



全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

环境波浪学

Waves learning environment

林钢 编著



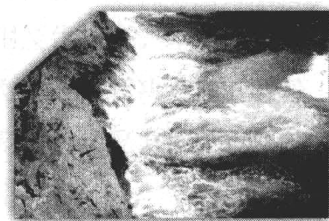
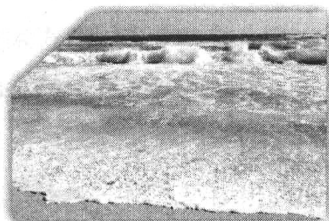
海洋出版社

全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

环境波浪学

Waves learning environment

林钢 编著



海洋出版社

内 容 提 要

本书是对作者多年实践的总结,也是为港口海岸及近海工程专业研究生准备的波浪类课程教科书。本书以海岸工程为背景,以海岸工程为依托,全面介绍海岸工程中波浪理论、工程波浪问题。全书共分6章,第1~2章是基础部分;第3章是近岸带波浪场,介绍一些相关近岸带概念;第4章是波浪模型;第5章是关于各类缓坡方程模型;第6章是工程波浪。本书每章节都结合理论配有实际问题的物理和工程背景。

图书在版编目(CIP)数据

环境波浪学/林钢编著. —北京:海洋出版社,2011.1
ISBN 978-7-5027-7957-3

I. ①环… II. ①林… III. ①波浪—海洋动力学
IV. ①P731.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第016648号

责任编辑:王 溪

责任印制:刘志恒

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

北京市海淀区大慧寺路8号 邮编:100081

北京海洋印刷厂印刷 新华书店发行所经销

2011年3月第1版 2011年3月北京第1次印刷

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:13.5

字数:320千字 定价:35.00元

发行部:62147016 邮购部:68038093 总编室:62114335

海洋版图书印、装错误可随时退换

前 言

本书是在中山大学期间为港口海岸及近海工程专业研究生开设“波浪理论及其工程应用”、“随机波浪理论”、“波浪对海上建筑物作用”课程的基础上形成这本波浪理论和工程实践的专著。包含了本人几十年对波浪学习、认识和研究工作；包含了对研究生学习和培养的体会和经验。

由于全球越来越多地关注海洋的开发、利用，使得海洋成为二十一世纪发展的热点领域。作为海洋领域发展关键首先就是要面对波浪问题，这也是学术研究领域所关注的、所面对的问题之一。

波浪理论作为海岸、海洋领域一门重要而复杂学科已经走过一百多年的历史。建立和完善了解决不同条件下的波浪理论。诸如：规则波与不规则波；深水波与浅水波；微幅波与有限振幅波；线性波与非线性波理论等等。

对于波浪研究主要方法有：理论方法、数值计算方法、物理模拟实验方法、现场实际观测方法和卫星观测的高技术方法。各个方法有各自解决范围及优缺点。本书主要介绍理论方面工作及理论波浪和工程波浪在解决实际的和工程上面对波浪解决方法。数值模拟方法在另本书（计算海岸动力学）中专门介绍，本书不涉及数值计算方面工作；波浪力等作用力方面内容本书也不涉及，待在后续出版的书中介绍。

波浪问题之所以吸引人们的注意力，反映在数学上方程的多样性和物理上（工程上）多样性和复杂性。

波浪理论研究困难在于

- 1) 方程的非线性、边界条件的非线性；
- 2) 方程的线性和边界条件的非线性。

波浪理论研究方法主要有以下几种途径：

1. 整体模型

直接从 Navier-Stokes 方程入手，进行求解。

2. 无旋模型

在无旋条件下，存在势函数，将控制方程简化为 Laplace 方程或 Poisson 方程。在一定的边界条件下获得物理问题的解。

线性波理论

1) 微幅波理论 (Airy 波理论)

非线性波理论

有限振幅波理论

2) 斯托克斯波理论 (Stokes 波理论)

3) 余摆线波理论 (Gerstner 波理论)

4) Boussinesq 方程

5) 椭圆余弦波理论 (Cnoidal Waves)

