

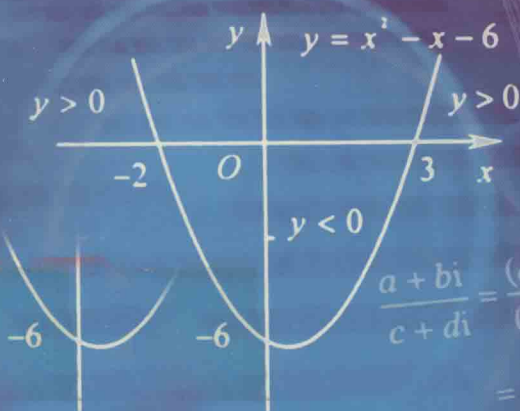


面向21世纪全国高职高专数学规划教材

五年制高职数学

wunianzhi gaozhi shuxue
(第1册)

吕保献 侯新华 主 编
黄 静 蒋明霞 副主编



$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材

五年制高职数学

(第 1 册)

吕保献 侯新华 主编

黄静 蒋明霞 副主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材是“面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的。在内容编排上，删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

五年制高职数学教材分 4 册出版。第 1 册内容包括：集合与不等式，函数，幂函数、指数函数、对数函数，三角函数，加法定理、正弦型曲线，复数等。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

图书在版编目 (CIP) 数据

五年制高职数学 (第 1 册) / 吕保献, 侯新华主编. —北京: 北京大学出版社, 2005.6
(面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材)
ISBN 7-301-08840-X

I. 五… II. ①吕…②侯… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 031078 号

书 名: 五年制高职数学 (第 1 册)

著作责任者: 吕保献 侯新华 主编

责任编辑: 黄庆生 汉明

标准书号: ISBN 7-301-08840-X/O · 0640

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765013

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电子信箱: xxjs@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京飞达印刷有限责任公司

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 9.75 印张 210 千字

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 16.00 元

前 言

为适应我国高等职业技术教育蓬勃发展的需要,加速教材建设步伐,我们受北京大学出版社的委托,根据教育部有关文件精神,考虑到高等职业技术学院基础课的教学,应以应用为目的,以“必需、够用”为度,并参照《五年制高职数学课程教学基本要求》,由高等职业技术学院中长期从事高职数学教学的资深教师编写本套教材。可供招收初中毕业生的五年制高职院校的学生使用。

本套数学教材是“面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材”之一,它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的,以降低理论、加强应用、注重基础、强化能力、适当更新、稳定体系为指导思想。在内容编排上,注重理论联系实际,注意由浅入深,由易到难,由具体到抽象,循序渐进,并兼顾体系,加强素质教育和能力方面的培养。删去了一些繁琐的推理和证明,比传统数学教材增加了一些实际应用的内容,力求把数学内容讲得简单易懂,重点是让学生接受数学的思想方法和思维习惯,具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点,适合教师教学和学生自学。

全套教材分四册出版。第 1 册内容包括:集合与不等式,函数,幂函数、指数函数与对数函数,三角函数,加法定理、正弦型曲线与复数等。第 2 册内容包括:直线方程,二次曲线,数列,排列、组合、二项式定理和立体几何等。第 3 册内容包括:极限与连续,导数、微分及其应用,不定积分,定积分及其应用,空间解析几何,二元函数微积分初步,Mathematica 软件的应用(上)等。第 4 册内容包括:常微分方程,无穷级数,拉普拉斯变换,线性代数初步,概率论初步,数理统计初步,Mathematica 软件的应用(下)等。本教材有一定的弹性,编入了一些选学内容,书中带“*”号的部分为选学内容。

教材中每节后面配有一定数量的习题。每章后面的复习题分主、客观题两类,供复习巩固本章内容和习题课选用。书末附有习题答案供参考。

第 1 册由吕保献、侯新华担任主编,黄静、蒋明霞担任副主编,吕保献负责最后统稿。其中第 1 章由蒋明霞编写,第 2 章、第 3 章由黄静编写,第 4 章由侯新华编写,第 5 章、第 6 章由黄振编写。

