“211”大学数学创新课改教材

概率论

学习指导与习题解答

戴 宁 李俊芬 李晓春 编著

科学出版社

“211”大学数学创新课改教材

概率论学习指导与习题解答

戴　宁　李俊芬　李晓春　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书为《概率论》(李少辅等编著)的配套辅导书，可供使用该教材的教师与学生作为参考，也适合广大学习概率论这门课程的数学类各专业及相关专业的学生与科研人员作为学习参考用书.

本书秉承教材《概率论》的鲜明特点，在“学习指导”中对概率论重要概念和知识体系给出进一步的解读，帮助学习者加深理解.“习题解答”部分给出原教材习题全解，对教与学都会带来很大帮助. 每章另配有“综合练习题”，便于学生检测和巩固已学的理论知识与方法.

图书在版编目(CIP)数据

概率论学习指导与习题解答/戴宁，李俊芬，李晓春编著. 一北京：科学出版社，2011.9

“211”大学数学创新课改教材

ISBN 978-7-03-032365-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①戴…②李…③李… Ⅲ.概率论一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 188670 号

责任编辑：李磊东/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1 000)

2011 年 9 月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1—3 000 字数：238 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《“211”大学数学创新课改教材》丛书编委会

前　言

本书为"211"大学数学创新课改教材《概率论》(李少辅等编著)的配套参考书. 概率论是数学系的专业基础课,也是理工、经济、管理、农医等非数学类专业的公修基础课. 作为大学阶段研究不确定随机现象的入门课程,其丰富的背景、独特的知识体系与思想方法在学生数学素养的培养中起着重要和不可替代的作用. 很多学生在这门课程的学习过程中常会产生诸多困难,主要表现即是对概率论的某些基本概念理解不深,对一些基本方法难以掌握,解题时往往会处于没思路、无从下手的状态. 目前针对公修概率论与数理统计的学习指导书较多,但适合数学系学生学习概率论的参考书却很少. 由于原教材注重将近代概率论的理论与方法引入并贯穿于初等概率论的体系中,在内容的处理上有很多新奇之处. 本书的宗旨是结合原教材为学生提供进一步的学习指导,以期增强学生对概率论的重要概念、思想方法和理论体系的理解,并通过习题详解,有效帮助他们掌握相关方法、手段和基本知识点,同时利用综合练习导引学生进行测试与总结,提高他们的理解能力与解决问题的能力.

对于本书的使用作如下说明:

(1) 每章的"学习指导"部分着重对教材中的重要概念和内容给出进一步的提示与解读,读者须结合教材认真体会,通过细节更深刻地理解基本概念与方法,注意利用其他课程如实变函数、测度论的知识,了解在近代概率论中的相应概念与初等概率论基本理论的关系,掌握完整的知识结构. 在此基础上总结和拓展,增加对概率论学习的广度和深度.

(2) "习题解答"提供了教材全部习题的详解,方便读者在学习过程中对照分析,起到释疑解难的作用. 学习数学知识最有效的方法就是上课认真听老师讲解,课后复习并及时通过习题进行练习. 而要提高解决问题的能力,则要求学习者独立思考,避免生搬硬套,利用习题解答开阔思路,反复训练和对比,熟能生巧,从而更好地掌握概率论基本概念和方法.

(3) 书中配有"综合练习题",题型多样,覆盖面全,有些是原教材内容的延伸,每题附有答案,典型练习题给出提示. 旨在满足学生的求知欲,通过练习对每章的基本内容进行梳理,同时自行检测,发现问题及时解决,以利巩固和提高读者的学习效果.

本书作者长期从事概率论教学工作,教学经验丰富,在编写过程中得到李少

辅教授、施仁杰教授及多位老师的支持和帮助，郑州大学与河南师范大学的许多学生也在教材的使用过程中，对习题的选配给出了有益建议，在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请读者和同行批评指正.

作　者
2011 年 7 月

目　　录

第1章　概率空间

§1.1　学习指导

本章的主要内容是介绍柯尔莫戈洛夫的概率论公理体系. 在学习时要掌握概率论的框架结构，即三元组$(\Omega,\mathscr{F},P)$构成的概率空间. 对于每一个具体的随机试验，要弄清什么是它的样本点与样本空间，如何表示一个事件. 进一步还要了解在这个样本空间中事件σ域如何构成以及事件的概率是按照什么法则进行计算的.

