吴纪桃 魏光美 李翠萍 柳重堪 编著

高等数学 下册

第2版

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

高等数学

第2版

下册

吴纪桃
魏光美
李翠萍
柳重堪
编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包含函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和级数；下册内容包含空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和常微分方程.

本书内容经过精细筛选，重点突出，层次分明，叙述清楚，深入浅出，简明易懂. 全书例题丰富，每节之后均配有适当数量的习题，书末附有习题答案与提示，便于教师教学，也便于学生自学.

本书可供高等学校理工科非数学专业的本科生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/吴纪桃等编著. --2 版. --北京：清华大学出版社，2011. 9
ISBN 978-7-302-26082-0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①吴…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 132508 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170×230　**印　张**：20.75　**字　数**：370 千字
版　　次：2011 年 9 月第 2 版　　**印　　次**：2011 年 9 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：29.80 元

产品编号：037067-01

第 2 版前言

21 世纪以来，北京航空航天大学在本科人才培养定位上做了明确定位：为我国培养具有创新潜质的国民经济建设领域里的领军人才和国防建设领域的领导人才。学校的办学方向明确为：具有航空航天特色和工程技术优势的多科性、开放式、研究型大学，肩负着高层次人才培养和基础性、前瞻性科学研究，以及战略高技术研究的历史使命。为了适应这一变化，学校将高等数学课程确定为 6 门校级核心课程之一。因此，北航高等数学课程组在北京市精品课建设的基础上，对高等数学的教学内容和练习系统进行了进一步的改革和完善，重点是有利于在教学中突出对优秀学生的培养。

2008 年北航高等数学课程获批进行国家精品课建设。在教育部质量工程经费的支持下，我们对教学过程进一步进行了优化，部分成果就固化在本套教材中。经过这几年在北航本科教学中应用，证明了这套教材对相当层次的学校和学生是适用的。近年来，北航的学生连续在北京市数学竞赛和全国数学竞赛中取得了优异成绩，这也从一个侧面反映了这套教材在大班课的教学中突出了对优秀生的培养。

与第 1 版相比，本书第 2 版有以下改动：

1. 增加了课后的一部分上台阶的练习题。

2. 修改了第 1 版中的一些错误。

3. 重新安排了教学内容和体系，比如，将级数的教学内容调整到上册来，这样容易与反常积分中的一些相关内容进行对比，可以降低难度；又比如，将通常在上册讲授的空间解析几何放在下册的开篇，使得相关的知识更容易与多元函数微分学的内容结合起来。这样做的结果可以使教学更加“顺畅”。

4. 对配套的练习册的习题按内容与难度做了分层，有利于各种水平学生进行选择性练习，尤其适合优秀学生进行全方位练习。

本教材第 1,2,3 章由柳重堪教授执笔；第 4,5,6,8 章由吴纪桃教授执笔；第 7,10,11 章由李翠萍教授执笔；第 9,12 章由魏光美副教授执笔，上册由吴纪桃教授修改；下册由魏光美副教授修改，全书由吴纪桃教授统稿。

尽管本书的作者中每一位都主讲本课程 20 年以上，但是，不妥和错误之处也在所难免，恳请读者给予批评指正，以便再版时修正。

作　者

2011 年 5 月于北航

前言

2003年北京航空航天大学高等数学课程获得北京市精品课程建设立项，由此，我们的课程建设和改革工作进入了一个新的阶段。课程组认真总结了数十年来在教学理念、教学内容、教学方法和教学手段方面的认识、方法、经验和教训，对课程再次进行了新的定位和规划。作为总结、继承、改革和发展的一个重要标志，我们组织编写了这套高等数学教材和习题集，以适应新形势、新目标下对数学的要求，更好地为后续课程提供必要的基础理论和知识准备，进一步为培养学生的创新意识和创新能力服务，从中体现“强化基础，突出实践，重在素质，面向创新”的本科生人才培养方针的精神。

与传统的高等数学教材相比，本教材有以下特点：

1. 把概念和定理的引出、建立与证明尽可能处理成一个“发现”的过程。这种处理方法将有利于学生创新意识和能力的培养。

2. 进一步强调一些重要的定义、定理和公式的物理或几何内涵。不但强调它们在数学上的作用，更要强调它们在物理或几何上的解释。这样做能使非数学专业的理工科学生认识到数学作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学习数学的兴趣。

3. 在推导公式和应用公式来解决实际问题时采用数学建模的方法和观点。即强调“分析实际问题（抽象简化）——建立数学模型（化成数学问题）——获得数学解（应用公式和算法）——解释实际问题（讨论解的合理性）”的解题过程。例如介绍了为什么电子设备中常用二进制，在定积分的应用一章中，每一个例题都重复数学建模的过程。这样做将有利于提高学生对数学的应用意识和应用能力。