由于编者水平有限,书中不当之处在所难免,恳请教师和读者批评指正,以便进一步修改完善。

编 者

2005 年 2 月

目 录

第 1 章 集合与不等式	1
1.1 集合的概念	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 集合的表示法	2
1.1.3 集合之间的关系	3
习题 1.1	4
1.2 集合的运算	5
1.2.1 交集	5
1.2.2 并集	7
1.2.3 全集与补集	8
习题 1.2	9
1.3 不等式与区间	9
1.3.1 不等式的性质	9
1.3.2 区间	10
习题 1.3	11
1.4 一元二次不等式及其解法	11
1.4.1 一元二次不等式	11
1.4.2 一元二次不等式的解法	12
习题 1.4	14
1.5 分式不等式和绝对值不等式	15
1.5.1 分式不等式	15
1.5.2 绝对值不等式	16
习题 1.5	17
复习题 1	18
第 2 章 函数	20
2.1 函数的概念	20
2.1.1 函数的定义及记号	20
2.1.2 函数的定义域	21
习题 2.1	22
2.2 函数的图像和性质	23
2.2.1 函数的图像	23
2.2.2 分段函数及其图像	24

2.2.3 函数的单调性和奇偶性	26
习题 2.2	29
2.3 反函数	29
2.3.1 反函数的定义	29
2.3.2 互为反函数的函数图像间的关系	31
习题 2.3	32
复习题 2	32
第3章 幂函数 指数函数与对数函数	35
3.1 分数指数幂 幂函数	35
3.1.1 n 次根式	35
3.1.2 分数指数幂的概念和运算	36
3.1.3 幂函数	37
3.1.4 幂函数的图像和性质	37
习题 3.1	40
3.2 指数函数	41
3.2.1 指数函数的定义	41
3.2.2 指数函数的图像和性质	41
习题 3.2	44
3.3 对数	45
3.3.1 对数的概念	45
3.3.2 对数的运算法则	47
习题 3.3	48
3.4 对数函数	49
3.4.1 对数函数的定义	49
3.4.2 对数函数的图像和性质	49
习题 3.4	53
复习题 3	53
第4章 三角函数	56
4.1 角的概念的推广 弧度制	56
4.1.1 角的概念推广	56
4.1.2 弧度制	58
4.1.3 圆弧长	60
习题 4.1	61
4.2 任意角的三角函数	62
4.2.1 任意角三角函数的定义	62
4.2.2 任意角三角函数值的符号	65
4.2.3 同角三角函数间的关系	66
4.2.4 单位圆与三角函数的周期性	68

习题 4.2.....	70
4.3 三角函数的简化公式.....	71
4.3.1 负角的三角函数简化公式.....	71
4.3.2 三角函数的简化公式表.....	73
习题 4.3.....	75
4.4 已知三角函数值求角.....	77
4.4.1 已知正弦值, 求角.....	77
4.4.2 已知余弦值, 求角.....	79
4.4.3 已知正切值, 求角.....	79
习题 4.4.....	81
4.5 三角函数的图像和性质.....	81
4.5.1 正弦函数的图像和性质.....	81
4.5.2 余弦函数的图像和性质.....	83
4.5.3 正切函数的图像和性质.....	84
4.5.4 余切函数的图像和性质.....	86
习题 4.5.....	89
4.6 解斜三角形.....	89
4.6.1 正弦定理和余弦定理.....	89
4.6.2 斜三角形的解法.....	90
习题 4.6.....	93
复习题 4.....	94
第 5 章 加法定理 正弦型曲线.....	97
5.1 两角和与差的正弦、余弦与正切.....	97
5.1.1 余弦的加法定理.....	97
5.1.2 正弦的加法定理.....	99
5.1.3 正切的加法定理.....	101
习题 5.1.....	102
5.2 二倍角的三角函数.....	102
习题 5.2.....	106
5.3 正弦型曲线.....	107
习题 5.3.....	111
复习题 5.....	112
第 6 章 复数.....	114
6.1 复数的概念.....	114
6.1.1 复数的定义.....	114
6.1.2 复数的有关概念.....	115
习题 6.1.....	118
6.2 复数的四则运算.....	119