下面就一些细节问题作些说明.

(1) 古典型一节要给予适当的重视，这是因为当前高中数学教育中有古典型内容. 但不要纠缠于古典型的难题中，因为它难在组合学技巧上，对理解概率论没有太多的帮助.

为加强古典型概率的计算，本书提供了6个组合学公式，编写时我们有如下一些想法.

(a) 关于重复排列与不同球占位.

通常在讲排列组合时，只讲重复排列，不讲不同球占位. 但在习题中却有不同球占位的题目，使得学生常把n^r与r^n搞错. 事实上不同球占位不属于重复排列，它是一个独立的组合学类型. 在玻耳兹曼统计物理学中有实际应用. 我们认为这两个组合类型应该同时讲，并且为了容易区别起见，我们分别用"登记返回"模型与"投球"模型来表述之. 在实际问题中只要套用模型即可. 例如：

4个学生参加3项比赛，有多少个得冠军的方法?此问题应该用登记返回模型；

4个零件毛坯在3个车床上加工，有多少个加工方法?此问题应该用投球模型.

(b) 关于相同球占位与允许重复组合.

本书用相同球占位代替了通常的允许重复的组合. 不同球占位与相同球占位来源于苏淳的《概率论》. 相同球占位在波色-爱因斯坦统计物理学中有实际应用. 它与允许重复的组合是相同的. 但相同球占位模型简单，容易理解，只要抓住r个房间有$r-1$个"隔墙"，把相同球占位变成n个0与$r-1$个1的全排列，问题就迎刃而解. 而r个元素任取n个允许重复的组合，直观上不易与$r-1$联系起来，因而很费解.

实际上，允许重复的组合个数可以由相同球占位模型来推得. 将r个元素看成r个房间，用n个相同球投入房间中，落入每个房间的球数，表示相应元素取出的重复次数，这样一来，相同球占位与允许重复的组合建立了一一对应，两者个数相等(习题1.2.17).

允许重复组合的现实模型是:有 r 类元素,每类中的元素不加区别,且有任意多个. 现从中任取 n 个,则不同的取法有 C_{n+r-1}^{n} 个. 例如,有一箱苹果、一箱梨、一箱橘子,从中任取 10 个,不论品种,就是允许重复组合问题.

相同球占位与帕斯卡分布有着本质的联系(见本书下一章的说明),占位数的性质(习题 1.2.16) 在帕斯卡分布的再生性证明中起着重要作用(定理 4.5.7).

(2) 事件 σ 域在近代概率论中起着重要作用. 从公理体系来看,σ 域给出了事件与概率的研究范围,限定了只有 σ 域中的元素才是事件,而且只有事件才有概率,概率 P 只在 σ 域 $\mathscr{F}$ 上才有定义,并且限定了在 Ω 上定义的函数中只有关于 σ 域可测的函数才是随机变量. 但它的作用远不只此,例如,关于子 σ 域的条件期望已成为随机数学众多分支的基础.

σ 域是个集类,它的元素是 Ω 的子集,这一点对初学者来说不大习惯. 子 σ 域与生成 σ 域的概念都需要让学生了解. 在实际应用中,σ 域 $\mathscr{F}$ 代表从随机试验中获得的全部信息,子 σ 域是部分信息. 事件 A 属于某个 σ 域,是指根据该 σ 域的信息能判断事件 A 是否发生. 同样,函数 ξ 关于 σ 域 $\mathscr{F}$ 可测,也可记为 $\xi\in\mathscr{F}$. 它表示根据 σ 域的信息,可以判断 ξ 的取值. 例如,当一个人开始介入金融市场,用 $\mathscr{F}=\{\Omega,\varnothing\}$ 表示他除了知道自己准备投入的资金 x 元以外对股票的价格尚一无所知,以后他知道的股票价格信息一天天多起来. 设 $\mathscr{F}_n$ 表示直到第 n 天金融市场的信息,则

$$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_1\subset\cdots\subset\mathscr{F}_{n-1}\subset\mathscr{F}_n\subset\cdots.$$

设 S_n 表示第 n 天某种股票的价格,β_n 表示第 n 天他持有的该股票的份数,则 $S_n\in\mathscr{F}_n$,这是因为股票市场变化很快,当天的价格只有当天才知道. 而 $\beta_n\in\mathscr{F}_{n-1}$,这是因为他根据前一天股票价格的涨落情况,已对持有的该股票的份数作了调整(买入或卖出). 由此可见,研究各种各样的 σ 域,是实际问题的需要.