4. 通过全书内容不断强调一些重要的数学思想。比如，在微分学中的“局部以直代曲”，在积分学中的“化整为零——局部以直代曲——积零为整”，泰勒公式和函数展成级数中的“以简单表示复杂”、“近似与估计”，求解非线性方程中的“迭代与逼近”等思想方法。这样做将有利于学生通过学习高等数学受到数学思想方法的熏陶，使思维品质得到提升。

5. 适当加强了一些典型素材的论述。例如对泰勒公式的理解和应用，增加了一些利用泰勒公式研究函数特性和求极限的例题和习题，这是因为泰勒公式能极大程度地揭示可导函数的本质。再如补充了关于凸函数的一些内容，这是因为凸函数是属性被研究得较为透彻的一类函数。

6. 本书的例题和习题在难度上跨度较大，这有利于训练学生的解题方法和技巧，有利于提高学生的计算和推理能力。

本教材第 1，2，3 章由柳重堪教授执笔，第 4，5，6，7 章由吴纪桃教授执笔，第 8，12 章由魏光美副教授执笔，第 9，10，11 章由李翠萍教授执笔，全书由吴纪桃教授统稿。

虽然本书的每一位编者主讲本课程的教龄都在 20 年以上，但是不妥和错误之处在所难免，真诚地希望有关专家、读者给予批评指正，以便再版时修改。

作　者

2007 年 5 月于北航

目录

空间解析几何与向量代数

第8章

在平面解析几何中,我们先在平面上建立一个参照系统——平面直角坐标系,将平面上的点 M 与数组(x,y)建立一一对应的关系,然后将平面的曲线用含 x,y 的方程表示出来,继而使我们可以用代数的方法去研究几何问题. 在本章中,我们将这个思路用于解决空间的问题,在空间建立直角坐标系,对空间的曲面、曲线问题,用代数的方法去研究,这样发展起来的一套理论和方法体系,就构成了空间解析几何. 在本章中,我们学习其中的最基本的思想方法和内容,主要是为后面进一步学习多元函数微积分作准备.

8.1 空间直角坐标系与空间点的坐标

与平面解析几何中首先建立平面直角坐标系、引进平面点的直角坐标相类似,在空间解析几何中也首先建立空间直角坐标系,引进空间点的坐标的概念.

在空间中取定一点 O,过该点作 x 三条相互垂直的数轴轴,y 轴和 z 轴,确定它们的正向使之成为右手系:将右手的四指从 x 轴正向扫过 $90°$握向 y 轴正向,拇指恰好指向 z 轴正向. 如图 8.1.1 所示.

这样的坐标系统称为空间直角坐标系,O 称为坐标原点,x 轴,y 轴和 z 轴统称为坐标轴,每两个坐标轴决定的平面称为坐标面,将由 x 轴与 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面,类似地可知 yOz 面和 zOx 面的含义. 这三个坐标面相互垂直,将整个空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限. 通常取 x 轴正向向前,y 轴正向向右,z 轴正向向上,上半个空间右前部分称为第Ⅰ卦

限，右后部分称为第Ⅱ卦限，左后部分称为第Ⅲ卦限，左前部分称为第Ⅳ卦限，类似地，下半个空间从右前部分开始依次为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，如图 8.1.2所示.

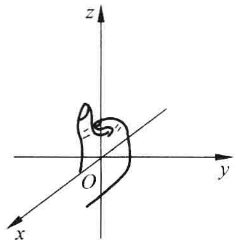

图 8.1.1

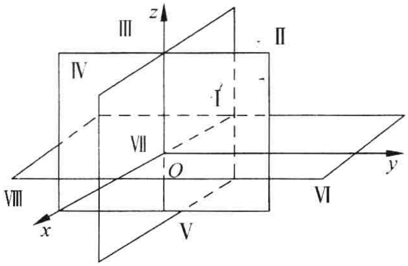

图 8.1.2

空间直角坐标系给我们提供了空间位置的参照系统. 有了这个参照系统，我们就可以描述空间的点的位置.

设 M 为空间中的任意一点，过 M 点分别作三个坐标轴的垂面，它们分别与 x,y,z 坐标轴交于点 P,Q,R，设点 P,Q,R 在各自坐标轴上的坐标依次为 x,y,z，如图 8.1.3 所示. 这样，对于空间的任何一点 M，可以如前所述地找到唯一的三元数(x,y,z)与之对应；反之，任给一个三元数(x,y,z)，过 x 轴上坐标为 x 的点处作 x 轴的垂面，过 y 轴上坐标为 y 的点处作 y 轴的垂面，再过 z 轴上坐标为 z 的点处作 z 轴的垂面，这三个平面相互垂直交于唯一的点 M，即由一个三元数(x,y,z)可唯一确定的空间点.