6.2.1	复数的向量表示	119
6.2.2	复数的加法和减法	121
6.2.3	复数的乘法和除法	121
6.2.4	实系数一元二次方程的解法	123
习题 6.2		124
6.3	复数的三角形式和指数形式	125
6.3.1	复数的三角形式	125
6.3.2	复数三角形式的乘法和除法	127
*6.3.3	复数的指数形式	130
习题 6.3		131
复习题 6		133
习题参考答案		135

第 1 章 集合与不等式

集合是数学中最基本的概念之一，本章先介绍集合的相关概念和简单运算，并讨论一元二次不等式、分式不等式及含有绝对值不等式的解法.

1.1 集合的概念

1.1.1 集合

先考察下面几组对象：

- (1) 某班的全体学生；
- (2) 某校图书馆的全部图书；
- (3) 所有的等边三角形；
- (4) 全部的整数.

这里所用的“全体”、“全部”、“所有”都是指具有某种特定性质的对象的整体.

我们把具有某种特定性质的对象的全体称为一个**集合**. 集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**.

例如，上面例子中的(1)是由某班的全体学生组成的集合，班上的每一个学生都是这个集合的元素. 显然，这个集合只有有限个元素.(2)是由某校图书馆的全部图书所组成的集合，图书馆的每一本书都是这个集合的元素. 这个集合也只有有限个元素.(3)是由所有的等边三角形所组成的集合，其中每个具体的等边三角形都是这个集合的元素. 这个集合有无限多个元素.(4)是由全部的整数所组成的集合，而每一个整数都是这个集合的元素. 这个集合也有无限多个元素.

通常，我们用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为“ $a \in A$ ”，读作“ a 属于 A ”，若 a 不是集合 A 的元素，就记为“ $a \notin A$ ”，读作“ a 不属于 A ”.

例如，在上面的例(4)中，用 Z 表示所有整数组成的集合，则 $7 \in Z$, $16 \in Z$, $\frac{3}{5} \notin Z$,

$\frac{7}{8} \notin Z$. 由数组成的集合叫做**数集**，常见的数集及记号表示如下：

自然数集记作 N ; 整数集记作 Z ; 有理数集记作 Q ; 实数集记作 R .

如果上述数集中的元素仅限于正数, 就在集合记号的右上角标以“+”号; 若数集中的元素都是负数, 就在集合记号的右上角标以“-”号. 例如, R^+ 表示正实数集, Z^- 表示负整数集.

如果集合所含元素的个数为有限个, 这个集合称为**有限集**; 如果集合所含元素的个数为无限个, 这个集合称为**无限集**.

例如, 上面例子中的(1)、(2)是有限集, (3)、(4)是无限集.

1.1.2 集合的表示法

1. 列举法

列举法是指把某一个集合的每个元素不重复, 一一列举出来写在大括号内(可不分次序).

例如: 由数1,2,3,4,5,6组成的集合可以表示为 $\{1,2,3,4,5,6\}$.

当集合元素很多时, 不可能或不需要全部列出时, 可以按规律写出几个元素, 其他的用省略号表示. 如小于50的正整数集可表示为 $\{1,2,3,\dots,49\}$; 正偶数集合可表示为 $\{2,4,6,\dots,2n,\dots\}$.

2. 描述法

描述法是指把某一集合中的元素所具有的特定性质描述出来, 写在大括号内.

