元及六面体元——元 MAQ 及 AH	(563)
§ 11.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_4}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T})$ 及所建立的混合元 II ——假定自然应变(Assumed Natural Strain, ANS) 列式和假定自然偏应变(Assumed Natural Deviatoric Strain, ANDES) 列式	(565)
11.2.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理 $\Pi_{mR_5}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T})$	(565)
11.2.2 有限元列式	(567)
11.2.3 数值算例	(569)
11.2.4 小结	(570)
§ 11.3 非协调位移元基于 Π_P 的正交条件列式及有限元自由列式 (Free Formulation, EF 列式)	(572)
11.3.1 单独-单元试验	(572)
11.3.2 正交列式基本方程	(574)
11.3.3 根据势能原理基于正交条件进行有限元列式	(574)
11.3.4 有限元自由列式及单刚计算	(576)
11.3.5 有限元修正的自由列式	(578)
§ 11.4 具有一个参数的广义变分原理及其有限元列式 自由列式所依据的泛函	(580)
11.4.1 一个参数的广义变分原理 (Parametrized Multifield Variational Principle) ...	(580)
11.4.2 有限元列式	(582)
11.4.3 运动约束	(585)
11.4.4 利用一个参数的广义变分原理进行有限元自由列式	(587)
11.4.5 小结	(590)
§ 11.5 由自由列式 (FF) 及扩展的自由列式 (EFF) 建立具有转动自由度的有限元	(591)
11.5.1 根据自由列式 (FF) 建立具有转动自由度的三角形膜元	(591)
11.5.2 根据扩展自由度 (EFF) 建立的具有转动自由度三角形膜元	(596)

11.5.3 数值算例	(599)
§ 11.6 多场变量有限元的容许矩阵列式 (Admissible Matrix Formulation)	(601)
11.6.1 能量泛函及单元列式	(601)
11.6.2 分析单元通过单元分片试验 (Single Element Patch Test) 的内部原因	(602)
11.6.3 正交法及容许矩阵列式	(602)
11.6.4 建立低阶高效元	(604)
§ 11.7 小结	(609)
参考文献	(611)
第 12 章 根据胡-贛津 (Hu-Washizu) 原理所建立的有限元模式	(616)
§ 12.1 根据 Hu-Washizu 原理 $\Pi_{HW}(\sigma, \varepsilon, u)$ 建立的精化杂交应力元 (Refined Hybrid Stress Elements)	(616)
12.1.1 Hu-Washizu 原理 Π_{HW}	(616)
12.1.2 精确杂交应力元	(616)
12.1.3 改善的精化杂交应力元	(633)
12.1.4 小结	(640)
§ 12.2 根据 Hu-Washizu 原理、 γ -投影及正交内插所建立的有限元	(641)
12.2.1 有限元列式	(641)
12.2.2 4 结点四边形平面元——QBI 元	(642)
12.2.3 扩展的四边形平面元	(649)
§ 12.3 根据 Hu-Washizu 原理用一组综合方法处理内部约束所建立的单元	(653)
12.3.1 有限元列式	(653)
12.3.2 4 结点四边形平面元	(655)
§ 12.4 根据 Hu-Washizu 原理及增强应变 (EAS) 方法所建立的有限元	(662)
12.4.1 有限元列式	(662)
12.4.2 二维 4 结点 EAS 元	(663)
12.4.3 几种三维 8 结点 EAS 元	(667)
§ 12.5 根据 Hu-Washizu 原理及扩展的增强应变方法所建立的有限元	(671)
12.5.1 有限元列式	(671)
12.5.2 四结点 4 边形元	(673)
12.5.3 八结点三维元	(681)
12.5.4 小结	(687)
§ 12.6 小结	(688)
参考文献	(690)
第 13 章 根据修正的 Hu-Washizu 原理建立的有限元模式	(695)
§ 13.1 修正的 Hu-Washizu 原理 Π_{MHW}^1	(695)
§ 13.2 根据修正的 Hu-Washizu 原理 Π_{MHW}^1 所建立的广义杂交应力元模式 I	(697)
13.2.1 有限元列式 I	(697)
13.2.2 各种杂交模式与现在广义杂交应力模式的关系	(699)
13.2.3 根据修正的 Hu-Washizu 原理 Π_{MHW}^1 建立的有限元模式 II——拟协调元	(701)
§ 13.3 利用另一种修正的 Hu-Washizu 原理 Π_{MHW}^2 建立的杂交应力有限元	(702)
13.3.1 单元列式	(702)

