普通高等教育"十二五"规划教材

概率论基础与初步

Probability Theory Foundation and Preliminary

主编　刘建成

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论基础与初步

Probability Theory Foundation and Preliminary

主　编　刘建成
副主编　谭旭平　徐存东
　　　　黄巧洁

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书按照深入浅出、结合实际、讲清概念的原则精选内容，力求简单明了、概念清晰. 全书共8章，内容包括排列与组合、随机事件及其概率、概率的基本运算定理、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、几个重要的分布、大数定律、数理统计方法简介.

本书可作为高职高专院校电子、通信、控制类专业和本科管理、经济类专业学生的教材，也可作为自学者和相关专业技术人员的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论基础与初步/刘建成主编. —天津：天津大学出版社，2011.8

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-5618-4010-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第134723号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 河间市新诚印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 10.25
字　　数 213千
版　　次 2011年8月第1版
印　　次 2011年8月第1次
印　　数 1－3 000
定　　价 26.00元

前　　言

概率论是研究随机现象的数学规律的一门科学.

在自然界中存在的各种现象可分为两大类. 一类称为“必然现象”. 对于这类现象,根据一定的条件,即可推知某事件发生或不发生. 例如,水在一个大气压下加温到 100 ℃时,则必然沸腾,这种现象就是一种必然现象. 另一类称为“随机现象”(或偶然现象). 对于这种现象,在一定条件下不可能预先肯定某事件是否发生. 例如,抛掷一枚分币,可能出现正面,也可能出现反面,事先无法肯定,只有经过试验,才能知道结果如何. 这种现象就是一种随机现象.

必然现象具有某种必然的因果规律,即只要实现一定的条件,肯定会产生某个结果. 物理学、化学、数学中的许多定理、定律都是阐明具有必然性的因果规律的. 那么,是不是随机现象就没有任何规律可言呢? 不能这样理解,随机现象也是有规律的. 例如,在射击中,如果射击次数不多,那么靶上命中点的分布就没有什么显著的规律性,但当射击次数增加时,靶上命中点的分布就开始出现一些特有的规律性,射击次数越多,这种规律性就越明显. 这就说明个别随机现象虽然不易显示其特有的规律性,但大量性质相同的随机现象却有一定的规律性.

恩格斯曾经指出,“在表面上看去是发生着偶然性的地方,其实这种偶然性本身总是服从于内部隐藏着的规律的. 全部问题就在于发现这种规律”;“偶然性只是必然性的补充和表现形式”. 人类社会发展的历史和自然界的变化与运动都告诉我们,“一切客观事物本来是互相联系和具有内部规律的”. 随机现象也不例外. 概率论就是从大量性质相同的随机现象中,研究隐藏在里面的必然规律,寻找其集体所表现出来的规律性. 也就是说,概率论是从数量关系上研究大量同类随机现象的数学,它与其他数学方法一样,同样是研究客观现象内部规律的数学.

概率论这门科学有着很久的历史. 早在 17 世纪中叶,概率论就被人们所注意,但是概率论真正的价值是自然科学发展到一定水平,生产上采用机械化、自动化时,才被人们认识到. 例如,在高速通信中进行数字通信时,信号在空间传播会受到各种干扰. 因此,对方收到信号与原发出信号可能不同. 这种干扰就是偶然的. 通常把信号中所受到的干扰看成是噪声. 在通信当中,为了从收到的信号中排除掉干扰的影响,就要研究噪声的统计规律,从而不断提高通信的有效性和可靠性. 这就需要用概率论作为研究的工具.

本书介绍概率论的一些最基本的概念与知识,力求在内容上与实际应用联系更为紧密,使之更适应在校学生和广大工程技术人员及自学者的学习需要. 通过对本书的学习,能为今后的概率论学习打下坚实的基础.

本书主要包括排列与组合、随机事件及其概率、概率的基本运算定理、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、几个重要的分布、大数定律、数理统计方法简介共8章内容.