例如: (1) 某班的全体学生所组成的集合可表示为 $\{\text{某班的全体学生}\}$;

(2) 所有的等边三角形组成的集合可表示为 $\{\text{等边三角形}\}$;

(3) 由方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解组成的集合可表示为 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$.

描述法表示集合时, 常用类似(3)中的表示方法, 在大括号内, 竖线左边表示集合所含元素的一般形式, 竖线右边表示集合中元素所具有的特定性质.

以上所讲的列举法和描述法是集合的两种不同的表示法, 实际运用时究竟选用哪一种表示法, 依具体问题而定. 有的集合两种表示法都可用. 如由方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有的解组成的集合, 用列举法表示为 $\{1, -1\}$, 用描述法表示为 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$.

例1 用列举法或描述法表示下列集合:

(1) 大于2小于18的奇数的集合;

(2) 某班高于1.5米矮于1.8米的男同学组成的一个集合;

(3) 由二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图像上所有点的坐标组成的集合.

解 (1) 用列举法表示为

$$\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\};$$

用描述法表示为

$$\{x|x=2n+1, 1\leq n\leq 8, n\in N\}.$$

(2) {某班高于1.5米矮于1.8米的男同学}.

(3) $\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

只含有一个元素的集合叫做**单元素集**.

例如: $\{1\}$, $\{-4\}$, $\{0\}$ 都是单元素集.

不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\emptyset$.

例如, 方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解集就是空集.

至少含有一个元素的集合叫**非空集**.

注意:

(1) 空集 $\emptyset$ 与集合 $\{0\}$ 不同, $\emptyset$ 指的是不含任何元素的集合; $\{0\}$ 是由一个元素 0 所组成的集合.

(2) 单元素集 $\{a\}$ 与单个元素 a 是不同的, a 表示一个元素, $\{a\}$ 表示一个集合, 二者的关系是 $a\in\{a\}$.

1.1.3 集合之间的关系

1. 子集

考察集合 $A=\{2,3,4,5\}$ 与集合 $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, 可知, 集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素. 对于两个集合间的这种关系, 给出下面的定义:

定义 1.1 对于两个集合 A 和 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 则集合 A 叫做集合 B 的**子集**, 记为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

因此, $\{2,3,4,5\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$ 或 $\{1,2,3,4,5,6\}\supseteq\{2,3,4,5\}$.

对于任何一个非空集合 A , 因为它的任何一个元素都是集合 A 的元素, 所以 $A\subseteq A$. 也就是说, 任何一个集合都是它本身的子集.

规定: 空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset\subseteq A$.

例如, $\emptyset\subseteq\{a\}$, $\emptyset\subseteq\{1,3\}$, $\emptyset\subseteq\{0\}$.

2. 真子集

定义 1.2 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 则集合 A 叫做集合 B 的**真子集**, 记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

例如 $\{2,3,4,5\}\subset\{1,2,3,4,5,6\}$, $Q\subset R$, $N\subset Z$.

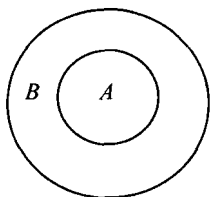


图 1-1

很明显, 空集是任何非空集合 A 的真子集, 即 $\emptyset \subset A$.

为了形象地说明集合之间的包含关系, 通常用圆或任何封闭曲线围成的图形表示集合, 而用圆中的点表示该集合的元素. 这样的图形称为文氏 (Venn) 图. 如图 1-1 表示了集合 $A \subset B$ 的关系.

例 2 写出集合 $\{3, 5, 6\}$ 的所有子集与真子集.

解 集合 $\{3, 5, 6\}$ 有三个元素 3, 5, 6. 它的子集为 $\emptyset$; 任取一个元素组成的子集 $\{3\}, \{5\}, \{6\}$; 任取两个元素组成的子集 $\{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}$; 三个元素全取所组成的子集 $\{3, 5, 6\}$. 共有八个子集, 除子集 $\{3, 5, 6\}$ 外的其余七个子集都是真子集.