(3) 本书关于加法定理的讲法采用费勒的思想. 他的思想的本质是每个样本点在等式两端的"计入次数" 相等. 尽管样本点的概率负荷有大有小,事件包含的样本点个数有限或无限,但只要每个样本点在等式两端计入次数相等,则概率等式即成立.

将这个思想运用到三个事件的简单情况,就是书上的多去少补的演示,它揭示了容斥原理的本质,比用归纳法证明要好. 我们用费勒的思想证明了多个容斥原理的公式. 这些公式在最近翻译出版的概率论教科书中都出现过.

§1.2 习题解答

习题 1.1

1. 一次投掷三个硬币,写出这个试验的样本空间. 并写出下列事件:$A=$"出现两个正面";$B=$"至少出现两个正面".

解 若用1表示正面，0表示反面，则

$$\Omega=\{111,110,101,011,100,010,001,000\}.$$

其中"110"表示"前两次掷出正面，第三次掷出反面"，其他类似.

$$A=\{110,101,011\},\quad B=\{111,110,101,011\}.$$

2. 袋中有5件产品，其中有正品 a_1,a_2,a_3；次品 b_1,b_2. 从中依次取出2件产品，取后不放回. 写出这个试验的样本空间. 并写出下列事件：$A_0=$"没有取到次品"；$A_1=$"恰好取到一件次品"；$B=$"第一次取到的是次品".

解 样本空间 Ω 由下列样本点构成：

$$\begin{array}{ccccc} & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2a_1 & & a_2a_3 & a_2b_1 & a_2b_2 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & & a_3b_1 & a_3b_2 \\ b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 & & b_1b_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 & b_2b_1 & \end{array}$$

其中"a_1b_2"表示"第一次取到正品 a_1，第二次取到次品 b_2"，其他类似.

事件 $A_0=\{a_1a_2,a_1a_3,a_2a_1,a_2a_3,a_3a_1,a_3a_2\}$.

事件 $A_1=\{a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2,a_3b_1,a_3b_2,b_1a_1,b_1a_2,b_1a_3,b_2a_1,b_2a_2,b_2a_3\}$.

事件 $B=\{b_1a_1,b_1a_2,b_1a_3,b_1b_2,b_2a_1,b_2a_2,b_2a_3,b_2b_1\}$.

3. 某战士对目标进行三次射击. 用0与1分别记录每次射击时击中目标的次数，写出这个试验的样本空间. 问这些样本点出现的可能性一样吗?

解 $\Omega=\{000,001,010,100,011,101,110,111\}$. 一般说来，这些样本点出现的可能性不一样. 例如，一个没有经过训练的新战士，射击时，样本点000出现的可能性就大些，而样本点111出现的可能性就小些. 这说明有限个样本点的样本空间不一定是古典型的.

4. 在[0,1]中任取两个数，写出这个试验的样本空间. 并表示出下列两个事件：$A=$"两数之和小于1.2"，$B=$"两数之乘积小于1/4".

解 设所取的两个数为 x 与 y，则样本空间 Ω 为单位正方形. 即

$$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

事件 $A=\{(x,y):(x,y)\in\Omega,x+y<1.2\}$ 是单位正方形中直线 $x+y=1.2$ 的下方部分，如图1.1阴影部分所示.

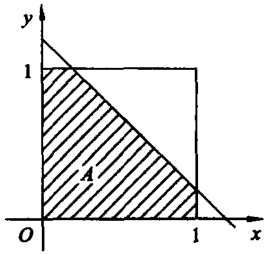

图 1.1

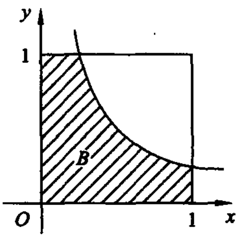

图 1.2

事件 $B=\left\{(x,y):(x,y)\in\Omega,xy<\dfrac{1}{4}\right\}$是单位正方形中双曲线 $y=\dfrac{1}{4x}$ 的下方部分，如图 1.2 阴影部分所示.

5. 对目标一直进行射击，直到命中目标为止. 写出这个试验的样本空间.

