

大學叢書

射影純正幾何學

荷爾叢帶著
黃新鐸譯

國立同濟大學圖書館

登記 C7275

書碼 515.1/9418

NOV 7 1949

商務印書館發行

原 序

凡欲擴大數學研究涉及現代範圍者則對射影純正幾何之原理及方法不可不有相當之認識，爲初學計，宜述射影方法及以該法經簡易應用所得結果之概要俾對他法所未論列之幾何研究啓其興趣。本書之作其目的在予學者一研究射影幾何引人入勝之門徑及供給極易以射影方法解決之幾何材料以激勵之俾其能在通常大學生所習課程之外繼續研究也。

茲對二形射影關係所採用之定義係本諸斯陶特 (Von Staudt) 所定，蓋以此定義至爲優美且在純正幾何觀念中居最重要之地位。本書間有取材於蕊氏 (Reye) 所著之位置幾何學 (Geometrie der Lage)，而其第一部曾由著者於三十年前商得原著者同意譯成英文。本書目次多依該書，然所論內容皆加整理冀其適於教學之用。本書附述多數說明定理之例並涉論圓錐曲線之定理及其性質使對此項曲線知所研究兼以見純正幾何方法應用範圍之廣泛。少數空間圖形，如二次錐面及二次線列，順便論及，除此之外，尙有多數之三維形雖略未論列然本書對於空間觀念固始終注意也。

本書對於近世幾何其論理的基礎不擬論列，僅逕行承認通常對幾何原素所規定之性質而以最直接之方法研究之。本書取材即就此項辦法與夫廣汎的向本書編著對象之學生介紹素所鮮習之基礎二者之間斟酌損益。

本諸經驗知研究射影幾何多因所用術語及不習見的說法引起困

難。茲極力避免專門用語悉用通俗說法以解除此項障礙。術語之引用，大部分，依標準英文慣例。

射影純正幾何，或通常稱爲近世綜合幾何，其研究自近百年始。其基本定理及觀念，如調和分割，及無窮遠原素之記法昔已有之；實則尚在解析幾何之前，而多見於阿破崙 (Apollonius) 及巴普斯 (Pappus) 二氏之書。然其間經一世紀有半幾何爲新興之解析方法所支配，迄至十九世紀初純正幾何之興趣始復喚起研究者之注意焉。

此近代的復興始於芒革 (Monge, 1746-1818) 及葛聶 (Carnot, 1753-1823)，其著名之繼起人物爲彭叱雷 (Poncelet, 1788-1867)，薩利 (Chasles, 1793-1880)，斯丹納 (Stiener, 1796-1863) 及斯陶特，而其著作蓋皆純正幾何之經典也。此外復得二人，述釋諸先哲之著作爲現今學者闢一研究途徑。其一係克里摩拿 (Cremona, 1830-1903) 著有射影幾何原理 (Elementi di geometria proiettiva) 一書初版在 1873 年出版嗣於 1885 年譯成英文，其一則上文所述之蕊氏 (Reye, 1838-1919) 也。本書之編著多參考二氏之作附此並致謝忱。

著者感謝西北大學老同事現在瓦薩學院 (Vassar College) 掌教之懷蒂教授 (Professor Henry S. White) 以其早年引起著者研究之興趣近復對本稿予以校正也。

一九三〇年一月荷爾蓋蒂序於伊利諾 (Illinois) 伊宛斯頓 (Evans-ton)。

目 次

第一章 基本形 射影及截影 無窮遠原素

1.緒論	1
2.原素	1
3.基本形	2
4.射影及截影	3
5.射影幾何學研究之範圍	4
6.各基本形經射影及截影互相演變	4
7.無窮遠原素	4
8.平行線	5
9.一線上之點爲餘點所分離	6
10.一平面之無窮遠點在一直線上	7
11.空間的無窮遠點在一平面上	8

第二章 對偶原則 簡單的及完全的直線形

12.幾何形之對偶性	10
13.一平面內之對偶	11
14.空間之對偶	12
15.空間之對偶定理	13
16.基本形之對偶	14
17.初等幾何之正多面形之對偶	14
18.不同維之基本形	15