思考: 一个集合全部子集的个数与这个集合的元素个数间有什么关系?

例 3 讨论集合 $A = \{x | x + 2 = 0\}$ 与 $B = \{x | x^2 + 5x + 6 = 0\}$ 之间的包含关系.

解 方程 $x + 2 = 0$ 的解为

$$x = -2;$$

方程 $x^2 + 5x + 6 = 0$ 的解为

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -3.$$

即

$$A = \{-2\}, \quad B = \{-2, -3\}.$$

所以 A 是 B 的真子集, 即

$$A \subset B.$$

3. 集合的相等

定义 1.3 对于两个集合 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $A \supseteq B$, 则称集合 A 和集合 B 相等, 记为 $A = B$, 读作“ A 等于 B ”.

由定义 1.3 可知两个集合相等, 即表示两个集合的元素完全相同. 如: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$, $\{x | x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$.

习 题 1.1

1. 下列集合中哪些是空集? 哪些是有限集合? 哪些是无限集合?

(1) $\{x | x + 1 = 1\};$

(2) $\{(x, y) | x \in R, y \in R\};$

(3) $\{x | x^2 + 1 = 1\};$

(4) $\{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}.$

2. 用列举法或描述法表示下列集合:

(1) 大于 5 小于 19 的偶数;

(2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像上的所有点;

(3) 所有 3 的正整数倍数;

(4) 数轴上5与7之间的所有的点;

(5) 不等式 $x-3 \geq 0$ 的所有解;

(6) 某工厂在某天内生产的所有电视机.

3. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $=$, $\subset$, $\subseteq$) 填空:

(1) a _____ $\{a, b, c\}$;

(2) 3 _____ $\{1, 2\}$;

(3) $\{a\}$ _____ $\{a, b, c\}$;

(4) $\{2, 1\}$ _____ $\{1, 2\}$;

(5) 0 _____ $\{0\}$;

(6) $\{0\}$ _____ $\emptyset$;

(7) $\{3, 4\}$ _____ $\{3, 4, 5\}$;

(8) 2 _____ N ;

(9) $\sqrt{3}$ _____ Q ;

(10) -3 _____ Q^- .

4. 判断下列说法是否正确:

(1) 某班全体高个子男生组成一个集合;

(2) 对于任意集合 A , 都有 $\emptyset \subset A$;

(3) 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 与集合 $\{4, 2, 1, 3\}$ 是不相同的集合;

(4) 集合 $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ 与集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是相等的;

(5) 对于两个集合 A 和 B 相等, 当且仅当 $B \subseteq A \subseteq B$.

5. 写出集合 $\{a, b, c, d\}$ 的所有子集和真子集.

6. 判断下列各题中的两个集合之间的关系:

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\text{小于10的正整数}\}$;

(2) $A = \{x | 0 \leq x < 1\}$, $B = \{\text{数轴上0与1之间的点}\}$;

(3) $A = \{x | x < 5, x \in N\}$, $B = \{x | x < 5, x \in Z\}$;

(4) $A = \{(x, y) | x + y = 0, x \in Z^+, x < 4, y \in Z^-\}$, $B = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$.

7. 图 1-2 中 A , B , C 表示集合, 说明它们之间有什么包含关系.

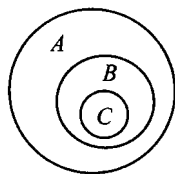


图 1-2

1.2 集合的运算

1.2.1 交集

先看下面的例子.