6) 孤立波理论 (Solitary 波)

7) 流函数波

缓坡方程模型 (又分椭圆型、双曲型和抛物型)

再根据深浅水之分, 又分深水波和浅水波。

本书依据这一思路予以讨论各种波浪理论, 结合具体实例, 包括: 圆形浅滩、碗形深坑、沙坝的 Bragg 反射、波浪在斜坡地形上传播、Stokes 波对防波堤绕射等实际问题的求解。波浪研究过程中大量使用摄动展开方法和变分方法。变分方法的优点是, 在变分过程中即得到控制方程又得到相应的边界条件。我们知道流体力学有 Euler 方法和 Lagrange 方法, 本书给出了 Lagrange 方法在解决一些波浪问题的优势, 如: 余摆线波理论和增减水问题等方面。

本书的第 1 章和第 2 章是基础内容, 主要介绍非线性系统的近似方法 (第一章), 介绍正则摄动和奇异摄动, 并结合波浪理论的应用。第 2 章变分方法, 介绍变分概念及流体力学中的变分方法, 给出应用实例。第 3 章是近岸带波浪场, 介绍复杂的近岸带一些概念, 将边缘波放在这章介绍和沿岸流; 第 4 章是线性与非线性波理论, 主要讨论 Airy 波理论、Stokes 波理论、Gerstner 波理论、Boussinesq 理论、椭圆余弦波理论、孤立波理论、KdV 方程、流函数波理论和深水非线性波以及各种波浪比较; 第 5 章讨论缓坡方程, 包括三类偏微分方程下的缓坡方程、曲线坐标系下的缓坡方程、波流相互作用的缓坡方程和随机波浪的缓坡方程。这章也对时域下的方程作了讨论; 第 6 章是工程波浪, 介绍港湾振动、波浪传播中的变形问题 (主要是浅水变形问题)、海浪的形成和发展、海浪推算和设计波浪、海浪谱和不规则波变形方面内容。

目 录

第 1 章 非线性系统的近似方法	1
1.1 正则摄动	1
1.2 奇异摄动	7
第 2 章 变分方法	18
2.1 变分概述	18
2.2 数学物理中的变分问题	19
2.3 Hilbert 空间的变分原理	21
2.4 平均变分法	23
第 3 章 近岸带波浪场	26
3.1 基本概念	26
3.2 近岸带波浪	30
第 4 章 线性波与非线性波理论	47
4.1 微幅波理论	47
4.2 有限振幅波理论	57
4.3 Boussinesq 方程	71
4.4 永形色散长波	74
4.5 KdV 方程	78
4.6 流函数波理论	82
4.7 深水中的非线性波	86
4.8 各种波浪理论比较	89
第 5 章 缓坡方程	95
5.1 椭圆型缓坡方程	95
5.2 抛物型缓坡方程	105

5.3	双曲型缓坡方程.....	111
5.4	正交曲线坐标系下的缓坡方程.....	116
5.5	波流相互作用下的缓坡方程.....	119
5.6	随机波作用下的缓坡方程.....	125
第 6 章	工程波浪	128
6.1	港湾振动	128
6.2	波浪变形	131
6.3	能量方程	147
6.4	风浪的发生与成长.....	156
6.5	台风浪推算方法.....	183
6.6	海浪推算和设计波浪.....	185
6.7	海浪谱	193
结束语	204
参考文献	205

第1章 非线性系统的近似方法

1.1 正则摄动

1.1.1 摄动问题与摄动理论

包含在方程或定解条件中的小参数 ε 的数学问题为摄动问题。摄动理论研究的是这类摄动问题的解法。这种解法的要点是把解作某种渐近展开，代入到方程和定解条件中，然后作量阶比较，从而把一个复杂问题分解为一系列相对简单问题。