解 用 0 与 1 分别记录每次射击时击中目标的次数，则

$$\Omega=\{1,01,001,0001,\cdots\}.$$

6. 在长为 a 的线段 AB 中，随机地取两个点 Z_1,Z_2. 试写出此试验的样本空间，并写出事件 $A=$"线段 AZ_1,Z_1Z_2,Z_2B 可构成三角形".

解 用 x,y 分别表示 AZ_1,AZ_2 的长度，则

$$\Omega=\{(x,y):0<x<a,0<y<a\}.$$

用 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度，则有

$$|AZ_1|=x,\quad |Z_1Z_2|=|x-y|,\quad |Z_2B|=a-y.$$

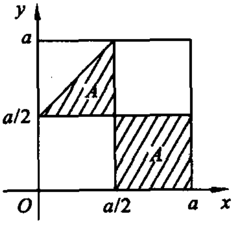

图 1.3

要构成三角形必须满足两边之和大于第三边. 若 $x>y$，则三个线段长度为 $x,x-y,a-y$. 此时它们构成三角形的条件是

$$\frac{a}{2}<x<a,\quad 0<y<\frac{a}{2}.$$

若 $x<y$，则三个线段长度为 $x,y-x,a-y$. 此时它们构成三角形的条件是

$$0<x<\frac{a}{2},\quad \frac{a}{2}<y<a,\quad y<x+\frac{a}{2}.$$

于是

$$A=\left\{(x,y):\frac{a}{2}<x<a,0<y<\frac{a}{2}\right\}\cup\left\{(x,y):0<x<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<y<x+\frac{a}{2}\right\}.$$

如图 1.3 阴影部分所示.

习题 1.2

1. 将一部五卷文集随意排在书架上，求 1,2 两卷相邻的概率.

解 将 5 本书随意排列，共有 5!种排法. 1,2 两卷相邻，可先把它们视为一本书，进行排列，然后此两本书再排列. 所以 1,2 两卷相邻的概率

$$p=\frac{2\times 4!}{5!}=\frac{2}{5}.$$

2. 从五双型号不一样的鞋中随意取出 4 只，求下列事件的概率：

$A=$“恰有一双配对”，　$B=$“至少有一双配对”.

解 从五双鞋中取出 4 只，共有 C_{10}^4 种取法. 恰有一双配对，应先从 5 双鞋中任取 1 双，然后从剩下的 4 双鞋中任取 2 双，并分别从每双鞋中取出 1 只. 所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2 2^2}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}.$$

至少有一双配对，还应加上从 5 双鞋中取出两双的取法，故

$$P(B)=\frac{C_5^1C_4^2 2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

3. 从一副扑克牌(52 张) 中任取 5 张. 求下列事件的概率：

$A=$“五张牌同一花色”；

$B=$“恰好两张牌点数相同，另外三张牌点数不同”.

解 5 张牌同一花色，可以先从四种花色中任选一种，然后从此种花色的 13 张牌中，取出 5 张. 所以

$$P(A)=\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}.$$

事件 B 的取法：从 13 个点中取出 1 个点，从这个点的 4 张牌中任取 2 张，有 $C_{13}^1C_4^2$ 种方法，然后从剩余的12个点中取3个点，并从每个点的4张牌中任取一张，有 $C_{12}^3 4^3$ 种方法，故

$$P(B)=\frac{C_{13}^1C_4^2C_{12}^3 4^3}{C_{52}^5}.$$

4. 把 12 名同学(3 名女生，9 名男生) 平分成三组. 求下列事件的概率：

(1) 3 名女生同在一组；

(2) 3 名女生各在一组.

解 把 12 名同学平分成 3 组，有$\frac{12!}{4!4!4!}$种方法，3 名女生在同一组，可以在 3 组中任选一组，然后将另外 9 个人分成 4，4，1 三个组，共有$\frac{3\times 9!}{4!4!1!}$种方法，故

$$P(A)=\frac{\frac{3\times 9!}{4!4!1!}}{\frac{12!}{4!4!4!}}=\frac{3}{55}.$$

3 名女生各在一组，选组的方法有 3!个，然后将另外 9 个人分成 3，3，3 三个组，故

$$P(B)=\frac{\frac{3!9!}{3!3!3!}}{\frac{12!}{4!4!4!}}=\frac{16}{55}.$$

5. 从 1，2，…，10 中不放回地随机抽取 5 个数. 并把它们从小到大排列，求中间的数为 4 的概率.