设集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{5, 7, 9\}$, $C = \{5\}$. 显然, 集合 C 是由集合 A 和集合 B 的公共元素组成的. 对于这样的集合, 给出下面的定义:

定义 1.4 设 A 和 B 是两个集合, 把属于 A 且属于 B 的所有元素所组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即

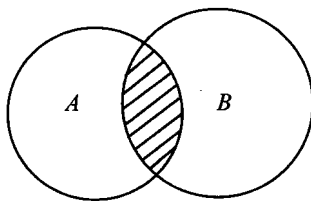


图 1-3

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

“ $\cap$ ”是求两个集合的交集的运算符号. 求交集的运算称为交运算. 图 1-3 中的阴影部分表示了集合 A 与 B 的交集.

由交集的定义知道, 对于任意两个集合 A, B 有

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B.$$

对于任意一个集合 A , 显然有

$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

例 1 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 8, 9\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5, 8, 9\} = \{1, 4\}$.

例 2 设 $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\}$
 $= \{\text{等腰直角三角形}\}.$

例 3 设 $A = \{x | x < 4\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x | x < 4\} \cap \{x | x > 2\}$
 $= \{x | 2 < x < 4\}.$

在数轴上这个交集如图 1-4 所示.

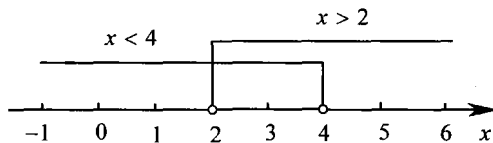


图 1-4

例 4 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\} \cap \{(x, y) | x - y = 2\}$
 $= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \right. \right\} = \{(1, -1)\}.$

例 5 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$, $C = \{1, 2, 7, 10, 11\}$, 求:

(1) $(A \cap B) \cap C$;

(2) $A \cap (B \cap C).$

解 (1) $(A \cap B) \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 7, 10, 11\} = \{1, 2\}.$

(2) $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 7\} = \{1, 2\}.$

根据交集的定义和例 5, 可知交运算满足交换律和结合律, 即
 交换律: 设 A, B 是两个集合, 则

$$A \cap B = B \cap A.$$

结合律：设 A, B, C 是三个集合，则

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

1.2.2 并集

对于集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{5, 7, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 显然，集合 C 是由集合 A 和集合 B 所有元素合并在一起（相同的元素只取一个）组成的. 对于这样的集合，给出下面的定义：

定义 1.5 设 A 和 B 是两个集合，把属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素合并在一起组成的集合称为 A 与 B 的**并集**. 记为 $A \cup B$ ，读作“ A 并 B ”，即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

“ $\cup$ ”是两个集合的并集的运算符号. 求并集的运算称为并运算. 集合 A 与 B 的并集 $A \cup B$ 可用图 1-5 中的阴影部分表示.

由并集定义和图 1-5 可以看出，对于任意两个集合 A, B 有

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B.$$

对于任意一个集合 A ，显然有

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A.$$

例 6 设 $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{-1, -5, -7, 7\}$ ，求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{1, 5, 7\} \cup \{-1, -5, -7, 7\} = \{1, -1, -5, 5, -7, 7\}$.

例 7 设 $A = \{x | -1 < x < 5\}$, $B = \{x | -2 < x < 4\}$ ，求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{x | -1 < x < 5\} \cup \{x | -2 < x < 4\} = \{x | -2 < x < 5\}$ （如图 1-6 所示）.

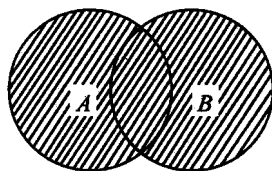


图 1-5

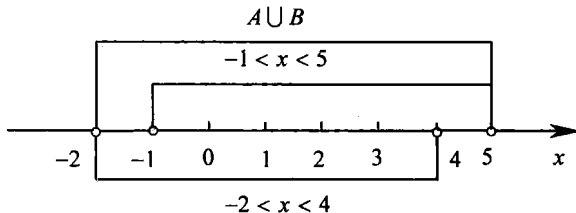


图 1-6

例 8 设 $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 5, 9\}$ ，求：

(1) $(A \cup B) \cup C$ ；

(2) $A \cup (B \cup C)$.