摄动问题的三个基本步骤：

① 引入小参数 ε ，将原问题化为一个摄动问题；

② 将解作某种形式的摄动展开，代入定解问题后，求解派生出来的一系列较简单的定解问题；

③ 就 ε 的适当数值对摄动展开求和，得到原问题的解。

水波问题

设水深为 h 为常数的海洋中波浪传播。波幅为 A ，水平方向的特征长度为 L_0 ，坐标平面位于静止水面上， z 轴铅直向上。其速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 满足

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0, \quad \phi \in \Omega \quad (1.1.1)$$

边界条件

自由表面 $z = \eta(x, y, t)$ 上的动力学边界条件是

$$g\eta(x, y, t) + \frac{\partial \phi(x, y, \eta, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0, \quad [z = \eta(x, y, t)] \quad (1.1.2)$$

自由表面 $z = \eta(x, y, t)$ 上的运动学边界条件是

$$\eta_t(x, y, t) + \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \phi_z = 0, \quad [z = \eta(x, y, t)] \quad (1.1.3)$$

海底边界条件

$$\phi_z = 0, \quad (z = -h) \quad (1.1.4)$$

选择无量纲变量

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= (x, y) / L, \quad \bar{z} = z / h, \\ \bar{t} &= gt / c, \quad \bar{\eta} = \eta / A, \quad \bar{\phi} = \phi / (cA) \end{aligned}$$

式中：

c —— 某个特征速度。

将它们代入原方程和定解条件，并省略横线，得

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{L^2}(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0, \quad \phi \in \Omega \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2} \left[\frac{h^2}{L^2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \phi_z^2 \right] \frac{c^2}{gh} \frac{A}{h} &= 0, \quad (z = \frac{A}{h}\eta) \\ \eta_t - \frac{c^2}{gh} \phi_z + \frac{c^2}{gh} \frac{A}{h} \left(\frac{h}{L} \right)^2 (\phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y) &= 0, \quad (z = \frac{A}{h}\eta) \\ \phi_z &= 0, \quad (z = -1) \end{aligned}$$

若取特征速度 c 正比于波速，这样独立的无量纲参数只有两个： $\frac{A}{h}$ 和 $\frac{h}{L_0}$

(1) 若波浪是微幅的，而水深与波长同阶。这时可取

$$\varepsilon = A/h, \quad h = L, \quad c^2 = gh$$

相应的定解问题是

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y, z, t) &= 0, \quad \phi \in \Omega \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) &= 0, \quad (z = \varepsilon \eta) \\ \eta_t - \phi_z + \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \eta &= 0, \quad (z = \varepsilon \eta) \\ \phi_z &= 0, \quad (z = -1) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

令 $\varepsilon = 0$ ，退化问题又称零级近似，就是通常所说的线性 Airy 波浪理论。在线性理论中波速满足下式

$$c^2 = gL \frac{1}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right).$$

从这个定解问题采用摄动方法获得的波浪称为 Stokes 波。

(2) 对浅水波，取小参数 $\varepsilon = h/L$ 。这时可选择特征速度 $c^2 = gh = gL$ ，此时对非线性问题， \sqrt{gh} 不再是一个极限速度。不妨取 $A = h$ 。无量纲的定解问题为

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0, \quad \phi \in \Omega \\ \varepsilon(\eta + \phi_t) + \frac{1}{2} \{\varepsilon^2(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \phi_z^2\} &= 0, \quad (z = \eta) \\ \varepsilon^2(\eta_t + \nabla \phi \cdot \nabla \eta) - \phi_z &= 0, \quad (z = \eta) \\ \phi_z &= 0, \quad (z = -1) \end{aligned}$$

其零级近似

$$\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$$

设

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(x, y, t) + \varepsilon^2 \phi_1(x, y, t) + \dots, \\ \eta &= \eta_0(x, y, t) + \varepsilon^2 \eta_1(x, y, t) + \dots \end{aligned}$$

由控制方程和海底条件，知

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2}(1+z)^2(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}) \\ \phi &= \phi_0(x, y, t) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(1+z)^2(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}) + \dots \end{aligned}$$

代入自由面动力学条件, 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\eta_0 + \phi_{0t} + \frac{1}{2}(\phi_{0xx}^2 + \phi_{0yy}^2) = 0$$