19. 直線形	16
20. 簡單的及完全的四點形及四線形	17
21. 一般的簡單及完全平面形	18
22. 簡單的及完全的平面形之射影	20

第三章 調和形

23. 相透視之直線形	22
24. 論透視三角形之笛沙格定理	22
25. 笛沙格定理之逆定理	25
26. 相透視之四點形及四線形	26
27. 一直線上之調和四點	27
28. 一調和點集之二對共軛點互成調和關係	29
29. 調和共軛點互相分離	30
30. 設一調和點集之二點重合則其中第三點將與該二點重合 ...	31
31. 兩對點耦之被同一第三對點調和分離者	32
32. 調和關係經射影及截影後不變	33
33. 完全四點形及完全四線形之調和性質	33
34. 調和關係經重排後不變	34

第四章 度量性質

35. 度量關係之緒論	37
36. 調和點所定線段之比	38
37. 度量公式	39
38. 成直角之共軛線	40

39. 正交圓於一直徑上定出調和點	41
40. 調和分離二對點耦之做法	42
41. 重比或交比	43
42. 相同四點有六不同交比	43
43. 交比經射影後不變	44
44. 交比經重排後不變	46
45. 四調和點之交比	46

第五章 成射影關係的基本形

46. 幾何基本形之射影變換	49
47. 同類基本形之相透視者	50
48. 透視形之公原素爲自對應的	51
49. 異類基本形之相透視者	51
50. 基本形之射影對應	52
51. 相射影形對應素之順序	52
52. 疊置射影形	54
53. 疊置射影形內自對應原素	54
54. 疊置射影形非重合者至多有二自對應原素	56
55. 射影形之相透視者	57
56. 使二所予點構成射影變換	59
57. 使二所予線束構成射影變換	61
58. 射影形一串透視形之首尾二形	62
59. 射影形之度量性質	62

60. 一維基本形與將原形重排過之形相射影	64
-----------------------------	----

第六章 二次曲線及線束

61. 平面內之二次形	68
62. 空間內之二次形	69
63. 母線束之中心及母點列之底爲子形之原素	71
64. 切線及切點	72
65. 二次形爲五個原素所確定	73
66. 母線束之中心及母點列之底與子形之其他原素無別	74
67. 設兩二次形有五個原素公有則該二形完全相同	77
68. 巴斯加爾定理	77
69. 應用巴斯加爾定理作一二次曲線之法	78
70. 布利安桑定理	79
71. 應用布利安桑定理做一二次線束之作法	80
72. 二次曲線之類別	80
73. 圓爲二次曲線	82
74. 相似的射影點列	82

第七章 二次直紋曲面

75. 二次形之其餘種種	86
76. 二射影點列所生出之二次線列	86
77. 二次線列之從二射影面束所生出者	87
78. 在二次直紋曲面上任一線列內任何二線皆可取爲母形之底	88
79. 線之遇三隨意線者在一二次曲面上	88

80. 切一二次直紋曲面之平面	88
81. 二次直紋曲面之截面	89
82. 從一隨意射影一二次線列之射影	89
83. 平面之切直紋曲面於其截面之點者成一二次面束	90
84. 一二次直紋曲面亦爲二班的	91
85. 二次直紋曲面之種類	91
86. 特殊性質	93

第八章 巴斯加爾定理及布利安桑定理之演繹定理

87. 巴斯加爾定理應用於內接五點形者	95
88. 布利安桑定理應用於一線束內之五線形者	96
89. 巴斯加爾定理與布利安桑定理應用於四點形, 四線形, 三角 形者	97
90. 四點形定理及四線形定理之直接證法	98
91. 一二次曲線內之四點形與一二次線束內之四線形之關係	100
92. 一二次曲線之切線成一二次線束及其對偶關係	101
93. 布利安桑定理之就一二次曲線而言者	103
94. 一二次曲線之點與切於該點之切線相射影	103
95. 一二次曲線之點與切於該點之切線其交比相等	104
96. 二次錐面與二次面束之性質	104
97. 一二次曲線爲一圓錐曲線	105
98. 錐面截面之分類	106

