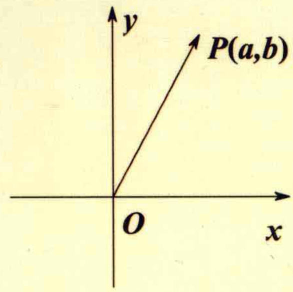
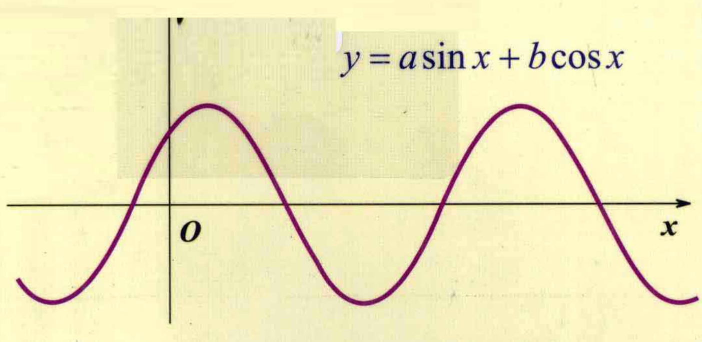
ZHONGXUE SHUXUE JIETI XUEXI



中学数学解题学习

汤炳兴　叶红　编著



化学工业出版社

ZHONGXUE SHUXUE JIETI XUEXI

中学数学

解题学习

◉ 汤炳兴　叶红　编著

化学工业出版社

·北京·

本书从数学解题学习的角度去考察中学数学解题，以“解题”为载体，以“学习”为目标，首先概述数学题与数学解题、简述数学解题学习过程，然后针对目前数学解题教学、学习中存在的问题着重探究在数学解题学习过程中如何学会科学地思考问题，如何使学生深化数学的思想方法，培养科学思维品质，提升科学思维能力，最后探究了如何在数学解题过程中提炼数学的思想方法.

本书可作为高等师范院校本科生使用的教材或参考书，也可作为中学数学教师自修和进行教学的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

中学数学解题学习/汤炳兴，叶红编著. —北京：化学工业出版社，2010.12

ISBN 978-7-122-09851-1

Ⅰ.中… Ⅱ.①汤…②叶… Ⅲ.数学-中学-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 216033 号

责任编辑：曾照华　　文字编辑：冯国庆
责任校对：王素芹　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京永鑫印刷有限责任公司
装　　订：三河万龙印装有限公司
787mm×1092mm　1/16　印张 11　字数 264 千字　2011 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00 元

前言

解题，往往能有效地调动学生的数学学习积极性，促进学生建立数学知识之间的有机联系，深化数学的思想方法，学会用数学的思考方式解决问题、认识世界，培养元认知能力。解题学习是数学学习的一种重要学习形式，对巩固知识、培养素质、发展能力和促进个性心理发展都具有极其重要的作用和意义。

笔者在长期的中学数学教学和高师数学教育学、数学解题研究教学中发现，目前的中学数学教学中依然偏重于知识教学，偏重于通过积累解题经验来提高解题能力，在科学思维、元认知能力培养等方面重视不够，也缺少方法。学生的数学解题依然以“布朗运动”式的探索为主，科学思维能力不强，如不会观察数学问题，不会分析，不知如何去类比。

《普通高中数学课程标准（实验）》指出，提高学生的数学思维能力是数学教育的基本目标之一。那么，如何提高学生的思维能力呢？

我们认为，从数学解题学习的角度去考察中学数学解题，是中学数学教学研究的重要课题。其一，如何通过数学解题学习促进数学基础知识与基本技能的学习，深化数学思想方法，建立数学知识之间的有机联系。其二，如何通过数学解题提升学生的科学思维能力，在数学解题学习过程中逐步学会观察、试验、分析、综合、归纳、类比、联想、猜想等，使学生表达清晰、思考有条理，学会用数学的思考方式解决问题、认识世界。其三，如何通过数学解题学习，培养和提高学生的元认知意识与能力，在解题学习过程中，逐步学会反思，提高自我监控能力。

本书试图以“解题”为载体，以“学习”为目标，以数学解题过程学习为主要研究对象，探索如何在中学数学解题过程中使学生深化数学的思想方法，培养科学思维品质，提升科学思维能力。