同样, 自由面运动学条件为

$$\eta_{0t} + \nabla \phi_0 \cdot \nabla \eta_0 + (1 + \eta_0)(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}) = 0$$

这是浅水方程, 又称长波的 Airy 理论。

如果选择无量纲变量

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= (x, y) / L, \quad \bar{z} = z / h, \\ \bar{t} &= \frac{\sqrt{gh}t}{L}, \quad \bar{\eta} = \eta / A, \quad \bar{\phi} = \frac{gh\phi}{gLA} \end{aligned}$$

并引入符号

$$\beta^2 = \frac{h^2}{L^2}, \quad \alpha = \frac{A}{h}$$

则无量纲的定解问题为

$$\begin{aligned} \beta^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0, \quad \phi \in \Omega \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2}\alpha(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta^2}\phi_z^2 &= 0, \quad z = \alpha\eta \\ \eta_t + \alpha\nabla\phi \cdot \nabla\eta - \frac{1}{\beta^2}\phi_z &= 0, \quad z = \alpha\eta \\ \phi_z &= 0, \quad z = -1 \end{aligned}$$

此方程将上面两种方程包含在内了。

若取 $\beta = 1, \alpha = \varepsilon$, 就得到有限水深微幅波的情形;

若取 $\beta = \varepsilon, \alpha = 1$, 就蜕化为浅水波情形。

1.1.2 变形坐标法

1) Stokes 的有限振幅波

Stokes 波是一种周期性的平面行进波。

其定解问题是

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, & \phi \in \Omega \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2}\varepsilon(\phi_x^2 + \phi_z^2) = 0, & z = \varepsilon\eta \\ \eta_t - \phi_z + \varepsilon\phi_x\eta_x = 0, & z = \varepsilon\eta \\ \phi_z = 0, & z = -1 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

选定解的形式为:

$$\phi(x, z, t) = \Phi(\xi, z) = \Phi(x - ct, z) \quad (1.1.7)$$

式中:

c —— 波速。

其定解问题是

$$\begin{cases} \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{zz} = 0, & \phi \in \Omega \\ \eta - c\phi_{\xi} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Phi_{\xi}^2 + \Phi_z^2) = 0, & z = \varepsilon\eta \\ \Phi_z + c\eta_{\xi} - \varepsilon\phi_{\xi}\eta_{\xi} = 0, & z = \varepsilon\eta \\ \phi_z(\xi, -1) = 0, & z = -1 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

将 $\Phi(\xi, z; \varepsilon)$ 和 $\eta(\xi; \varepsilon)$ 展开, 有

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, z; \varepsilon) &= \phi_1(\xi, z) + \varepsilon^2\phi_2(\xi, z) + \varepsilon^3\phi_3(\xi, z) + \dots, \\ \eta(\xi; \varepsilon) &= \eta_1(\xi) + \varepsilon\eta_2(\xi) + \varepsilon^2\eta_3(\xi) + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon^1u_1(\xi) + \varepsilon^2u_2(\xi) + \dots \end{aligned}$$

代入式 (1.1.8), 并注意把 $z = \varepsilon\eta$ 上的值在 $z = 0$ 上展开, 得到

ε^0 :

$$\left. \begin{aligned} c_0\eta_{1\xi} + \phi_{z\xi} &= 0 \\ \eta_1 - c_0\phi_{1\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} (z=0 \text{ 上})$$

ε^1 :

$$\left. \begin{aligned} c_0\eta_{2\xi} + \phi_{2z} &= \phi_{1\xi}\eta_{1\xi} - \eta_1\phi_{zz} - c_1\eta_{1\xi} \\ \eta_2 - c_0\phi_{2\xi} &= c_1\phi_{1\xi} + c_0\phi_{1\xi}\eta_1 - \frac{1}{2}\phi_{1\xi}^2 - \frac{1}{2}\phi_{1z}^2 \end{aligned} \right\} (z=0 \text{ 上})$$

