

刘兴汉 主编

中学 数学 自学 解难

ZHONGXUESHUXUEZIXUEJIANAN

上册



刘兴汉 主编

中学 数学 自学 解难

ZHONGXUESHUXUEZIXUEJIEJIAN

上册



主 编 刘兴汉

编写人员 (按编写顺序排列)

丁复兴	何成保	刘秦川	任万库	王永恕
满向东	赫爱英	孙慧玲	谢茂才	王振厚
付 荣	马文卿	陈国权	王淑媛	段明俊

中学数学自学解难

上 册

刘兴汉 主 编

*

内蒙古人民出版社出版发行

(呼和浩特市新城西街 82 号)

内蒙古新华书店经销 内蒙古新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 24.375 字数: 524 千 插页: 2

1989 年 12 月第一版 1990 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1—1,855 册

ISBN 7-204-00420-5/G·32 每 册: 7.20 元

编者的话

为了提高社会青年和中学生学习中学数学的效率，方便教师的教学，使学生加深对基础知识和基本技能的理解和掌握。我们组织部分高级教师和老师编写了《中学数学自学解难》。

在编写过程中，我们立意试图打开读者的思路、开拓视野、解决学习中的疑难问题；在归纳知识内容时尽量做到简明扼要、重点突出、排难解疑、纵横串联；在选择例题时，力求做到具有典型性、综合性、多解性；对一些较难的题目有解题思路的分析，有易错之处的注解；在选配习题时，力争知识的复盖面要宽，解题技巧多种多样，力戒编入偏题、怪题。为了将所学的数学知识引向深入，掌握得更加扎实，在部分章节后边选有复习题，综合训练题，全书最后有总复习。

本书分上、下两册，为了便于读者与现行中学教材对照学习，本册书的章、节编排基本上与现行教材一致。其中一至四章由丁复兴编写、五至八章由何成保编写、九至十二章由刘秦川编写、十三至十六章由任万库编写、十七至二十一章由王永恕编写、二十二至二十四章由满向东、赫爱英、孙慧玲编写、二十五至二十七章由谢茂才编写、二十八至三十二章由王振厚编写、三十三至三十四章由付荣、马文卿编写、三十五至三十七章由陈国权编写、三十八至四十一章

白王淑媛编写、四十二至四十五章由段明俊编写。最后由刘兴汉同志审定。

由于编写时间仓促，编者水平所限，不足之处敬请批评指正。

《中学数学自学解难》编写组

目 录

第一章	有理数	(1)
一	有理数的意义	(1)
二	有理数的加法和减法	(7)
三	有理数的乘法和除法	(13)
四	有理数的乘方	(20)
第二章	整式的加减	(33)
一	整式	(33)
二	整式的加减	(43)
第三章	一元一次方程	(53)
一	一元一次方程及其解法	(53)
二	一元一次方程的应用	(66)
第四章	一元一次不等式	(94)
一	不等式与不等式的解	(94)
二	一元一次不等式及其解法	(103)
第五章	二元一次方程组	(114)
一	二元一次方程组	(114)
二	二元一次方程组的应用	(122)
第六章	整式的乘除	(131)
一	整式的乘法	(131)
二	乘法公式	(138)
三	整式的除法	(143)

第七章	因式分解	(156)
一	因式分解、提公因式法	(156)
二	运用公式法	(166)
三	可化为 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三项式的因式分解分组解法	(181)
第八章	分式	(197)
一	分式的基本性质和分式的乘除法	(197)
二	分式的加减法、繁分式	(214)
三	分式方程及其应用	(226)
第九章	数的开方	(245)
一	开平方	(245)
二	开立方	(252)
附录	平方根的笔算求法	(262)
第十章	二次根式	(269)
一	二次根式的性质	(269)
二	二次根式的运算	(283)
第十一章	一元二次方程	(300)
一	一元二次方程	(300)
二	列方程解应用题	(312)
三	一元二次方程根与系数的关系	(321)
四	可化为一元二次方程的方程	(336)
五	简单的二元二次方程组	(348)
第十二章	指数	(365)
第十三章	常用对数	(378)
一	对数	(378)
二	常用对数	(386)