解 (1) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{3, 5, 9\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

(2) $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

根据并集的定义和例 8，可知并运算满足交换律和结合律，即

交换律: 设 A, B 为两个集合, 则

$$A \cup B = B \cup A.$$

结合律: 设 A, B, C 是三个集合, 则

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

1.2.3 全集与补集

定义 1.6 在研究集合与集合之间的关系时, 这些集合常常都是一个给定集合的子集, 这个给定的集合叫做**全集**, 记为 U . 也就是说, 全集包含了此时我们所研究的集合的全部元素.

定义 1.7 设 U 为全集, A 为 U 的子集, 则 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合叫做集合 A 的**补集**, 记为 $\complement_U A$, 读作“ A 补”, 即

$$\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

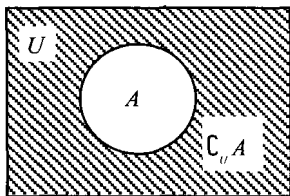


图 1-7

图 1-7 阴影部分就表示集合 A 的补集 $\complement_U A$. 由补集定义和图 1-7 可以看出:

$$A \cup \complement_U A = U; A \cap \complement_U A = \emptyset; \complement_U U = \emptyset; \complement_U \emptyset = U; \complement_U (\complement_U A) = A.$$

求补集的运算叫做**补运算**.

注意: 补集是相对全集而言的. 因此, 即使是同一集合 A , 由于所取的全集不同, 它的补集是不同的.

例如, 设 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 3\}$, 则 $\complement_U A = \{5, 7, 9\}$. 若 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $\complement_U A = \{2, 4, 5, 6\}$.

例 9 设 $U = \{x | 1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x | 1 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$, 求 $\complement_U A$.

解 因为

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad A = \{2, 3, 4\},$$

所以

$$\complement_U A = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

例 10 设 $U = \{x | 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$; 求:

- (1) $\complement_U (A \cup B)$; (2) $\complement_U (A \cap B)$;
- (3) $\complement_U A \cap \complement_U B$; (4) $\complement_U A \cup \complement_U B$.

解 $U = \{x | 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(1) 因为

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

所以

$$\complement_U (A \cup B) = \{7, 8, 9, 10\}.$$

(2) 因为

$$A \cap B = \emptyset,$$

所以

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U \emptyset = U.$$

(3) 因为

$$\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$\complement_U B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\},$$

所以

$$\complement_U A \cap \complement_U B = \{7, 8, 9, 10\}.$$

$$(4) \complement_U A \cup \complement_U B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = U.$$

由例 10 可知:

$$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B;$$

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B.$$

这个结论是补集运算与并、交运算之间的重要联系, 它们叫做**德·摩根 (De Morgan) 公式**, 也称为**反演定律**.

习题 1.2

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 求 $A \cap B$.

2. 设 $A = \{(x, y) | 4x + y = 6\}$, $B = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}$, 求 $A \cap B$.

3. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | 2x - 5 < 0\}$, $B = \{x | x - 3 \geq 0\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

(2) $\complement_U A$;

(3) $\complement_U B$;

(4) $\complement_U A \cap \complement_U B$;

(5) $\complement_U A \cup \complement_U B$.

4. 设 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$, 并在数轴上表示.

5. 如图 1-8 所示, U 是全集, A, B 是 U 两个子集, 用阴影表示:

(1) $\complement_U A \cup \complement_U B$;

(2) $\complement_U A \cap \complement_U B$.

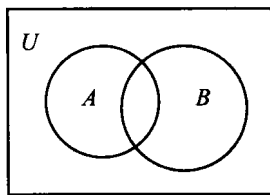


图 1-8

1.3 不等式与区间

1.3.1 不等式的性质

不等式有下列性质:

(1) 若 $a > b$, 那么 $a \pm c > b \pm c$;