ε^2 :

$$\left. \begin{aligned} c_0\eta_{3\xi} + \phi_{3z} &= \phi_{2\xi}\eta_{1\xi} + \phi_{1\xi}\eta_{2\xi} - \phi_{1z}\eta_2 - \phi_{2z}\eta_1 \\ &- c_1\eta_{2\xi} - c_2\eta_{1\xi} + \phi_{1\xi}\eta_1\eta_{1\xi} - \frac{1}{2}\phi_{1zz}\eta_1^2 \\ \eta_3 - c_0\phi_{3\xi} &= c_0(\phi_{1\xi}\eta_2 + \phi_{2\xi}\eta_1 + \frac{1}{2}\phi_{1\xi z}\eta_1^2) + c_1(\phi_{2\xi} + \phi_{1\xi}\eta_1) \\ &+ c_2\phi_{1\xi} - \phi_{1\xi}\phi_{2\xi} - \phi_{1z}\phi_{2z} - \eta_1(\phi_{1\xi}\phi_{1\xi} + \phi_{1z}\phi_{zz}) \end{aligned} \right\} (z=0 \text{ 上})$$

一级近似就是熟知的线性余弦波或 Airy 波:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= c_0 \frac{\cosh[kh(1+z)]}{\sinh(kh)} \sin(kh\xi) \\ \eta_1 &= \cos(kh\xi) \\ c_0^2 &= \tanh[(kh)/(kh)] \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

相应二级摄动解是

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= c_0 kh \frac{3 \cosh[2kh(1+z)]}{8 \sinh^4(kh)} \sin(2kh\xi) \\ \eta_2 &= \frac{1}{4} kh \left\{ \frac{\cosh(kh)[2ch^2(kh) + 1]}{\sinh^3(kh)} \cos(2kh\xi) - \frac{2}{\sinh(2kh)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

将一级、二级解代入三级自由面条件, 经过计算得到三级解为

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{c_0 k^2 h^2 [9 - 4 \sinh^2(kh)] \cosh[3kh(1+z)]}{64 \sinh^7(kh)} \sin(3kh\xi) \\ \eta_3 &= k^2 h^2 \left\{ \frac{3[8 \sinh^6(kh) + 1]}{64 \sinh^6(kh)} \cos(3kh\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \sinh^6(kh) + 12 \sinh^4(kh) + 15 \sinh^2(kh) + 3}{16 \sinh^4(kh) \cosh^2(kh)} \cos(kh\xi) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

2) KdV 方程的周期行波解

Laitone (1962) 曾研究过三级 Stokes 波的适用范围, 并建议在 $kh > 0.78$ 时使用最为合适。这里 k 为波数, h 为水深。对于更长的波 (水深给定) 或更浅的水 (波长给定) 可应用椭圆余弦波 (cnoidal wave) 理论。典型椭圆余弦波剖面如图 1.1 (a) 所示。它的一个极限是波长为无穷的情形, 相应于孤立波 (solitary wave), 其波型如图 1.1 (b) 所示。另一个极限是浅水的线性余弦波, 其波型如图 1.1 (c) 所示。

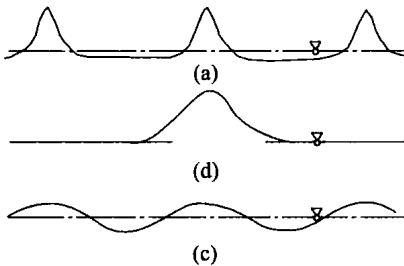


图 1.1 各波型图

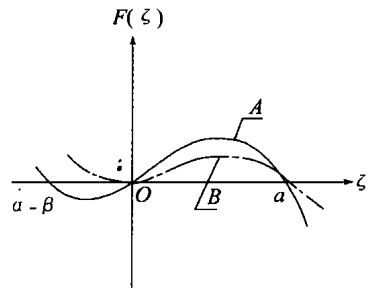


图 1.2 函数 $F(\xi)$ 的形状图

向右传播的椭圆余弦波服从著名的 KdV 方程。KdV 方程在静止坐标系中有量纲的形式方程是

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3\eta}{2h} \right) \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.1.12)$$