第十四章 函数及其图象	(397)
一 直角坐标系	(397)
二 函数	(406)
三 正比例和反比例函数	(415)
四 一次函数	(419)
五 二次函数	(427)
六 一元一次不等式组和一元二次不等式	(451)
第十五章 解三角形	(458)
一 三角函数	(458)
二 解直角三角形	(473)
三 解斜三角形	(480)
第十六章 统计初步	(500)
代数综合练习题	(506)
第十七章 平面几何中的基本概念	(513)
一 直线、射线、线段	(513)
二 角	(518)
第十八章 相交线与平行线	(525)
一 相交线、垂线	(525)
二 平行线	(530)
三 命题、定理、证明	(534)
第十九章 三角形	(545)
一 三角形	(545)
二 全等三角形	(552)
三 等腰三角形	(559)
四 基本作图	(565)
五 直角三角形	(568)

六 逆定理、对称	(575)
第二十章 四边形	(592)
一 多边形	(592)
二 平行四边形	(594)
三 梯形	(610)
第二十一章 面积、勾股定理	(626)
一 面积	(627)
二 勾股定理	(631)
第二十二章 相似形	(639)
一 比例和比例线段	(639)
二 比例线段的有关定理	(650)
三 相似三角形的判定	(663)
四 相似三角形的性质	(679)
第二十三章 圆	(691)
一 圆的基本性质	(691)
二 直线和圆的位置关系	(706)
三 圆和圆的位置关系	(724)
四 正多边形和圆	(735)
五 点的轨迹	(746)
第二十四章 平面几何的综合训练	(752)
一 一题多解	(752)
二 综合题	(761)
三 运用代数或三角法解几何题	(767)
综合训练题	(770)

第一章 有理数

一 有理数的意义

算术中所学过的自然数、分数等，只能表示量的数值大小，而不能表示具有相反意义的量，这是由算术过渡到代数的一个关键。

正确地理解有理数，特别是负数的意义，对有理数的运算将起到重要的作用。

1. 相反意义的量 通过实例明确“相反意义的量”的实际含义。例如，零上温度与零下温度；上升与下降；收入与支出；现存与亏损等。

另外也要注意在同一问题中，会出现两组相反意义的量。例如，我们不但要考虑到零上温度与零下温度是具有相反意义的量，同时又要注意到上升温度与下降温度又是一组具有相反意义的量。

2. 负数 用负数来表示具有相反意义的量是本节的重点。

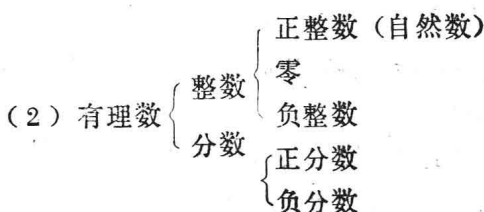
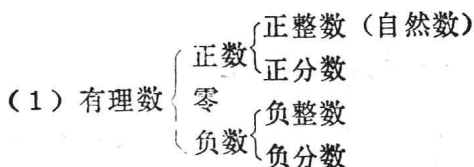
(1) 凡是具有相反意义的量，如果把其中一个意义的量规定为正的，那么和这个意义相反的量即为负的。

(2) 表示正量与负量的符号“+”与“-”是性质符号与表示加法与减法的运算符号“+”“-”不同。

(3) 零既不是正数，也不是负数，而是中性数。

3. 有理数 负数的引进 将数的概念得到扩展。正数、零、负数统称有理数。有理数是用来表示具有相反意义的量的数。

有理数可用以下两种方法分类：



4. 数轴 规定了原点、正方向和单位长度用来表示数的直线叫做数轴。

(1) 原点、正方向、单位长度是构成数轴的三个要素。

(2) 原点表示数零。

(3) 任何正数都可用数轴上原点右边一个点表示；任何负数都可用数轴上原点左边一个点表示。

(4) 有理数都可用数轴上唯一的点表示。

5. 相反数

(1) 只有符号不同的两个数，我们说其中一个是另一个

的相反数。

一定要注意，+ 6 和 - 6 是互为相反数，如果只说 + 6 是相反数是错误的。

(2) 零的相反数是零。

(3) 相反数也可以用绝对值概念定义：

绝对值相同，符号相反的两个数叫做互为相反数。

6. 绝对值 正确理解绝对值的概念是本节重点。

(1) 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。这三句话是绝对值定义三个方面，缺一不可，一定要记熟。