第九章 極點與極線論

99. 極點與極線關係之定義	109
100. 極點與極線關係爲唯一的	109
101. 極線爲從極點所引二切線其切點之弦	110
102. 求一予線之極點之作圖	110
103. 極點與極線之性質	111.
104. 一圓錐曲線內部及外部	112
105. 點與其極線之對偶的關係	113
106. 配極形	114
107. 共軛點及共軛線	115
108. 自共軛三角形	116
109. 內接四點形或外切四邊形之對頂(邊)三角形爲自共軛的	117
110. 極點與極線成射影關係	118
111. 一錐面內極點與極線之關係	118
112. 一直紋二次曲面內之極點與極線	119

第十章 極點及極線論之應用

113. 一圓錐曲線之配極形	121
114. 在非共軛線上之共軛點及過非共軛點之共軛線	121
115. 一內接三角形其邊上之共軛點	122
116. 圓錐曲線之過四點或切四線者有一公有自共軛三角形 ...	124
117. 二圓錐曲線所公有之自共軛三角形非從其公點即從其公 切線可定出之	124
118. 二相交圓錐曲線僅公有一個自共軛三角形	126

119. 二四點形有相同之對邊點者可內接於一圓錐曲線	126
120. 根據極點與極線論而作之二次變換	127
121. 過一定點之弦其中點之軌跡	129
122. 第二種的二次變換	129

第十一章 直徑與軸圓錐曲線之代數的方程式

123. 圓錐曲線直徑之定義	133
124. 一直徑之兩端	133
125. 圓錐曲線之中心	134
126. 共軛徑	134
127. 一拋物線之直徑	134
128. 一橢圓或一雙曲線之直徑	135
129. 弦之互相平分者爲直徑	135
130. 共軛徑與內接及外切平行四邊形之關係	135
131. 弦之平行於共軛徑者	136
132. 圓錐曲線之軸	136
133. 僅圓有一對以上的軸	137
134. 軸之作圖	137
135. 直角雙曲線	138
136. 二特別線束之生出一直角雙曲線者	139
137. 圓錐曲線之法線	139
138. 過一點之線其共軛法線包絡一拋物線	140
139. 僅用直尺作一圓錐曲線之圖	140

140. 線段之界於一雙曲線與二漸近線間者相等	141
141. 雙曲線之漸近線與一變動切線所構成之三角形	142
142. 以漸近線爲坐標軸之雙曲線方程式	143
143. 以一雙共軛徑爲坐標軸之有心圓錐曲線之方程式	143
144. 一拋物線之方程式	146
145. 切一拋物線之二切線被其他切線割爲成比例的四段	148

第十二章 成射影關係之二次形

146. 二次形之調和關係	151
147. 一次形與二次形相透視者	151
148. 成射影關係之二次形	153
149. 使二二次形成射影關係之法	153
150. 設二射影形有三以上之原素自對應則該二形全相同	154
151. 一次線束與圓錐曲線成射影關係者	155
152. 三次線束及三次平曲線	156
153. 三次空間曲線及三次面束	157
154. 一圓錐曲線上之射影對應	158
155. 一二次線束內之射影對應	159
156. 他種一次形或二次形內之射影對應	160
157. 特殊形式之射影對應	160
158. 重對應原素之射影對應	161
159. 週期三的循環射影對應	162
160. 週期四的循環射影對應	163

第十三章 對合論

161. 對合的定義	166
162. 一圓錐曲線上之對合	167
163. 一直線上之對合	167
164. 他種一次形或二次形內之對合	169
165. 一對合內之重素	169
166. 一直線上對合之中心	170
167. 一線之六點成對合者	171
168. 度量性質	171
169. 共軸圓	173
170. 一雙正交共軛線在任一對合束內者	175
171. 一對合在切一圓錐曲線之一切線上者	176
172. 一拋物線之正交切線	177
173. 一完全四點形之六邊爲一直線割成一對合	178
174. 成對合的點之作圖	179
175. 二自共軛三角形既內接於一圓錐曲線復外切於另一圓錐 曲線	179
176. 論內接四點形之笛沙格定理	181
177. 過四點之圓錐曲線	182
178. 一四線形之外切於一圓錐曲線者	183
179. 一完全四點形之成對對邊成正交者	185
180. 過一三角形之頂及垂心之圓錐曲線	185