本书由广东白云学院刘建成编写,谭旭平、徐存东、黄巧洁参与本书的资料收集和校对。在本书编写过程中得到天津大学出版社的大力帮助,在此一并表示感谢.

由于编者学识有限,书中难免存在疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正.

编者

2011年5月

目　　录

也都没有到达目的地. 同理,到丙村又各有 2 种走法. 所以从学院到丙村的走法是学院经甲村、乙村到丙村的走法的积,即 $3\times2\times2=12$(种).

一般地说,就是下面的乘法原理.

乘法原理:完成一件事有几个步骤,第一步有 m 种方法,无论用哪种方法完成第一步,第二步都有 n 种方法,无论用哪种方法完成第二步……最后一步都有 r 种方法,且必须通过每一步骤才算完成这件事,那么完成这件事总共有

$$m\times n\times\cdots\times r \tag{1.2}$$

种方法.

这两个原理很重要,它们不但可以直接解决不少具体问题,同时也是推导排列、组合公式的重要依据.

习题 1.1

1. 从北京到上海一天有 2 次班机、3 次火车,某人要从北京到上海,一天内有多少种走法?

2. 从北京到南京有 2 种交通工具:飞机、火车. 从南京到上海有 3 种交通工具:飞机、火车、轮船. 某人要从北京经南京到上海,可以有多少种走法?

3. 童装店有不同颜色的 3 种帽子、4 种上衣、2 种裤子,选购一套童装有多少种不同的方法?

4. 从 1,3,5,7,9 这 5 个奇数数字中任取 1 个作为十位数字,从 0,2,4,6,8 这 5 个偶数数字中任取 1 个作为个位数字,可以写出多少个不同的两位数?

5. 指出$(a+b+c)$,$(m+n)$,$(p+q)$的乘积中一共有多少项?

1.2 几种基本的排列问题

1.2.1 选排列和全排列

从 n 个相异元素中每次取 r 个的排列数,下面举例进行说明.

例 1.3 北京、上海、广州间的直达航空线需用几种飞机票?

分析 如一一列出,可有 6 种. 事实上,通过一定的分析,可以得出下述结论. 1 张飞机票总共有 1 个起点和 1 个终点. 可以从 3 个城市中任意选 1 个为起点,即任选起点有 3 种方法. 由于已经选过的那个城市不能作为终点,所以只能在其余 2 个城市中任选 1 个作为终点,即确定起点后再确定终点只有 2 种方法. 根据乘法原理,就有 $3\times2=6$(种)方法,即要准备 6 种飞机票.

这个问题实际上是从 3 个相异元素(城市)中任选 2 个排成一列,问有多少种不同的排列方法,称这是从 3 个相异元素中任选 2 个的选排列问题,并用 A_3^2来记所有

可能的排列方法的数目,即

$$A_3^2=3\times2=6.$$

例 1.4　用 1,2,3,4 这 4 个数字,可以写出多少个数字不重的两位数?

分析　像 11,22,…称为数字重复的两位数.数字不重的两位数,就是要求组成两位数的两个数字是不同的.这个例子实际上就是从 1,2,3,4 这 4 个数字中,每次选取两个不同的数字进行排列,求这样的排列共有多少种.

把"写出 1 个两位数"这件事分作两步.第 1 步,选取 1 个数字作为十位数字;第 2 步,再选取 1 个数字作为个位数字.第 1 步有 4 种方法(1,2,3,4 任选 1 个),不论选定哪一个,第 2 步就只有 3 种方法,因为已经选为十位数字的,不能再选为个位数字了.依据乘法原理,依次完成这两步,共有 $4\times3=12$(种)方法,也就是说,可以写出 12 个数字不重的两位数,如图 1.2 所示.

选取十位数字有4种方法	选取个位数字有3种方法	组成1个两位数共有4×3=12(种)方法
1	2	12
	3	13
	4	14
2	1	21
	3	23
	4	24
3	1	31
	2	32
	4	34
4	1	41
	2	42
	3	43

图 1.2

例 1.5　用 1,2,3,4 这 4 个数字,可以写出多少个数字不重的三位数?

