# 高等数学

许志强 主编

## 学习指导与习题解答

（配《高等数学》伍宪彬主编）

哈尔滨工程大学出版社

# 高 等 数 学
# 学习指导与习题解答

（配《高等数学》伍宪彬主编）

主 审 阎理坦
主 编 许志强

哈尔滨工程大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学学习指导与习题解答/许志强主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2004
ISBN 7 - 81073 - 625 - 6

Ⅰ.高… Ⅱ.许… Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 111290 号

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850mm × 1 168mm 1/32 印张 14.25 字数 365 千字
2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷
印数:1—3 100 册
定价:24.00 元

# 前　言

《高等数学》是大学理工科、经济学、管理学等各专业学生必修的基础课。为了帮助广大读者学好《高等数学》，我们编写了本辅导教材。

本书按照浙江万里学院伍宪彬等主编的《高等数学》的章节顺序，分为十章，每章均以四个板块形式出现，即

1.本章主要内容　列出基本概念、重要定理和主要内容。

2.典型例题　我们从有关书籍和历年研究生考试试题中精选了有代表性的例题，这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强、旨在提高分析能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

3.教材习题解答　我们针对《高等数学》（伍宪彬等主编）中的习题，几乎给出了全部解答。

4.自测题　旨在进一步强化解题训练，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

本书第一章由张春丽老师编写，第二章由白路峰、刘玉霞老师编写，第三章由吴慧玲老师编写，第四章由许志强老师编写，第五章由袁林忠老师编写，第六章由相丽驰老师编写，第七章由伍宪彬老师编写，第八章由徐园芬、李焱华老师编写，第九章由鲁立刚、郭金骥老师编写，第十章由田增锋老师编写。

本书得到了浙江万里学院基础学院的关怀，哈尔滨工程大学

出版社的有力支持，并由东华大学阎理坦博士主审，编者在此向他们一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中一定会出现不当之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者
浙江万里学院基础学院综合教学部
2004 年 9 月

# 目　　录

# 第一章

## 一、主要内容

1.函数的概念及其表示;分段函数;隐函数;反函数;基本初等函数的性质及其图形,初等函数.

2.数列极限的概念与性质以及函数极限的概念与性质,函数的左、右极限.无穷小量与无穷大量的定义及关系,性质,无穷小的阶.极限的四则运算,极限存在的两个准则,两个重要极限.

3.函数连续的概念,左连续和右连续;函数在一点连续的充分必要条件;函数的间断点及其分类;复合函数连续性;初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质(最值定理,有界性定理,介值定理,零点定理).

(一) 函数

1.函数的定义

若 $D$ 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 $f$,使每个 $x \in D$,都有一个确定的实数 $y$ 与之对应,则称这个对应规则 $f$ 为定义在 $D$ 上的一个函数关系,或称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记作 $y = f(x)$,其中 $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量,集合 $D$ 为函数的定义域,记作 $D_f$.函数 $y$ 的取值的集合,称为函数的值域,记作 $Z(f)$.

注意:在函数的定义中,有三个因素:定义域 $D$,对应法则 $f$ 和值域 $Z$.

2.函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 $E$ 上有定义,若存在正数 $M$ 对任意的 $x \in E$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 $E$ 上有界,这时 $M$ 称为 $f(x)$ 在 $E$ 上的界.若 $f(x)$ 在定义域 $D_f$ 上有界,则称 $f(x)$ 是有界

函数.否则称 $f(x)$ 在 $D_f$ 内无界.

注意:

(1) 如果一个函数 $y = f(x)$ 在$(a,b)$内有界,它的界并不是惟一的.例如 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的,有$|\sin x| \leqslant 1$,但是我们也可以取 $M = 2$ 作为它的界,即$|\sin x| < 2$,大于 1 的任何正数都可以作为 $y = \sin x$ 的界.

(2) 函数 $y = f(x)$ 有界与否,是与所在区间紧密联系在一起的.例如 $y = \frac{1}{x}$ 在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则无界;函数 $y = x^3 + 1$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界,而在任何有限区间内都是有界的.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域内有界,则它的定义域内任一部分区间上必有界.关于函数的有界性,还有一种单方向有界的概念.

设函数 $y = f(x)$ 在区间$(a,b)$内有定义,如果存在一个数 $B$,使得对于$(a,b)$内任意一点 $x$,总有 $f(x) \leqslant B$,则称函数 $f(x)$ 在$(a,b)$内是有上界的;如果存在一个数 $A$,使得对于$(a,b)$内任意一点 $x$,总有 $f(x) \geqslant A$,则称函数 $f(x)$ 在$(a,b)$内是有下界的.

如果一个函数在区间$(a,b)$内是有界的,则它必定既有上界也有下界,反之,如果一个函数在区间$(a,b)$内仅有上界(或下界),则它在此区间内不一定有界.