为此，本书的框架为：首先，概述数学题与数学解题，希望读者对数学题与数学解题有一个比较清晰的了解。其次，结合近年来心理学、教育学、数学教育学对数学解题的研究，简述数学解题学习过程。第三，也是本书的重点，分三章，分别从怎样弄清问题、如何探索解题途径和反思、自我监控能力的培养等方面探讨中学数学解题过程学习，在学习波利亚的“怎样解题表”的基础上，试图更深入地探索如何引导学生进行数学解题学习，如在弄清问题方面如何学会观察、挖掘隐含条件、合理表征问题，从而逐步培养科学思维品质，提升科学思维能力。最后是数学解题方法学习，重点放在解题思想方法的提炼。

中学数学解题在中学数学教学、学习中所占的比例是有目共睹的。在数学解题过程中学生究竟学到了什么？能学到什么？笔者觉得这一课题的探究是十分有意义的，也是很有趣的。但笔者限于水平，对数学解题学习的认识很肤浅，又由于数学解题学习涉及数学、心理学、教育学等多学科的知识，本书的探究只是一个尝试，所做的工作还很粗糙，其意图主要

在于引起大家对这一课题的关注，引起中学数学教学研究者、教学工作者、学习者从数学解题学习的角度系统地去探讨中学数学解题学习，让数学解题在数学学习、科学思维培养等方面发挥更大的积极作用。

诚望读者热诚指正书中存在问题。

编者

2010 年 10 月 30 日

目录

第一章　数学题概述

波利亚在其名著《数学与发现》第一卷的序言中指出："解一个问题就是意味着从困难中去找出一条越过障碍的路，使我们能够达到一个不易即时达到的目标．解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动．"

数学学习离不开数学解题，已成为大家的共识．然而，数学学习中，不少学生一接触到题，立刻就开始做解题的某种尝试，在解题的探索过程中，往往表现出"布朗运动"，无目的地试，瞎碰瞎撞，偶然撞准了，找到了正确的解法，觉得运气好．倘若一试再试，没撞准路子，就认为运气不好或说这种类型的题老师没教过．甚至有的学生连题目的意思都没弄清楚，就在尝试着解题探索，遇到叙述长一点的题，也就不知道怎样去分析．许多学生依赖于多做，多练，通过熟能生巧来提高解题能力，这样，容易陷入题海战术，势必加重学习负担，降低学习效率，导致高分低能（能熟练地求解老师讲解过的题，但不能也不愿去探索那些具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的、比较陌生的题）．

怎样激发自身应对挑战的热情、提升解决问题的能力？怎样提高学习效率、提高学习质量？这就要求我们的数学解题应当从"布朗运动"式的探索走向理性的、比较有序的探索，数学解题学习也应当从"布朗运动"式的盲目学习走向科学的解题学习．因此，我们有必要首先对数学题、数学题的结构、数学题的类型、数学题是怎样设计的等有一个比较清晰的认识，由此帮助我们在解题、解题学习中进行有效的探索与求解．

通过本章的学习，希望读者能够：

① 对数学题、数学题的结构有一个比较清晰的认识；

② 了解数学题的常见题型；

③ 了解数学题是怎样设计的．

由此，使我们更好地认识问题、分析问题，增强数学问题意识．

第一节　题和数学题

一、题

"题"是"问题"的简称，不同的学科领域对"问题"有不同的界定．美国信息加工心理学家纽厄尔与西蒙认为问题是一种情境：个体想要做某件事，但又不能马上知道做这件事所需采取的一系列行动．根据他们的观点，问题分主、客观两个方面，任务领域，即问题的陈述，是客观的；个体对任务领域的理解，即对陈述的理解，也称问题空间，是主观的．因

此问题相对于个体，它决定于个体对陈述的理解．从系统论的角度看，如果对某人来说，一个系统的全部元素、元素的性质和元素间的关系，都是他所知道的，那么这个系统对于他就是一个稳定系统，如果这个系统中至少有一个元素、性质和关系是他所不知道的，那么这个系统就是一个问题.