分析　数字不重的三位数,就是要求组成三位数的 3 个数字都不相同.仿照例 1.4,把"写出 1 个三位数"这件事分作 3 步:第 1 步,选取 1 个数字作为百位数字;第 2 步,再选取 1 个数字作为十位数字;第 3 步,再选取 1 个数字作为个位数字.完成第 1 步、第 2 步分别有 4 种和 3 种方法,完成第 3 步只有 2 种方法,因为已经选为百位、十位数字的,不允许再选为个位数字.依据乘法原理,依次完成这三步,共有 $4\times3\times2=24$(种)方法,也就是说,可以写出 24 个数字不重的三位数,如图 1.3 所示.

从 n 个相异元素中,每次取 r 个(不重复)的排列数,用记号 A_n^r 来表示.例如,例 1.4 算出从 4 个数字中每次取 2 个的排列数共有 12 个,可以表示成

$$A_4^2=12.$$

例 1.5 算出从 4 个数字中每次取 3 个的排列数为 24 个,可以表示成

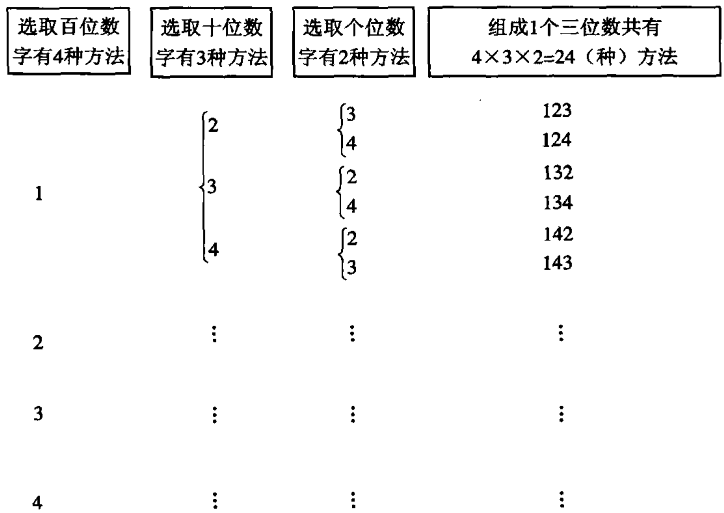

图 1.3

$A_4^3=24$.

为了叙述的简明,约定:如果没有特别的说明,就说“从 n 个元素中取 r 个的排列”即指“从 n 个相异元素中每次取 r 个(不重复)的排列”.

把上面两个例子的分析方法推广到一般,就可以得到计算 A_n^r 的公式.

设想有 r 个空位子,如图 1.4 所示.

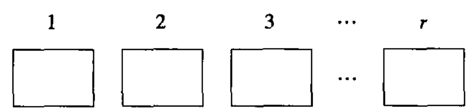

图 1.4

从 n 个相异元素中任意挑选出 r 个,放在这 r 个位子,就组成了一个排列. 这件事可以分为 r 步:第 1 步,选 1 个元素放在第 1 个位子上;第 2 步,再选定 1 个元素放在第 2 个位子上……第 r 步,再选 1 个元素放在第 r 个位子上. 依次完成了这 r 步,就组成了 1 个排列,完成这 r 步总共有多少种方法,也就是总共有多少个排列.

第 1 步,显然有 n 种选法,因为 n 个相异元素可以任选 1 个放在第 1 个位子;第 2 步,有 $n-1$ 种选法,因为除去已放在第 1 个位子的那个元素以外,剩下的 $n-1$ 个元素可以任选 1 个放在第 2 个位子;依此类推,第 3 步,有 $n-2$ 种选法;第 4 步,有 $n-3$ 种选法……第 r 步,有 $n-(r-1)=n-r+1$ 种选法. 依据乘法原理,完成这 r 个步骤共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$种方法.