式中:

η —— 波面;

h —— 水深;

$c_0 = (gh)^{1/2}$ 。

这个方程的特点是非线性项 $\eta\eta_x$ 与色散项 η_{xxx} 有某种平衡。略去非线性项, 得到线性 KdV 方程

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.1.13)$$

它的余弦行波解为

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (1.1.14)$$

式中:

a —— 波幅;

k —— 波数;

ω —— 圆频率;

δ ——相位角。

将此解代入式 (1.1.13), 得到色散关系

$$\omega(k) = kc_0 - \frac{1}{6}c_0 h^2 k^3$$

一般情况下, 对所有的实数 k , 若 $\omega(k)$ 恒是实数, 且 $\omega' \neq 0$, 即 ω 不是 k 的线性函数, 则称方程为色散的方程。式 (1.1.13) 中的最后一项是色散项。

式 (1.1.12) 的非线性 KdV 方程具有下列形式的行波解

$$\eta = h\zeta(\xi), \quad \xi = x - Ut \quad (1.1.15)$$

式中:

U ——波浪传播速度。

由式 (1.1.12), 得到

$$\frac{1}{6}h^2\zeta''' + \frac{3}{2}\zeta\zeta'' - \left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta' = 0$$

积分一次, 有

$$\frac{1}{6}h^2\zeta'' + \frac{3}{4}\zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta + G_0 = 0$$

乘以 η' 后积分一次, 有

$$\frac{1}{3}h^2\zeta'^2 + \zeta^3 - 2\left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta^2 + 4G_0\zeta + H_0 = 0$$

式中:

G_0 、 H_0 ——积分常数。

上式可写成

$$\frac{1}{3}h^2\zeta'^2 = F(\zeta) = -\zeta^3 + 2\left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\zeta^2 - 4G_0\zeta - H_0 \quad (1.1.16)$$

式中:

$F(\zeta)$ 为具有单零点的三次函数。

由于式 (1.1.16) 左端是正的, 为使方程有实数解, 右端也必须为正。对有界而言, ζ 必在两个零点之间周期地振荡。不失一般性, 选这两个零点为: 一个是波谷 $\zeta_1 = 0$, 一个是波峰 $\zeta_2 = \alpha$ (它是无量纲波幅的两倍)。由于式 (1.1.16) 右端的性质, 第三个零点必然是负值, 令其为 $\zeta_3 = \alpha - \beta < 0$ 。 $F(\zeta)$ 的形状如图 1.2 所示。则式 (1.1.16) 可成

$$\frac{1}{3}h^2\zeta'^2 = \zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta), \quad 0 < \alpha < \beta \quad (1.1.17)$$

与 $F(\zeta)$ 比较, 有

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \quad (1.1.18)$$

波长为 (这里用 λ 表示波长)

$$\lambda = \frac{2h}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha \frac{d\zeta}{[\zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta)]^{1/2}} \quad (1.1.19)$$

式 (1.1.17) 的解可用椭圆积分表示。为此, 引进

$$\begin{aligned}\zeta &= \alpha \cos^2[\phi(\xi)] \\ \zeta' &= -2\alpha \cos\phi \sin\phi \cdot \phi'\end{aligned}$$

代入式 (1.1.17), 可得

$$\phi'^2 = \frac{3\beta}{4h^2}(1 - m \sin^2 \phi), \quad m = \alpha/\beta, \quad 1 > m > 0 \quad (1.1.20)$$

于是

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} = F(\phi, m) = \pm \frac{\sqrt{3\beta}}{2h}(\xi - \xi_0)$$