良好问题应该具有以下特征：①问题状态是清晰、简洁的；②问题状态的描述是通过直观的、有意义的符号表现的；③问题有一定的难度，但是可以解答——有挑战性，而并非不可能解答；④被试的解答可以评价为正确的或者错误的；⑤对问题的回答与具有的知识有联系．也就是说，一个良好的问题应具有智力挑战性、待解性、情境性的特征.

二、数学题

1. 数学题的结构

数学题（简称题）是指数学上要求回答或解释的题目，需要研究或解决的矛盾．根据信息加工理论的观点，数学问题由初始状态、终结状态、解和解题基础四个要素构成系统（图 1-1).

$$\begin{tikzcd}
\text{初始状态} \arrow[r] & \text{解} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \text{终结状态} \\
& \text{解题基础} \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

图 1-1 数学问题系统图示

不同个体对初始状态、终结状态和解题基础的理解或知晓程度不同．当三者都为个体知晓，系统相对个体是稳定系统，不成为问题；三者至少有一个不为个体知晓，系统相对于个体是不稳定系统而成为问题．三者知晓得越少，系统越不稳定，意味着问题的难度越大.

2. 作为“数学学习”的数学练习题

在数学教学中，数学题是指为实现教学目标而要求师生解答的问题系统．以数学为内容，或者虽不以数学为内容，但必须运用数学知识或数学思想方法才能解决的习题称为数学习题．如数学课中教师提问的题、例题、练习题和测验题，数学课堂外教师要求学生演练、研究的题和在实际生活中调查、探索的题，都是数学习题.

在传统的数学教学中，其数学题往往具有接受性、封闭性和确定性的特征．学生通过对教材的简单模仿和操作练习，基本就能完成．其结构是常规的，答案确定、条件不多不少，可以按照现成的公式或常规的思路获得解决，主要目的在于巩固数学基础知识与基本技能．这类题目可以称为“练习题”(exercise).

罗增儒教授在《中学数学解题的理论与实践》一书中指出，提高解题效率、获得解题成功，都必须下决心、花大力气做到 3 个基本要求：①熟练掌握数学基础知识的体系；②深刻理解数学概念，准确掌握数学定理公式和法则；③熟悉基本的逻辑规则和常用的解题方法，积累不断涌现的数学技巧．数学练习题对深化理解数学基础知识，熟练数学基本技能有着积极的意义，因此，达到这三个基本要求，就应当重视数学练习题，通过形式多样的变式练习，使学生从不同角度深刻理解数学基础知识，熟练数学基本技能，积累数学活动经验，逐步形成数学的思想方法.

3. 作为“问题解决”的数学题

作为数学教育口号的“问题解决”，对问题的障碍性和探究性提出了较高的要求．波利

亚将问题理解为“有意识地寻求某一适当的行动，以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的，解决问题是寻找这种活动．”1986 年第 6 届国际数学教育大会的一份报告指出：“一个（数学）问题是一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的尚未解决的情境．”这类题目可以称为“问题”（problem）．这里所强调的是，从初始状态到目标状态之间的障碍，由现有水平到客观需要之间的矛盾，正是问题的实质.

一个好的数学问题应该具有下面标准的某些方面.

① 具有较强的探究性，它要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造性.

② 问题具有一定的现实意义或与学生的实际生活有着直接的联系，有趣味的魅力.

③ 问题具有多种不同的解法或多种不同的解答，即开放性.

④ 问题具有一定的发展余地，可以推广或扩充到各种情形.

⑤ 问题具有一定的启示意义，蕴涵重要的数学思想方法．也就是说，不仅问题本身有价值，而且解决问题所涉及的思维模式也同样有价值.

⑥ 问题的表述应当简单易懂，容易接近，即问题解决入口处不需要多少形式的背景、特殊的知识和方法.

中学数学教学肩负着学生学习数学基础知识和基本技能、培养思维、提高能力的任务．因此，作为中学数学教学的数学题，无论在形式上，还是在内容上，都应丰富多彩，既要有丰富的练习题（exercise)，以此使学生更好地巩固和深化理解数学的基础知识，熟练数学的基本技能；也应有一定数量的挑战思维的探究题、能力题，以培养学生的思维，深化数学的思想方法；还应有一些开放性题、应用题等，以培养学生的创新意识、用数学意识等.