由此得出,从 n 个相异元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任选出 k 个元素排成一列(每个元素不能重复选取,元素相同,次序不同也算不同的排列),这样所能得出的不同排列的种数的计算公式为

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \tag{1.3}$$

称 A_n^r 为从 n 个相异元素中任选 r 个选排列的排列数(每次不全取的排列称为选排列).

从 n 个相异元素中选 n 个的排列,又称为全排列(每次全取的排列称为全排列).这时,排列数为

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

全排列也可以用记号 $P_n = n!$ 表示,$n!$ 读作"n 的阶乘",表示 1 到 n 的连乘积.阶乘也可用记号 $\underline{n|}$ 表示.

例如:

$$2! = 2 \times 1 = 2,$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

还约定

$$0! = 1.$$

阶乘的运算,要熟悉以下的一些变形:

$$k! = k(k-1)! = k(k-1)(k-2)! = \cdots,$$

$$(k+1)k! = (k+1)!.$$

利用阶乘号,可以把全排列和选排列的公式写成如下形式:

$$P_n = A_n^n = n!, \tag{1.4}$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1.5}$$

因为

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1},$$

分子分母同乘以 $(n-r)!$,就得到

$$A_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

例 1.6　用 1,2,3,…,9 这 9 个数字,可以写出多少个数字不重的四位数?

分析　这就是求从 9 个相异元素中每次取 4 个的排列数.即

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\ 024,$$

可以写出 3 024 个数字不重的四位数.

例 1.7　计算 $A_8^5, A_{10}^6, A_m^2, A_{m+2}^{n-3}$.

解　$A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\ 720,$

$$A_{10}^6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\ 200,$$

$$A_m^2 = m(m-1),$$

$$\begin{aligned} A_{m+2}^{n-3} &= (m+2)(m+1)\cdots[(m+2)-(n-3)+1] \\ &= (m+2)(m+1)\cdots(m-n+6). \end{aligned}$$

例 1.8　把 a, b, c, d, e 这 5 个字母排成一列,有多少种排法?

解 这是5个相异元素每次全取的排列,有

$$A_5^5=5!=120(\text{种})$$

排法.

例1.9 将A、B、C、D这4本书分给甲、乙、丙、丁4名战士,有多少种不同的分法?

分析 这个问题形式上是分书,实质上是一个排列同题,可以把甲、乙、丙、丁4名战士看成4个位子,把A、B、C、D这4本书排列在4个位子上,每一种排列方法就代表一种分法.例如,

甲	乙	丙	丁
A	B	C	D
A	C	D	B
C	A	B	D
⋮	⋮	⋮	⋮

所以,这个问题实际上是求A、B、C、D这4个元素的排列数.

$$P_4=4!=24,$$

即有24种不同的分法.

例1.10 一条铁路线上有8个车站,一共需要准备多少种不同的车票?

分析 从8个车站中任意选出2个车站,比方说,甲站与乙站,则从甲站到乙站需要准备一种车票,从乙站到甲站又需准备一种车票.这就说明,不仅要考虑选哪两个车站,而且要考虑它们的顺序.所以,这个问题可以归结为从8个元素中每次取2个的排列,每一种排列就表示一种车票.故所求车票数为

$$A_8^2=8\times7=56.$$

例1.11 (1)一排5个座位,从10人中任选5人去坐,有多少种不同的坐法?(2)一排10个座位,从其中选5个分配给5人坐,有多少种不同的坐法?

分析 (1)很明显,就是把10人看成10个元素,每次取5个排列在5个座位上,每一种排列就是一种坐法.所以,一共有

$$A_{10}^5=10\times9\times8\times7\times6=30\ 240(\text{种})$$

坐法.

(2)应当把10个座位看成10个元素,从其中选5个分配给5人坐,也就是排列在5个位子上(把5个人看成5个位子).所以,也有

$$A_{10}^5=10\times9\times8\times7\times6=30\ 240(\text{种})$$

坐法.

以上3个例子说的是怎样把一个实际问题归结为一个排列问题.这里,经过一番分析、比较,需要透过现象,抓住事物的本质.通过以上例子还可知,在实际问题里,把什么看成n个元素,把什么看成r个位子,要根据具体条件进行具体分析,并不是一成不变的.