181. 過一平面之四點有一直角雙曲線	185
182. 過四予點之直角雙曲線之性質	186
183. 四線所構成之四個三角形其垂心在一直線上	186
184. 從一對合之點耦所引切一圓錐曲線之切線	187
185. 一圓錐曲線之正交切線其交點之軌跡	188
186. 一橢圓或一雙曲線之準圓	189
187. 內接一圓之四點形及其外接雙曲線	190

第十四章 圓錐曲線之焦點及焦點的性質

188. 一圓錐曲線之焦點	193
189. 圓之焦點	193
190. 定一圓錐曲線焦點之法	193
191. 一橢圓或一雙曲線焦點之做圖	195
192. 一橢圓之焦點	196
193. 一雙曲線之焦點	197
194. 一拋物線之焦點	197
195. 一圓錐曲線之切線與其切點之二焦半徑交成二等角	197
196. 共焦圓錐曲線交成直角	198
197. 切一圓錐曲線之二切線與其交點之二焦半徑交成二等角	198
198. 切線及法線與焦點之關係	199
199. 一拋物線之焦點在一切線三角形之外接圓上	200
200. 一拋物線焦點之作圖	200
201. 一圓錐曲線準線之性質	201

202. 從準線上一點所引切一拋物線之二切線	201
203. 從一點所引之二切線對二等角其頂在一焦點者	201
204. 切一圓錐曲線之二切線爲一動切線所割之點從一焦點對 之射影得二等束	202
205. 三角形之外切於一拋物線者	203
206. 三角形之外切於一雙曲線者	203
207. 一圓錐曲線之離心率爲常數的	204
208. 一拋物線之離心率	205
209. 一橢圓或一雙曲線之離心率	205
210. 有心圓錐曲線之他項度量性質	206
211. 一焦點就一動切線所定反點之軌跡	207
212. 有心圓錐曲線之輔圓	208
213. 圓錐曲線正焦弦之性質	208
214. 從二焦點向一切線所引之二垂線	210

第十五章 虛原素 二次作圖題

215. 實原素與虛原素之區別	213
216. 虛原素舉例	214
217. 第二類虛原素	215
218. 虛原素之性質	216
219. 二次作圖題	217
220. 過四點之圓錐曲線之切一予線者	218
221. 作一三角形內接一所予三角形且外接他一三角形者	218

222. 一線交四予線者	220
223. 內接一圓錐曲線之三角形其邊經過定點者	221
224. 內接一圓錐曲線之三角形其邊經過同線上三固定點者 ...	222
225. 二疊置對合公有之共軛素	223
226. 一成對合的線束之一對共軛線爲二予點所調和分離者 ...	224
227. 圓錐曲線外接於一三角形且就該圓錐曲線一對合之點耦 定爲共軛極點者	325
228. 圓錐曲線之過五予點其中至少一點爲實點者	226
229. 圓錐曲線外接於一三角形且就該圓錐曲線一對合線束之 線耦定爲共軛極線者	228

第十六章 反演論

230. 就一圓而定之反演變換	232
231. 一直線形之反形	233
232. 一平面內二反形爲等角的	233
233. 互反線系	234
234. 波涉利連環	235
235. 交比經反演變換後不變	235
236. 一圓之反形	236
237. 二圓之相似心	237
238. 就一虛圓而爲之反演變換	338
239. 圓之反形爲其自身者	239
240. 圓之反演成同心圓者	239

241. 反演變換應用舉例	240
242. 空間內反演變換	242
243. 空間內反演變換爲等角的	243
244. 地圖射影法	244