第二节　数学题的常见题型

按照不同的要求，根据不同的标准，数学题可以分为不同的类型．如按照评卷给分是否客观，将数学题分为客观性题和主观性题；按照题目的要求分类，可以把数学题分为计算题、证明题、作图题和轨迹题等．目前，“中考”、“高考”中，主要有选择题、填空题、解答题三种题型．熟悉、了解这些常见题型的结构、特点和作用，对于数学教学、数学学习有着重要的意义.

1. 选择题

选择题是数学教学中的一种基本题型，它是由是非题发展而来的.

(1) 是非题

是非题又称判断题，一般是给出一个数学命题，要求判定其真假．是非题多数是关于概念或性质的辨析.

【例 1】 判断下列命题是非正确，正确的在括号内填“√”，错误的填“×”.

① 对于不重合的两个平面 α 与 β，如果存在平面 γ，使得 α、β 都垂直于 γ. 那么，平面 $\alpha//$平面 β. ……………………………………………………………（　　）

② 对于不重合的两个平面 α 与 β，如果存在平面 γ，使得 α、β 都平行于 γ，那么，平面 $\alpha//$平面 β. ……………………………………………………………（　　）

③ 对于不重合的两个平面 α 与 β，如果 α 内有不共线的三点到 β 的距离相等，那么，平面 $\alpha//$平面 β. ……………………………………………………………（　　）

④ 对于不重合的两个平面 α 与 β，如果存在异面直线 l、m，使得 $l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，$m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，那么，平面 $\alpha/\!/$ 平面 β. …………………………………………………… (　　)

上述四题是关于空间两平面平行的判定．其中①是错误的，②、③、④是正确的．通过解这样的题，可以帮助学生澄清一些似是而非的认识，提高运用数学知识进行判断的能力.

是非题设计比较容易，答案直截了当，解答也比较简单．但是，在形式逻辑中，任何一个数学命题，非真即假，非假即真，不能又真又假．所以，从统计学的角度来分析，用猜答案的办法解是非题，每道题猜对的概率是 0.5，按照正态分布概率计算（取信度 0.05），解答 10 道是非题，猜对题数在（0，8.099）内，即猜对的上限为 8 题．因此，在实际的考试中，一般不采用是非题.

为了保持是非题的优点，而弥补其不足，可以在扩大选择范围上下功夫，把是非题发展为选择题．如将【例 1】中的四个判断题合起来，就成了一个选择题.

【例 2】 对于不重合的两个平面 α 与 β，给定下列条件：

① 存在平面 γ，使得 α、β 都垂直于 γ；

② 存在平面 γ，使得 α、β 都平行于 γ；

③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等；

④ 存在异面直线 l、m，使得 $l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，$m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$.

其中，可以判定 α 与 β 平行的条件有 ………………………………………………… (　　)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

如果将【例 1】中的四个判断稍加改造，还可形成如下选择题.

【例 3】 已知不重合的两个平面 α 与 β，以下四个命题：

① 存在平面 γ，使得 α、β 都垂直于 γ，则 $\alpha/\!/\beta$；

② 存在平面 γ，使得 α、β 都平行于 γ，则 $\alpha/\!/\beta$；

③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等，则 $\alpha/\!/\beta$；

④ 存在异面直线 l、m，使得 $l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，$m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$.

其中正确的是 …………………………………………………………………… (　　)

(A) ①②③　　(B) ①②④　　(C) ①③④　　(D) ②③④

(2) 选择题

选择题是在每个题目的后面，提出 3～5 个供选择的结论，要求把正确结论选出来．选择题的内容十分广泛，涉及数学各个学科的基础知识和基本技能．并且，题目的难易程度也可以有较大的差别.

从结构上分析，选择题一般由指令性语言、题干和选择支三个部分组成.

指令性语言通常写在总题号的后面、所有选择题的前面，主要说明题的基本要求，指明是单选题，还是多选题．考试中，还常指出评分标准．数学选择题一般指单选题.

题干是指表明考查内容的句子、表格或者句子加上插图．这里所说的句子，可以是不完整句，也可以是特殊疑问句.

选择支是题干后面供选择用的结论，如［例 2］各题中所列的（A）、（B）、（C）、（D）．选择支通常有 3～5 个，其中至少有一个必须是正确的或合适的．选择支中的错误结论，通常称为干扰支．一道成功的选择题，必须使干扰支似是而非，尽可能达到以假乱真的境地．许多中学数学教师在长期的教学实践中，注意积累、总结学生数学解题中的常见错误，将其融进选择题，对纠正学生的错误、深化理解相关知识起到了积极的作用.