我们把全体这样的三元数构成的集合记为$\mathbb{R}^3$，即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

这样，根据前述的对应方法，空间中全体点的集合就与$\mathbb{R}^3$ 之间建立了一一对应：每个点 M 都对应一个唯一的三元数(x,y,z)，每个三元数(x,y,z)都表示空间的唯一的点. 正因为这样，我们就用$\mathbb{R}^3$ 来表示空间点的全体，这正像我们用全体实数$\mathbb{R}$ 表示数轴上的点，用$\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y\in \mathbb{R}\}$表示平面上的点一样.

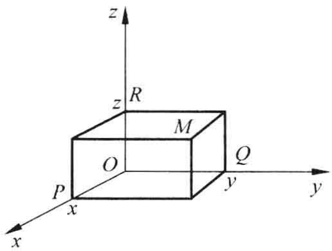

图 8.1.3

建立了空间直角坐标系后，空间中的任何一个点 M，就有一个它对应的三元数(x,y,z)，我们通常写成“点 $M(x,y,z)$”，称实数 x,y,z 为点 M 的直角坐标，简称坐标.

给定了空间点的坐标后，实际上就可确定空间点在坐标系中的位置.

例 8.1.1 在同一坐标系下画出点

$A(0,0,2)$, $B(0,1,2)$, $C(1,1,2)$,

它们的位置有何特点？说明空间中所有满足 $z=2$ 的点 (x,y,z) 的位置特点.

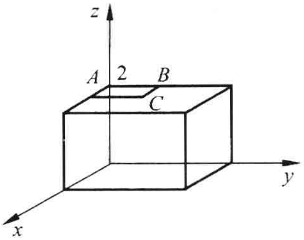

图 8.1.4

解 点 A,B,C 的位置如图 8.1.4 所示. 它们的 z 坐标都是 2，它们都在过 A 点垂直于 z 轴的平面上.

空间中任何形如 $(x,y,2)$ 的点，都满足方程 $z=2$，而 $(x,y,2)$ 无论 x,y 是什么都在过 A 点垂直于 z 轴的平面上. 所有满足 $z=2$ 的点都位于上述平面. 我们用方程 $z=2$ 来表示这个平面. 这正像在一维空间中用 $z=2$ 表示一个点，在二维空间中用 $z=2$ 表示一条直线一样.

例 8.1.2 说出下列点所在的卦限：

$A(1,2,1)$, $B(-1,2,1)$, $C(-1,-2,1)$, $D(1,-2,1)$,

$E(1,2,-1)$, $F(1,-2,-1)$, $G(-1,2,-1)$, $H(-1,-2,-1)$,

并说明它们在空间中的位置特点.

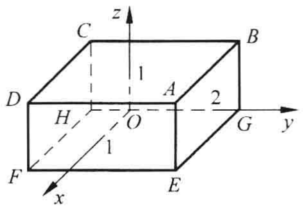

图 8.1.5

解 过 x 轴上 $x=1,x=-1$ 两点分别作两个 x 轴的垂面；过 y 轴上 $y=2,y=-2$ 两点分别作两个 y 轴的垂面；过 z 轴上 $z=1,z=-1$ 两点分别作两个 z 轴的垂面，这六个面围成一个以原点为中心的长方体，如图 8.1.5 所示.

由各点坐标的意义知，各点的位置正好在这个长方体的 8 个顶点上，A 在第 Ⅰ 卦限，B 在第 Ⅱ 卦限，C 在第 Ⅲ 卦限，D 在第 Ⅳ 卦限，E 在第 Ⅴ 卦限，F 在第 Ⅷ 卦限，G 在第 Ⅵ 卦限，H 在第 Ⅶ 卦限.

由例 8.1.2 知 A,B 两点是关于 yOz 面对称的，注意到它们的坐标 $A(1,2,1)$，$B(-1,2,1)$ 的特点：x 坐标为相反数，y,z 坐标都相同. 这个结论对一般情形也是正确的：$(-x,y,z)$ 与 (x,y,z) 关于 yOz 面对称；$(x,-y,z)$ 与 (x,y,z) 关于 zOx 面对称；$(x,y,-z)$ 与 (x,y,z) 关于 xOy 面对称.

例 8.1.2 的结果还提示我们以下的结论也是正确的（Ⅰ$(+,+,+)$ 表示 x,y,z 坐标都是正数的点在第 Ⅰ 卦限，其余记号有类似的含义）：

Ⅰ$(+,+,+)$, Ⅱ$(-,+,+)$, Ⅲ$(-,-,+)$, Ⅳ$(+,-,+)$,

Ⅴ$(+,+,-)$, Ⅵ$(-,+,-)$, Ⅶ$(-,-,-)$, Ⅷ$(+,-,-)$.