解 数字 4 必须取出，然后从 1，2，3 三个数字中取出两个，再从 5，6，7，8，9，10 六个数字中取出两个，将取出的五个数字从小到大排列，只有一种方法，故概率

$$p=\frac{C_3^2C_6^2}{C_{10}^5}=\frac{5}{28}.$$

6. 把 n 个 0 与 n 个 1 随机排列，求数字 1 皆不相邻的概率.

解 将 n 个 0 先排成一列，有 $n+1$ 个空隙，从中取出 n 个空隙排数字 1，故其概率为

$$p=\frac{C_{n+1}^n}{C_{2n}^n}=\frac{n+1}{C_{2n}^n}.$$

7. 将 n 个不同球投入 N 个房间中去，每个房间的球数不限，进入同一房间的球不论次序. 求：

(1) 某指定的 n 个房间各有一球的概率；

(2) 有 n 个房间，其中各有一球的概率.

若球相同，再求此两事件的概率.

解 用投球模型. 将 n 个不同球投入 N 个房间中去，共有 N^n 种方法.

(1) 某指定的 n 个房间各有一球，由于球不相同，共有 $n!$种方法，故其概率为

$$p_1=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 先从N个房间中取出n个房间，有C_N^n种方法，然后将n个不同球投到取出的n个房间中去，故其概率为

$$p_2=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

若球相同，将n个相同球投入N个房间中去，共有C_{n+N-1}^n种方法.

(1) 某指定的n个房间各有一球，由于球相同，只有1种方法，故其概率为

$$p_1=\frac{1}{C_{n+N-1}^n}=\frac{n!(N-1)!}{(n+N-1)!}.$$

(2) 先从N个房间中取出n个房间，有C_N^n种方法，然后将n个相同球投到取出的n个房间中去，故其概率为

$$p_2=\frac{C_N^n}{C_{n+N-1}^n}=\frac{N!(N-1)!}{(N-n)!(n+N-1)!}.$$

8. 将n个相同球随机地放入N个房间中，求下列事件的概率：

(1) 某个指定房间恰好有k个球；

(2) 恰好有$m(n\geqslant N-m)$个房间是空的；

(3) 某指定的m个房间恰好有k个球.

解 用相同球占位模型. 将n个相同球随机地放入N个房间中，有C_{n+N-1}^n种方法.

(1) 先将k个球投入指定的房间中，由于球相同，只有1种方法. 然后将其余$n-k$个球投到其余的$N-1$个房间中，有$C_{n-k+N-2}^{n-k}$种方法，故其概率为

$$p_1=\frac{C_{n-k+N-2}^{n-k}}{C_{n+N-1}^n}.$$

(2) 先从N个房间中取出m个房间，有C_N^m种方法. 然后将球投入到其余$N-m$个房间中，且使每一个房间不空. 有C_{n-1}^{N-m-1}种方法，故其概率为

$$p_2=\frac{C_N^m C_{n-1}^{N-m-1}}{C_{n+N-1}^n}.$$

(3) 先将k个球投入指定的m个房间中，再将其余球投入到其余房间中，故其概率为

$$p_3=\frac{C_{m+k-1}^k C_{n-k+N-m-1}^{n-k}}{C_{n+N-1}^n}.$$

9. 设有 n 件产品，其中有 r 件次品. 从中依次抽出 $k(k \geqslant r)$ 个进行检查. 试求第 k 次抽出最后一件次品的概率.

解 若第 k 次恰好抽出最后一件次品，则应先从 r 件次品中取出一件作为第 k 次抽出的次品，其余 $r-1$ 件次品应在 k 次之前全部抽出. 除此之外，还应再抽取 $(k-1)-(r-1)=k-r$ 件合格品，然后再将 $k-r$ 件合格品与 $r-1$ 件次品合在一起进行全排列. 于是共有样本点 $C_r^1 C_{n-k}^{k-r}(k-1)!$ 个，故其概率为

$$p=\frac{rC_{n-k}^{k-r}(k-1)!}{A_n^k}=\frac{r(k-1)!(n-r)!}{n!(k-r)!}.$$

10. 从 n 双不同型号的鞋子中任取 $2r$ 只 $(2r \leqslant n)$，求下列事件的概率：

(1) 取出的鞋皆不成对；

(2) 只有一双鞋成对；

(3) 恰有两双鞋成对；

(4) r 双鞋皆成对.