选择题具有多方面的优点：一是解题时无需写出具体过程，节省答题时间，在短短的一两个小时之内，能够解答相当数量的题目，有助于扩大考查的知识面；二是要确定一个结论的正确性，常常要用到多种数学知识，采用多种解题方法，这样有助于发展思维的灵活性和创造性，提高综合分析的能力；三是在考试时采用选择题，评分标准客观，可以用计算机评分，节省人力、物力.

选择题也有其局限性，它的主要缺点是难以考查学生完整地表述、论证问题的能力．同时，尽管选择题在考试时的可靠性比是非题有了较大的提高，但答案毕竟可以猜测，难免有乱猜撞对的可能，在一定程度上仍然会降低考试的信度和效度.

2. 填空题

填空题一般给出一个不完整的陈述句，要求在空白处填上适当的字词或数据，以构成一个真命题.

【**例 4**】　填空题（本大题共 11 题，每小题 4 分，共 44 分，把答案填在题中的横线上）：

（1）不等式 $|x-1|<1$ 的解集是________.

（2）若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$，则实数 $a=$________.

（3）若复数 z 满足 $z=i(2-z)$（i 是虚数单位），则 $z=$________.

（4）若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^2(x>0)$，则 $f(4)=$________.

（5）若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$________.

（6）函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 的最大值是________.

（7）在平面直角坐标系中，从六个点 $A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$、$F(3,3)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的概率是________（结果用分数表示）.

（8）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，若当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\lg x$，则满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是________.

（9）已知总体的各个体的值由小到大依次为 2,3,3,7,a,b,12,13.7,18.3,20，且总体的中位数为 10.5，若要使该总体的方差最小，则 a,b 的取值分别是________.

（10）某海域内有一孤岛，岛四周的海平面（视为平面）上有一浅水区（含边界），其边界是长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$ 的椭圆，已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为 h_1,h_2，且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上，现有船只经过该海域（船只的大小忽略不计），在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为 θ_1,θ_2，那么船只已进入该浅水区的判别条件是________.

（11）方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像交点的横坐标，若 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_k(k\leqslant 4)$ 所对应的点 $\left(x_i,\frac{4}{x_i}\right)$（$i=1,2,\cdots,k$）均在直线 $y=x$ 的同侧，则实数 a 的取值范围是________.

以上 [例 4]（1）～（11）是 2008 年高考上海卷的一组填空题.

填空题的内容也比较广泛，多数是围绕有关的计算和证明展开的．通常可分为定性型填空题、定量型填空题和混合型填空题三类．数学考试中，以定量型填空题居多.

从结构上分析，填空题与选择题有相似之处．前者是选取适当的字词或数据填入空白处，使所得命题成立；后者是选取合适的选择支，使它和题干构成一个真命题．也就是说，

两者都是通过适当的选取，以构成真命题．填空题保留了选择题的主要优点，克服了用猜答案的办法来解题的缺点．因此，填空题也就成了各类数学考试的一种基本题型．2008 年高考江苏卷删除了选择题，将填空题由原来的 4～5 题，扩充到 14 题.

3. 解答题

中学数学中的解答题，主要包括求解题、求证题、应用题、求作题等题型．目前，探索性题、开放性题受到重视，逐渐进入试题.

下面[例 5]～[例 10]是 2008 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）数学第二大题解答题的 6 个题目（原题号为 15～20 题）.

【例 5】 如图 1-2，在平面直角坐标系 xoy 中，以 ox 轴为始边作两个锐角 α、β，它们的终边分别与单位圆交于 A、B 两点．已知 A、B 的横坐标分别为$\frac{\sqrt{2}}{10}$、$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 $\tan(\alpha+\beta)$的值；（2）求 $\alpha+2\beta$ 的值.