设 a 是一有理数，则定义也可写为

$$|a| = \begin{cases} a (a > 0) \\ 0 \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

(2) 为了加深对绝对值概念的理解。也可在数轴上定义为：一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离。

(3) 互为相反数的绝对值相等。

7. 有理数大小的比较

(1) 记清有理数在数轴上表示的位置有助于形象地比较有理数的大小。

(2) 如果用 a 表示有理数，则 $a > 0$ 表示 a 是正数； $a < 0$ 表示 a 为负数。

例 1 下面的叙述为什么不对？错误的原因是什么？

① 有理数就是负数。

② 正数、负数就是有理数。

③ 自然数就是整数。

解

①有理数是正数、负数、零的统称。其错误原因就在于，因有理数定义是在引入负数后给出的，因此误认为有理数就是负数，没有将部分与整体关系搞清楚。

②零也是有理数。没有搞清零在有理数中地位，零不是正数，也不是负数，但是有理数。

③整数包括正整数、零、负整数，而自然数只是正整数，即只是整数的一部分，将自然数与整数等同是错误的。原因是未搞清楚它们的所属关系。

例2 写出绝对值小于等于4的整数，并用数轴表示。再有没有绝对值小于4的有理数了，举例说明。

解 绝对值小于等于4的整数有-4、-3、-2、-1、0、+1、+2、+3、+4。

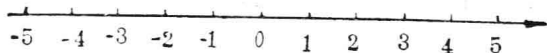


图1-1

绝对值小于4的有理数还有并且有无数多个，例如 $+\frac{1}{2}$ 、 $-3\frac{1}{2}$ 等等。

例3 比较 $-\frac{6}{7}$ 和 $-|-\frac{7}{8}|$ 的大小

分析 因为 $-|-\frac{7}{8}| = -\frac{7}{8}$ 因此只需比较 $-\frac{6}{7}$ 和

$-\frac{7}{8}$ 的大小，而两负数比较大小就要先看其绝对值的大小。

$$\text{解 } \because \left| -\frac{6}{7} \right| = \frac{6}{7} = \frac{48}{56},$$