3.反函数

设 $f(x)$ 在定义域 $D_f$ 上是一对一的函数,则以 $f(D_f)$ 为定义域,把 $f(D_f)$ 中的 $y$ 对应到 $y$ 的原像 $x$,这样就确定了一个新的函数,称为函数 $f(x)$ 在 $D_f$ 上的反函数,记作 $\varphi(y)$,即 $x = \varphi(y)$, $y \in f(D_f)$.

若函数 $f(x)$ 在定义域 $D_f$ 上有反函数,此反函数记作 $f^{-1}(y)$,即

$$x = f^{-1}(y), (y \in f(D_f))$$

习惯上常以 $x$ 表示自变量,$y$ 表示因变量,故常将函数 $y = f(x)$

$(x \in D)$ 的反函数表示成 $y = f^{-1}(x), (x \in f(D_f))$.

在同一直角坐标系中,函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x), x \in f(D_f)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

注意:函数 $x = \varphi(y)$ 与 $y = \varphi(x)$ 是同一个函数,所以当 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数时,$y = \varphi(x)$ 也是 $y = f(x)$ 的反函数.

4.复合函数

设 $y$ 是 $u$ 的函数,$y = f(u)$,而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u = \varphi(x)$,又设 $X$ 表示函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一个子集,如果对于在 $X$ 上的每一个取值 $x$ 所对应的 $u$ 值,函数 $f(u)$ 有定义,则 $y$ 通过 $u = \varphi(x)$ 而成为 $x$ 的函数,记为 $y = f[\varphi(x)]$.

这个函数叫做由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,$u$ 为中间变量.

注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y = \arcsin u$,及 $u = x^2 + 3$ 就不能复合成一个复合函数,因为对于 $u = x^2 + 3$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任何值 $x$ 所对应的 $u$ 值,$y = \arcsin u$ 都没有定义,即 $y = \arcsin(x^2 + 3)$ 对于任何值 $x$ 都无定义,因为 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,而对于任何值 $x$,$x^2 + 3$ 都大于或等于 3.

复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有更多的中间变量,如 $u, v, w, t$ 等.

5.初等函数

常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数及反三角函数这六类函数是研究其它各种函数的基础,统称为基本初等函数.基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到函数统称为初等函数.

(二) 极限

1.数列极限的概念

设有数列 $\{x_n\}$ 与常数 $a$,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,

都有不等式$|x_n - a| < \varepsilon$成立，则称数列$\{x_n\}$的极限为$a$，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$或$x_n \to a$（当$n\to\infty$），称数列$\{x_n\}$收敛；当数列$\{x_n\}$无极限时，称$\{x_n\}$发散.

2. 函数极限的概念

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$，当$|x| > M$时，有不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立.

注意1° 定义中$\varepsilon$刻划$f(x)$与$A$的接近程度，$\delta$刻划$x$与$x_0$的接近程度，$M$刻划$|x|$充分大的程度，$\varepsilon$是任意给定的正数，$\delta$（或$M$）是随$\varepsilon$而确定的.

注意2° 单侧极限

在$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的定义中，$x$不等于$x_0$且以任何方式趋于$x_0$，因此可以从$x_0$的左侧也可以从$x_0$的右侧趋于$x_0$，从而有下面左右极限的概念：

右（左）极限：$\forall \varepsilon > 0$，若$\exists \delta > 0$，当$x_0 < x < x_0 + \delta$（或$x_0 - \delta < x < x_0$）时，都有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在点$x_0$的右极限（或左极限）为$A$.

记作$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$（或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$）. 也记作$f(x_0 + 0) = A$（或$f(x_0 - 0) = A$）.

容易证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

注意3° 研究$x\to x_0$时$f(x)$的极限，是为了研究在自变量$x\to x_0$的变化过程中$f(x)$的性态，此时$f(x)$有无极限与$f(x)$在点$x_0$有无定义完全无关. 即使$f(x)$在点$x_0$有定义，在讨论$x\to x_0$时，$f(x)$的极限过程中，函数值$f(x_0)$不起任何作用，因此在定义中要求$0 < |x - x_0| < \delta$.

注意4° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义可类似推到自变量$x$沿$x$轴正向或负向一侧趋于无穷时函数极限的情形，只要把定义中的 $|x|>M$ 改为 $x>M$（或 $x<-M$）即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）的概念.

易证

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

3.无穷小量与无穷大量

(1) 设 $u$ 为变量，若 $u$ 在某变化过程中的极限为零，则称 $u$ 是此变化过程中的无穷小.

若对任意的正数 $M$，存在自变量变化的某时刻，在此时刻后都有 $|u|>M$，则称变量 $u$ 为此变化过程时的无穷大. 记作 $\lim u=\infty$ 或 $u\to\infty$（某过程）.