例 1.12　某班 9 人站队,(1)若班长必须站在排头,有多少种排法?(2)若班长必须站在排头或排尾,有多少种排法?

分析　(1)9 人站队,是 9 个元素的全排列,首位有特殊的要求,就是只能排班长. 为此,可以分为两步:第 1 步,考虑首位有多少种排法;第 2 步,考虑后面 8 个位子有多少种排法,然后依乘法原理相乘.

显然,首位只 1 种排法(排班长),剩下 8 人在后面 8 个位子上有 $P_8=8!$种排法,依乘法原理,总共有

$$1\cdot P_8=8!=40\ 320(\text{种})$$

排法.

(2)本题的条件是班长必须站在排头或排尾,可以分两类来考虑:第 1 类,班长站在排头,如上题所分析,这类排列有 $P_8=8!$(种)排法;第 2 类,班长站在排尾,也有 $P_8=8!$(种)排法. 把这两类排列加在一起,就是所求的排列,总共有

$$P_8+P_8=2\times 8!=80\ 640(\text{种})$$

排法.

例 1.13　将 factoring 的字母每次取 5 个排列,若规定首尾必须是元音字母,有多少种排法?

分析　9 个字母中有 3 个元音字母 a, o, i,6 个辅音字母 f, c, t, r, n, g. 5 个位子中首尾两个位子有特殊限制——必须是元音,中间 3 个位子没有特殊的限制——可排辅音,也可排元音. 为此,分以下两步来考虑.

第 1 步,考虑首尾 2 个位子有多少种排法,可从 a, o, i 这 3 个元音中任选 2 个排在首尾,有 A_3^2种排法.

第 2 步,考虑中间 3 个位子的排法,除去已排在首尾的 2 个元音之外,剩下的 7 个字母可以任选 3 个排在中间 3 个位子上,有 A_7^3种排法.

依乘法原理,总共有

$$A_3^2\cdot A_7^3=3\times 2\times 7\times 6\times 5=1\ 260(\text{种})$$

排法.

例 1.14　用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字,(1)可以写出多少个数字不重的四位奇数?(2)可以写出多少个数字不重的四位偶数?

分析　(1)四位奇数的千位数字不能是 0(只能取 1,2,3,4,5),个位数字只能取 1,3,5,中间的百位和十位则没有什么特殊限制. 因此,第 1 步,先排个位,可以从 1,3,5 这 3 个数字中任取 1 个来排,有 A_3^1种排法;第 2 步,排千位,6 个数字中除去 0 和已排在个位的那个数字以外,剩下 4 个数字可任取 1 个,有 A_4^1种排法;第 3 步,排百位和十位,除去个位和千位已排的 2 个数字以外,剩下 4 个数字可任取 2 个排,有 A_4^2种排法. 依乘法原理,总共有

$$A_3^1\cdot A_4^1\cdot A_4^2=3\times 4\times 4\times 3=144(\text{种})$$

排法.

(2) 四位偶数字的千位数字不能是0,个位数字只能取0,2,4. 仿照上题分步考虑,如个位排0,则千位可排1,2,3,4,5,有5种排法;如个位排2或4,则千位只有4种排法(如图1.5所示).

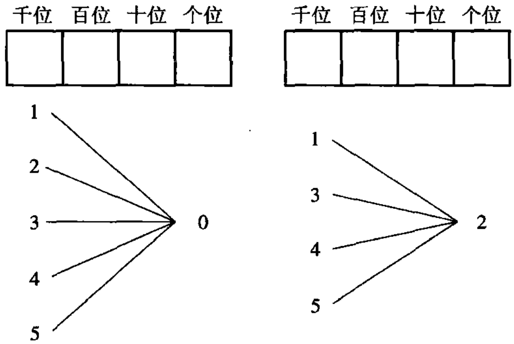

图1.5

因此,不能用乘法原理,而必须分以下两类情况考虑.