$F(\phi, m)$ 是模为 m 的第一类不完全椭圆积分的标准形式, 也可认为 ϕ 是 ξ 的隐函数。

取

$$\cos\phi = \text{cn}\left[\frac{\sqrt{3\beta}}{2h}(\xi - \xi_0)\right]$$

式中:

cn——椭圆余弦函数。

则, 波面可表示为

$$\zeta = a \cos^2 \phi = \text{cn}^2\left[\frac{\sqrt{3\beta}}{2}(\xi - \xi_0)\right] \quad (1.1.21)$$

式 (1.1.21) 就是椭圆余弦波的表达式。

1.2 奇异摄动

1.2.1 奇异摄动

如果在上面过程中, 幂级数解不能在 D 内一致有效, 则问题变为奇异摄动, 出现了“奇异项”或“久期项”。这些项的出现说明共振强迫引起的, 它们的存在使得展开过程不能成立。为了使渐近展开在整个域中一致有效, 必须消去这种引起共振的强迫项, 即所谓奇异项或久期项。

我们先以最简单的线性常微分算子

$$L_0(\vec{G}_j) = \frac{d^2}{dt^2} + \sigma^2 \quad (1.2.1)$$

为例, 证明这一问题。

j 阶摄动方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{G}_j + \sigma_j^2 \vec{G}_j = \vec{F}_j(t) \quad (1.2.2)$$

不妨设 \vec{F}_j 中的某部分具有周期强迫形式

$$\vec{F}_j = A_j e^{i\alpha t}$$

则 j 阶摄动方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{G}_j + \sigma_j^2 \tilde{G}_j = A_j e^{i\alpha t} \quad (1.2.3)$$

取强迫波的解为

$$G_j = \tilde{G}_j e^{i\alpha t}$$

代入式 (1.2.3), 可得

$$\tilde{G}_j = \frac{A_j}{\sigma_j^2 - \sigma^2}$$

由此可知, 当 $A_j \neq 0$ 时, 系统固有频率与强迫频率相等, 发生共振, 因此, 必须要消去这种共振的奇异项, 即令 $A_j = 0$ 。

更广义地

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \tilde{F}_j(t) e^{-i\sigma_j t} dt = 0 \quad (1.2.4)$$

式中:

$e^{-i\sigma_j t}$ 是式 (1.2.2) 的一个齐次解。

这一条件表示, $\tilde{F}_j(t)$ 在 $e^{i\sigma_j t}$ 上的投影必须为零。

1.2.2 多重尺度法

一般的奇异摄动问题, 包含不同时间、空间尺度。其基本思想是引进各种尺度的新变量, 把它们视为独立变量, 通过普通展开, 由消奇异条件逐阶定解。

只考虑时间变量问题,

$$\begin{cases} L_\varepsilon[G_\varepsilon(t)] = F(t, \varepsilon) \\ B_\varepsilon[G_\varepsilon(t)] = H(t, \varepsilon) \end{cases} \quad (1.2.5)$$

取一系列不同时间尺度的变量

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad \dots, \quad T_M = \varepsilon^M t \quad (1.2.6)$$

则

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(t) &= G(T_0, T_1, T_2, \dots, T_M, \varepsilon) \\ &= G_0(T_0, T_1, T_2, \dots, T_M) + \varepsilon G_1(T_0, T_1, T_2, \dots, T_M) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

把 T_j 视为新自变量, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^M \frac{\partial}{\partial T_M} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

代入式 (1.2.5), 并将 L_ε 也展开, 逐阶利用消奇条件, 进行求解。

(1) 求解常微分方程

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V = -2\varepsilon \frac{dV}{dt} \quad (1.2.9)$$

为了使所求的解能在 $t = O(\varepsilon^{-2})$ 范围内成立, 引入

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \dots \quad (1.2.10)$$

将 V 按 ε 幂级数展开, 得到

$$V(t, \varepsilon) = V_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon V_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 V_2(T_0, T_1, T_2) \quad (1.2.11)$$

而时间导数展开为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (1.2.12)$$

将式 (1.2.11) 和式 (1.2.12) 代入式 (1.2.9), 得到各阶方程:

$$O(\varepsilon^0): \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial T_0^2} + V_0 = 0 \quad (1.2.13)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial T_0^2} + V_1 = -2 \frac{\partial V_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (1.2.14)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial T_0^2} + V_2 = -2 \frac{\partial V_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial V_0}{\partial T_1} \quad (1.2.15)$$