(2) 无穷小的阶的比较

若 $\alpha$ 和$\beta$都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小量，且 $\beta\neq0$，则

① 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则说 $\alpha$ 是比$\beta$高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$.

② 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则说 $\alpha$ 是比 $\beta$ 低阶的无穷小.

③ 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq0$，则说 $\alpha$ 与$\beta$是同阶无穷小，特别当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时，则说 $\alpha$ 与 $\beta$ 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

**定理1** $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$

**定理2** 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

4.极限存在的判别法

(1) $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\alpha$ 为无穷小.

(2) 夹逼准则：若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足 ① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$n=1,2,3,\cdots$；② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列$\{x_n\}$的极限存在，且

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

这一准则可以推广到函数极限情形:设在点 $a$ 的某空心邻域上有不等式:$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$;$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

(3) 单调有界准则:单调有界数列必有极限.

5.极限的性质

(1) 极限的惟一性:若变量 $u$ 有极限 $A$ 且有极限 $B$,则 $A = B$;

(2) 有界性:有极限的变量是有界变量;

(3) 保号性:① 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且 $A > 0$(或 $A < 0$),则必存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

② 若在 $x_0$ 的某一去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

(4) 保序性:若 $f(x) \geqslant g(x)$,则 $\lim f(x) \geqslant \lim g(x)$.

6.极限的四则运算及复合运算

(1) 若 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$,则

①$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

②$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$

上述情形可以推广到有限个函数的和、差、积的极限的情形.

③$\lim[cf(x)] = c \cdot \lim f(x)$　$c$ 为常数

④$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$　$(B \neq 0)$

上述四则运算法则亦对数列成立,必须注意是,进行极限的四则运算,必须以函数存在极限为前提,没有极限,不能进行四则运算.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,且函数 $f(u)$ 在点 $B$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(B)$.

7.两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

8.本部分内容所涉及到的求极限方法总结

(1) 用极限的定义证明极限;

(2) 利用极限四则运算法则;

(3) 利用等价无穷小代换或无穷小的性质.

例如:$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$,这里注意到当 $x \to 0$ 时,$\tan 2x \sim 2x$,$\sin 5x \sim 5x$.

一般常用的等价无穷小有:当 $x \to 0$ 时,$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1 + x) \sim e^{x} - 1$,$1 - \cos x \sim \dfrac{x^{2}}{2}$,$(1 + x)^{2} - 1 \sim 2x$,$a^{x} - 1 \sim x\ln a$($a > 0$,且 $a \neq 1$).

必须注意的是在利用等价无穷小代换时,只能作因子的代换,而不能作加、减项的替换.

又如:$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$,注意到 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量,$\sin x$ 是有界函数.

(4) 利用夹逼定理.

(5) 利用两个基本极限.

例如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5.$$

又如:

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty}\left[\left(1 + \frac{-2}{x + 1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{-2} \cdot \left(1 + \frac{-2}{x + 1}\right)^{-1} = e^{-2}$$

(6) 利用单调有界准则.

(三) 函数的连续性

1.函数连续的两个等价定义

若函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.单侧连续的概念

若 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 右连续,若 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 左连续.

容易证明:函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 $x_0$ 左连续且在点 $x_0$ 右连续.

3.函数的间断点及其分类

不连续的点叫间断点.

如果函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处有下列三种情形之一,则点 $x_0$ 必为 $f(x)$ 的间断点.

(1) $f(x)$ 在点 $x_0$ 无定义;

(2) $f(x)$ 虽在点 $x_0$ 有定义,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $f(x)$ 虽在 $x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

4.函数在一点处连续的性质

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数;连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数.一切初等函数在定义域内都是连续.

5.闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则它在这个区间上一定有最大值与最小值.(最大值,最小值统称最值)

(2) 有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在这个区间上有界.

(3) 介值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<f(b)$，则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 $\mu$，必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.

(4) 零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

## 二、典型例题

**例 1** 设 $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**解**
$$x_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

所以有
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

**例 2** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.(1990 年试题)

**解**
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

**例 3** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

**解**
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})\sin x\cos x}{x+2-2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}.$$

或者利用 $\sin 2x \sim 2x$，

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x} = 4\sqrt{2}.$$

**例 4** 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

**解** 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x} = 1$ （注意到 $e^x - 1 \sim x$）.

**例 5** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$

**解法一** 
$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\sin^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x+x)}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos\dfrac{x}{2}(\sin x+x)}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\cdot\left[2\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{\sin\dfrac{x}{2}}\right] = 4$$

**解法二** 
$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\dfrac{x^2}{4}}$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x+x)}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{x^2}\cdot\frac{1}{2}$$