解 同第 2 题的分析方法. 各事件的概率为

(1) $p_1=\dfrac{C_n^{2r}2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$；

(2) $p_2=\dfrac{nC_{n-1}^{2(r-1)}2^{2(r-1)}}{C_{2n}^{2r}}$；

(3) $p_3=\dfrac{n(n-1)C_{n-2}^{2(r-2)}2^{2r-5}}{C_{2n}^{2r}}$；

(4) $p_4=\dfrac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$.

11. 从数 $1,2,\cdots,N$ 中不重复地任取 n 个数 $(n \leqslant N)$，按大小排成 $x_1<x_2<\cdots<x_n$. 求 $x_m=M(m \leqslant M \leqslant N)$ 的概率.

解 从数 $1,2,\cdots,N$ 任取 n 个数，按大小排列，共有 C_N^n 种方法. 若 $x_m=M$，则要从前 $M-1$ 个数中，取出 $m-1$ 个，按大小排列，有 C_{M-1}^{m-1} 种方法. 再从后 $N-M$ 个数中取出 $n-m$ 个，按大小排列，有 C_{N-M}^{n-m} 种方法. 所以所求的概率为

$$p=\frac{C_{M-1}^{m-1}C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

12. 设袋中有 n 个球，分别标有号码 $1,2,\cdots,n$. 今从袋子中不放回地摸出 k 个球，求摸出的最大号码等于 $m(k<m<n)$ 的概率. 若摸后放回，再求该事件的概率.

解 先考虑不放回的情况. 从 n 个球中依次取出 k 个球，有 A_n^k 种方法. 在 k 次摸球中，必有一次摸出 m 号码的球，此次摸球可以在 k 次摸球的任何一次发生，有 k

种方法. 其余 $k-1$ 次，要从 $m-1$ 个球中摸球. 有 A_{m-1}^{k-1} 种方法，故所求的概率为

$$p_1=\frac{kA_{m-1}^{k-1}}{A_n^k}=\frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_n^k}.$$

若摸后放回，从 n 个球中依次取出 k 个球，有 n^k 种方法. 先在号码 $\leqslant m$ 的球中，摸出 k 个球，有 m^k 种方法. 但要去掉没有最大号码 m 的取法，故所求的概率为

$$p_2=\frac{m^k-(m-1)^k}{n^k}.$$

13. n 个人随机地坐在一排有 $N(n<N/2)$ 个椅子的座位上. 求每个人皆不相邻的概率.

解 由于只关心 n 个人是否相邻，只需取出 n 个座位不相邻即可. 在 N 个座位中，取出 n 个座位有 C_N^n 种不同的方法. 而座位不相邻的取法有 C_{N-n+1}^n 种方法(见19题)，故所求的概率为

$$p=\frac{C_{N-n+1}^n}{C_N^n}.$$

14. (游程) 一个元素接连出现形成的序列称为游程. 例如，$aaabbabbbaa$ 中，有三个 a 游程，它们是 aaa，a，aa. 有两个 b 游程：bb，bbb. 我们称该序列共有5个游程. 现有 n 个 a 与 m 个 b，当它们随意排列时，求下列事件的概率：

(1) 有 r 个 a 游程的概率 $(r<n, r<m)$.

(2) 共有 $2r$ 个游程的概率 $(r<n, r<m)$.

(3) 共有 $2r+1$ 个游程的概率 $(r<n, r<m)$.

解 n 个 a 与 m 个 b 随意排列，有 C_{n+m}^n 种方法.

(1) 若有 r 个 a 游程，可以先将 m 个 b 排成一列，则在 $m+1$ 个空隙中挑出 r 个空隙(有 C_{m+1}^r 种选法) 放置 a，同时要求每个位置不空(有 C_{n-1}^{r-1} 种放法)，故

$$p_1=\frac{C_{m+1}^r C_{n-1}^{r-1}}{C_{n+m}^n}.$$

(2) 若要求有 $2r$ 个游程，则必有 r 个 a 游程和 r 个 b 游程，它们相间排列，有两种情况. 又由于每个游程不能是空的，因此，需把 n 个 a 放在 r 个 a 游程中，且使每个游程不空. 对 b 游程也是如此，故所求的概率为

$$p_2=\frac{2C_{n-1}^{r-1}C_{m-1}^{r-1}}{C_{n+m}^n}.$$

(3) 若有 $2r+1$ 个游程，则必有 $r+1$ 个 a 游程和 r 个 b 游程，或者有 $r+1$ 个