由方程式 (1.2.13), 得通解

$$V_0 = A_0(T_1, T_2) e^{iT_0} + (*) \quad (1.2.16)$$

式中:

(*) 表示为前一项的共轭复数;

$A_0(T_1, T_2)$ 待由高阶方程确定。

将上式代入式 (1.2.14), 得到

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial T_0^2} + V_1 = -2i(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial T_1}) e^{iT_0} + (*) \quad (1.2.17)$$

由于 e^{iT_0} 项将引起“共振”强迫, 则消去久期项条件为

$$A_0 + \frac{dA_0}{dT_1} = 0 \quad (1.2.18)$$

解得

$$A_0(T_1, T_2) = a_0(T_2) e^{-T_1} \quad (1.2.19)$$

式中:

$a_0(T_2)$ 待定。

式 (1.2.14) 有解为

$$V_1 = A_1(T_1, T_2) e^{-T_1} + (*) \quad (1.2.20)$$

将式 (1.2.19) 和式 (1.2.20) 代入式 (1.2.14), 得到:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial T_0^2} + V_2 = -Q(T_1, T_2) e^{iT_0} + (*) \quad (1.2.21)$$

式中:

$$Q(T_1, T_2) = 2iA_1 + 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - a_0 e^{-T_1} + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} e^{-T_1} \quad (1.2.22)$$

同样, 消除共振条件 $Q=0$, 或

$$A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial T_1} = \frac{i}{2} [-a_0(T_2) + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2}] e^{-T_1} \tag{1.2.23}$$

由再次消除奇异项，得到

$$-a_0(T_2) + 2i \frac{\partial a_0}{\partial T_2} = 0 \tag{1.2.24}$$

$$a_0 = a_{00} \frac{\partial a_0}{\partial T_2} e^{iT_2/2} \tag{1.2.25}$$

式中：

a_{00} —— 常数。

由此，对于 $O(\epsilon^0)$ 问题中任意函数 $A_0(T_1, T_2)$ 就完全确定了。即

$$A_1 = a_1(T_2) e^{-T_1} \tag{1.2.26}$$

式中：

$a_1(T_2)$ —— 待定。

对 $O(\epsilon^1)$ 问题仿此分析方法，得到

$$a_1 = a_{11} e^{-iT_2/2} \tag{1.2.27}$$

这样有效解为

$$V = e^{-T_1} \{ [a_{00} e^{i(T_0 - T_2/2)} + (*)] + \epsilon [a_{11} e^{i(T_0 - T_2/2)} + (*)] \} + O(\epsilon^3) \tag{1.2.28}$$

式中：

a_{00}, a_{11} —— 由初值确定常数。

假设

$$V(0) = a \cos \varphi_0$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = -a(\sin \varphi_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} + \epsilon \cos \varphi_0)$$

并记 $T_n = \epsilon^n t$ ，得到

$$V = a e^{-\alpha} \cos(t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t + \varphi_0) + O(\epsilon^3)$$

与式 (1.2.9) 的精确解

$$V_c = a e^{-\alpha} \cos(\sqrt{1 - \epsilon^2} t + \varphi_0)$$

相比，可见近似解很好地逼近了精确解。

这个例子很好地说明多重尺度法求解过程。

(2) 线性波浪斜坡上的传播

波浪在斜坡上传播时，随着水深变浅，波浪要素要发生一系列变化，甚至破碎。这里采用多重尺度法研究（图 1.3 所示）。

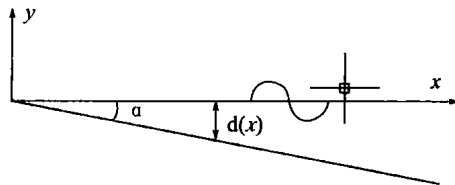


图 1.3 波浪在斜坡上传播示意图