第1类,个位排0,个位只有1种排法,千位有A_5^1种排法,百位和十位有A_4^2种排法,共有$1 \cdot A_5^1 \cdot A_4^2$种排法.

第2类,个位排2或4,个位有A_2^1种排法,千位有A_4^1种排法,百位和十位有A_4^2种排法,共有$A_2^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^2$种排法.

按照加法原理,所求排列共有

$$1 \cdot A_5^1 \cdot A_4^2 + A_2^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^2 = 5 \times 4 \times 3 + 2 \times 4 \times 4 \times 3 = 156(\text{种})$$

排法,即可以写出156个数字不重的四位偶数.

例1.12、例1.13、例1.14说明,对于稍微复杂一些的排列问题,常常采用分步搭配和分类相加这两种分析方法,读者应当细心领会这两种方法的实质,防止把乘法和加法混淆(初学者是容易将两者混淆的). 此外,这些例子还说明,如果排列的某些位子上有特殊的限制,则通常是先特殊后一般,即先排有特殊限制的位子,后排其他位子.

例1.15 从0,1,2,…,9这10个数字中每次取4个排列,其中包含0的排列有多少个?

分析 直接计算比较复杂,可以从反面来考虑. 10个数字每次取4个的排列总共有A_{10}^4个,其中包括两类情况,一类包含0,一类不包含0. 不包含0的排列就是从1,2,3,…,9这9个数字中任取4个排列,有A_9^4个,所以包含0的排列有

$$A_{10}^4 - A_9^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 - 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 2\ 016(\text{个}).$$

例1.15说明在某些情况下,可以采用从反面考虑的分析方法,即从全部排列中减去不合题意的排列,就得到所求的排列数.

习题 1.2.1

1. 从 6 个数字 0,1,2,3,4,5 中每次取出 3 个来排列，则

(1) 共有多少种不同的排列？

(2) 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

(3) 在(2)中的三位数里，百位上是 1 的有多少个？

(4) 在(2)中的三位数里，百位上不是 1 的有多少个？

2. 某部队用红、绿两色信号弹，连打两发为信号，一共可以表示多少种不同的信号？

3. 从 1,2,3,…,9 这 9 个数字中取 4 个排列，要求分别符合以下条件：

(1) 其中包含 1；

(2) 其中包含两个奇数数字、两个偶数数字；

(3) 其中至少包含一个奇数数字；

(4) 其中至多包含两个偶数数字.

求各有多少种排法？

4. 数字不重复的四位数中，包含 0 的有多少个？包含 1 的有多少个？

5. 将 factoring 的字母全取排列，若要求 a, o, i 这 3 个元音字母连在一起，有多少种排法？若要求 a, o, i 这 3 个元音字母互不相邻，有多少种排法？

6. 用数字 0,1,2,3,4,5 组成数字不重复的五位数，其中

(1) 比 34521 大的有多少个？

(2) 5 的倍数有多少个？

(3) 25 的倍数有多少个？

(4) 3 的倍数有多少个？

7. 8 名海军战士进行划船训练，8 人分坐划艇两边，每边各 4 人，若要求 a, b 两人必须坐在左边，c 必须坐在右边，问 8 人在划艇上有多少种坐法？

8. 书架上有 4 本不同的英文书、3 本不同的俄文书、2 本不同的中文书，如果同文种的书必须排在一起，一共可以有多少种排列法？

1.2.2　允许重复的排列数

前面所研究的排列问题，在同一个排列里，元素是不允许重复取用的，也就是说，当从 n 个相异元素中每次取 r 个排列时，每一个元素只能取一回. 这样得到的排列中 r 个元素都是相异的.

但是，在有些实际问题中，元素是允许重复取用的. 例如，用 0,1,2,…,9 这 10 个数字来编制电话号码或电报号码，同一个数字(在同一个排列里)就允许重复取用多次，如 1322 就是把 2 重复取用两次，1111 就是把 1 重复取用四次.

从 n 个相异元素中，每次取 r 个(允许重复)的排列数，同 1.2.1 中所用的方法一