$$\left| -\frac{7}{8} \right| = \frac{7}{8} = \frac{49}{56}.$$

$$\text{又 } \because \frac{48}{56} < \frac{49}{56},$$

$$\therefore -\frac{6}{7} > -\left| -\frac{7}{8} \right|.$$

例 4 一个数是否可能①小于自己的绝对值？②等于自己的绝对值？③大于自己的绝对值？举例说明。

解 ①可能，例如 $|-4| = 4$ ，而 $-4 < |-4|$ 。

②可能，例如 $|+4| = 4$ ，而 $+4 = 4$ 。

③不可能，不论该数是正数、负数或零均不可能大于其绝对值。

例 5 如果

① $|x| = 5$ ；② $|x| > 5$ ；③ $|x| < 5$ ；那么，表示 x 的点在数轴上的什么地方？

解

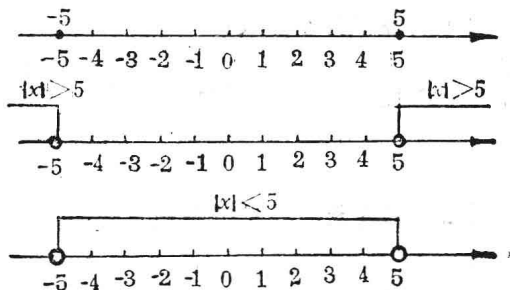


图 1-2

例6 已知 $|m| = |n|$ ，能够断定 $m = n$ 吗？为什么？

解 ①当 m 与 n 为同号或零时，

如 $|+3| = |+3|$ 或 $|-3| = |-3|$ ，则 $m = n$ 。

②当 m 与 n 为异号时，

如 $|+3| = |-3|$ ，则 $m \neq n$ 。

所以，当 $|m| = |n|$ 时不一定能断定 $m = n$ 。

习 题 一

A 组

1. 说明下面一些话的意义

①温度上升了摄氏 -2° ；

②一条河的水位上午涨25厘米，下午涨 -10 厘米。

2. 零是自然数吗？是正数吗？是整数吗？

3. 写出绝对值小于6的整数所组成的集合；正整数集合。

4. 比较下列各组数的大小，用“ $<$ ”连接。

① $-(-4\frac{2}{3})$ 与 $-|-3\frac{1}{3}|$ ；

② $-\frac{5}{6}$ 和 $-|-\frac{6}{7}|$ 。

5. 写出下列各数的相反数：

$\frac{2}{7}$ ， $-2\frac{1}{12}$ ， -3 ， $+14$ ， -0.12 ， $+\frac{5}{7}$ 。

B 组

1. 写出下列各数的绝对值和相反数：

-7 ， $-\frac{1}{5}$ ， -0.04 ， a ， $-a$ 。

2. 0是最小的有理数吗？是最小的整数吗？有没有最小

的有理数？有没有最小的整数？

3. 写出绝对值大于6而小于15的非负整数；整数。

4. 已知 $|m| > |n|$ ，能够断定 $m > n$ 吗？

5. 已知 $m < n$ ，能够断定 $|m| < |n|$ 吗？

6. 求出绝对值不小于2而又不大于5的所有整数。

7. 比较下列各组数的大小，用“ $<$ ”连接。

① $-(+6.32)$ 与 $-|-6\frac{3}{8}|$ ；

② $-2\frac{13}{20}$ ， $-2\frac{7}{10}$ 和 $-2\frac{4}{5}$ 。

二 有理数的加法和减法

有理数的运算必须掌握运算法则，定律和性质，并能够应用它们熟练地进行运算。有理数运算，既要注意到符号，又要考虑到绝对值，这样才能保证运算的正确无误。

1. 有理数的加法 有理数加法是有理数运算的重点，运算法则由加数的符号不同可分以下类型：

(1) 同号两数相加

① 两个正数相加；

② 两个负数相加。

(2) 异号两数相加

① 一个正数与一个负数相加；

② 相反的两数相加。

(3) 一个数同零相加

① 一个正数同零相加；

② 一个负数同零相加。

运算法则可归纳为：同号相加符号不变；异号相加符号

从大。

2. 有理数减法法则 有理数减法是有理数加法的逆运算。从减法定义可直接推导出有理数减法法则。

减去一个数，等于加上这个数的相反数。

减法法则可归纳为：减正等于加负，减负等于加正，将有理数减法转化为有理数加法。

算术里加法运算永远是可能的，减法运算不一定可能，而现在引入负数，有理数运算均可归结为加法运算，所以减法运算在有理数中是永远可能的。

3. 代数和 加数是正数，负数或零的和称代数和，由此可以把加减法统一写成加法的式子。因此代数和的概念把有理数的加法与有理数的减法统一为一种运算。

例1 存款与负债怎样用有理数表示？增加存款和减少存款的实际意义各是什么？增加负债和减少负债的实际意义各是什么？

解 ①存款与负债是具有相反意义的量。如将存款规定为正的，那么负债即为负的。

②增加存款就是加上正数，减少存款就是减去正数。

③增加负债就是加上负数，减少负债就是减去负数。

注 由例1中②、③两问可总结出有理数运算的规律，从经济的收益来考虑，增加存款与减少负债是一致的，也就是说，“减去负数，等于加上正数”的减法法则是合理的。同理减少存款与增加负债是一致的，也就是说，“减去正数等于加上负数”的减法法则是合理的。这样我们对“减去负数结果反而增加”的道理就容易理解了。

例2 粮食仓库第一天运进小麦504包，第二天运进493