13.3.2	精化直接刚度法的求解步骤	(704)
13.3.3	精化九参数三角形薄板元	(705)
13.3.4	精化的非协调平面四边元	(714)
§ 13.4	根据修正的 Hu-Washizu 原理所建立的杂交应力元	(717)
13.4.1	变分原理	(717)
13.4.2	有限元列式	(718)
13.4.3	四边形中厚板弯曲单元	(719)
13.4.4	数值算例	(721)
§ 13.5	小结	(723)
	参考文献	(725)
第 14 章	根据更一般形式的广义变分原理所建立的有限元模式	(728)
§ 14.1	更一般形式的广义变分原理	(728)
14.1.1	用拉格朗日乘子法在 Hu-Washizu 原理中解除应力应变关系约束的失败	(728)
14.1.2	高阶拉格朗日乘子法, 更一般形式的广义变分原理	(729)
§ 14.2	用更一般形式广义变分原理所建立的一种广义杂交应力元(I)	(731)
14.2.1	修正的更一般形式广义变分原理	(731)
14.2.2	有限元列式	(734)
14.2.3	平面四结点广义杂交应力元	(736)
14.2.4	三维 8 结点广义杂交应力元	(739)
§ 14.3	根据更一般形式的广义变分原理所建立的轴对称广义杂交应力元	(743)
14.3.1	变分原理	(743)
14.3.2	有限元列式	(745)
14.3.3	建立四结点 4 边形轴对称广义杂交应力元	(746)
14.3.4	数值算例	(748)
§ 14.4	根据参数化变分原理建立高性能有限元	(751)
14.4.1	参数化的多场变量变分原理	(752)
14.4.2	有限元列式	(754)
14.4.3	运动约束(单独——单元试验应满足的条件)	(757)
14.4.4	可视刚度方程	(758)
§ 14.5	小结	(759)
	参考文献	(760)
总结		(763)
索引 (一)		(764)
索引 (二)		(765)

第1章 小位移变形弹性理论基本方程

弹性理论是研究弹性体在外部因素作用下，内部引起力学响应的学科。我们先来回顾小位移变形弹性理论基本方程。

§ 1.1 应力、应变、位移、体积力、表面力

弹性体的力学响应可用三类量表示，即：应力(力学量)、应变及位移(几何量)。这三种量通常有以下三种表示方法，我们用其英文第一字母代表。

工程表示 E (Engineering)
仿射正交张量表示 T (Cartesian Tensor)
矩阵(或矢量)表示 M (Matrix or Vector)

对于弹性理论，这三种表示方法是等同的。

(1) 应力：物体内一点的应力状态用6个独立的应力分量表示

$$E: \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \quad (\text{直角坐标: } x, y, z) \\ (\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}) \quad (1.1.1a)$$

$$T: \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; \text{卡氏坐标: } x_1, x_2, x_3) \\ (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \quad (1.1.1b)$$

$$M: \sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T \quad (1.1.1c)$$

(2) 应变：物体内一点的应变状态也用6个独立的应变分量表示

$$E: \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy} \\ (\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}) \quad (1.1.2a)$$

$$T: \epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}) \quad (1.1.2b)$$

$$M: \epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}, 2\epsilon_{12}\}^T \quad (1.1.2c)$$

应变的表示中，剪应变的工程表示与张量表示差1/2，即

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{23} \quad \gamma_{zx} = 2\epsilon_{31} \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{12} \quad (1.1.3)$$

(3) 位移：物体内一点的位移以3个位移分量表示

$$E: u, v, w \quad (1.1.4a)$$

$$T: u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.4b)$$

$$M: \mathbf{u} = \{u, v, w\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}^T \quad (1.1.4c)$$

所以弹性理论空间问题的未知量有6个应力分量、6个应变分量及3个位移分量，一共15个未知量。实际上，应力、应变、位移都是弹性体内各点坐标的函数，即都是场量。以后，为了与弹性理论变分原理的术语一致， σ, ϵ, u 称为三类变量。

同时，弹性体还有给定的单位体积的体积力及单位表面上的表面力。

(4) 体积力: 给定单位体积的体积力有 3 个分量

$$E: \quad \bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z \quad (1.1.5a)$$

$$T: \quad \bar{F}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.5b)$$

$$M: \quad \bar{\mathbf{F}} = \{\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z\}^T = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}^T \quad (1.1.5c)$$

表面力: 边界面上单位表面上的面力也有 3 个分量

$$E: \quad \bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z \quad (1.1.6a)$$

$$T: \quad \bar{T}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.6b)$$

$$M: \quad \bar{\mathbf{T}} = \{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\}^T = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3\}^T \quad (1.1.6c)$$

§ 1.2 应变能和余能

1.2.1 应变能密度^[1]

考虑一杆件承受轴向拉伸 [图 1.1 (a)], 假定其拉力 P 的变化很慢, 以致杆在各瞬时均处于平衡状态, 这种加载过程称为静过程。这时 拉力 P 与伸长 u 之间的关系如图 1.1 (b) 所示。横坐标 u 与曲线之间的面积 W_a , 代表拉力 P 所做的功。在静过程中, 可以忽略其动态力, 同时, 不考虑随着物体的弹性变形而产生的极小电磁及热现象等能量消耗, 根据能量守恒定律, 此功在数值上等于物体变形所储存的应变能。对于一个理想弹性体, 外力做的功将全部转变为物体所储存的应变能。随着变形的消失, 它又以功的形式放出。这种应变能是由于变形而且仅由于变形而产生。

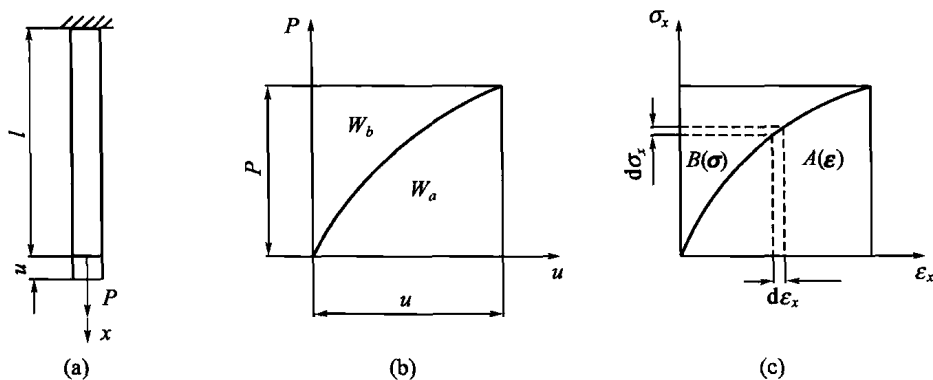


图 1.1 应变能密度与余能密度

图 1.1 (c) 为此杆对应的应力 - 应变曲线, 其横坐标 ϵ_x 与曲线间的面积代表单位体积的应变能, 又称为应变能密度, 以 $A(\epsilon)$ 表示。因此可知, 在单向受力状态, 应变能密度为

$$A(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \quad (a)$$

同理, 在复杂受力状态下其应变能密度定义为

① 书中除特别说明, 字母上加一横线表示这个量是给定的。

$$\begin{aligned}
 A(\epsilon) &= \int_0^{\epsilon_{ij}} (\sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \sigma_{33} d\epsilon_{33} + 2\sigma_{23} d\epsilon_{23} + 2\sigma_{31} d\epsilon_{31} + 2\sigma_{12} d\epsilon_{12}) \\
 &= \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}
 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

1.2.2 余能密度

图1.1(b)中,纵坐标 P 与曲线之间的面积 W_b 称为余能。同理,图1.1(c)中纵坐标 σ_x 与曲线之间的面积 $B(\sigma)$ 为单位体积的余能,又称为余能密度。因此

$$B(\sigma) = \int_0^{\sigma_x} \epsilon_x d\sigma_x \quad (b)$$

而且

$$A(\epsilon) + B(\sigma) = \epsilon_x \sigma_x \quad (c)$$

对于线性弹性体,由于应力应变为直线关系,所以 $A(\epsilon) = B(\sigma)$ 。对于非线性弹性体,其应力应变关系为曲线,因而应变能密度与余能密度并不相等。

弹性体在复杂受力状态时,其余能密度 $B(\sigma)$ 为

$$\begin{aligned}
 B(\sigma) &= \int_0^{\sigma_{ij}} (\epsilon_{11} d\sigma_{11} + \epsilon_{22} d\sigma_{22} + \epsilon_{33} d\sigma_{33} + 2\epsilon_{23} d\sigma_{23} + 2\epsilon_{31} d\sigma_{31} + 2\epsilon_{12} d\sigma_{12}) \\
 &= \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}
 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

同时也存在

$$A(\epsilon) + B(\sigma) = \epsilon_{ke} \sigma_{ke} = \epsilon^T \sigma \quad (1.2.3)$$

§ 1.3 小位移变形弹性理论基本方程^[2~4]

直接从某一种客观规律导出的弹性理论方程称为基本方程。这些基本方程可以是微分方程,也可以是代数方程。

我们将讨论在体力和给定的边界条件下、处于平衡状态的小位移变形弹性体的基本方程。所谓小位移变形弹性理论,是假定物体内一点的位移分量 u, v, w 小到可以把基本方程线性化。而这些线性化的基本方程有以下几组。

1.3.1 平衡方程(力学方程)

E: 在笛卡儿直角坐标系中,弹性体一点的6个应力分量必须满足3个平衡方程

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{F}_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_y &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{F}_z &= 0
 \end{aligned} \quad (1.3.1a)$$

T: 以上3个平衡方程可用张量形式表达

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.1b)$$