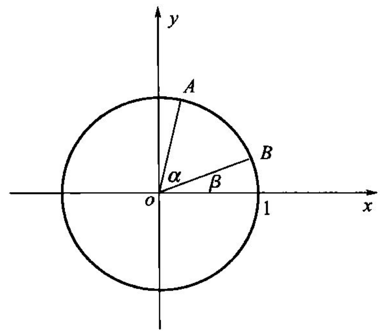


图 1-2

【例 6】 如图 1-3，在四面体 $ABCD$ 中，$CB=CD$，$AD\perp BD$，点 E、F 分别为 AB、BD 的中点．求证：

（1）直线 $EF//$平面 ACD；

（2）平面 $EFC\perp$平面 BCD.

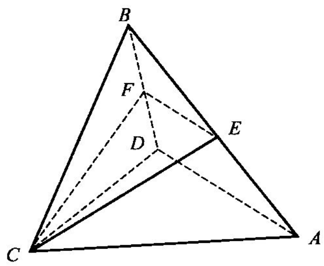


图 1-3

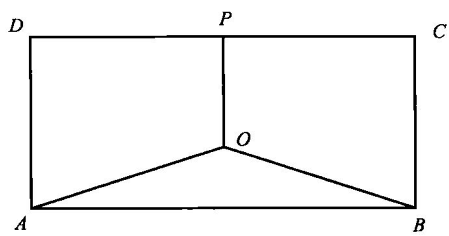


图 1-4

【例 7】 如图 1-4，某地有三家工厂，分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A、B 及 CD 的中点 P 处．$AB=20$km，$BC=10$km. 为了处理三家工厂的污水，现要在该矩形区域上（含边界），且与 A、B 等距离的一点 O 处，建造一个污水处理厂，并铺设三条排污管道 AO、BO、PO. 记排污管道的总长度为 y(km).

（1）按下列要求建立函数关系：

① 设$\angle BAO=\theta$(rad)，将 y 表示为θ 的函数；

② 设 $PO=x$(km)，将 y 表示为 x 的函数.

（2）请你选用（1）中的一个函数关系，确定污水处理厂的位置，使铺设的排污管道的总长度最短.

【例 8】 在平面直角坐标系 xoy 中，设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$（$x\in R$）的图像与两坐标轴有三个交点，经过这三点的圆记为 C.

（1）求实数 b 的取值范围；

（2）求圆 C 的方程；

（3）问圆 C 是否经过定点（其坐标与 b 无关）？请证明你的结论．

【例 9】（1）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是各项均不为零的 $n(n\geqslant4)$ 项等差数列，且公差 $d\neq0$．若将此数列删去某一项后得到的数列（按原来顺序）是等比数列．

（1）当 $n=4$ 时，求 $\dfrac{a_1}{d}$ 的数值．

（2）求 n 的所有可能值．

（3）求证：对于给定的正整数 $n(n\geqslant4)$，存在一个各项及公差均不为零的等差数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中任意三项（按原来顺序）都不能组成等比数列．

【例 10】 已知函数 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\times3^{|x-p_2|}$（$x\in R$，$p_1,p_2$ 为常数）．函数 $f(x)$ 定义为：对每个给定的实数 x，$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & 若\ f_1(x)\leqslant f_2(x)\\ f_2(x), & 若\ f_1(x)>f_2(x)\end{cases}$．

（1）求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件（用 p_1,p_2 表示）；

（2）设 a,b 是两个实数，满足 $a<b$，且 $p_1,p_2\in(a,b)$．若 $f(a)=f(b)$，求证：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\dfrac{b-a}{2}$（闭区间 $[m,n]$ 长度定义 $n-m$）．

[例 5] 为求解题，[例 6] 为求证题，[例 7] 则为应用题，[例 8] 可看作探索性题，[例 9] 和 [例 10] 两题则既有求解又有求证．

(1) 求解题

求解题一般是给出某些已知元素，要求运用数学知识，求出满足条件的未知元素．这里所说的元素，可以是数、式、方程、函数，也可以是图形的形状、位置或大小等．

上述 [例 5]（2008 年高考江苏卷第 15 题），结合图形给出了单位圆及单位圆上的点 A、B 的横坐标，要求考生运用三角函数的定义、三角函数之间的关系、两角和的三角公式等，求出 $\tan(\alpha+\beta)$、$\alpha+2\beta$ 的值．

(2) 求证题

求证题一般是给出一个数学命题，要求根据定义、公理、定理等已知真命题，应用逻辑推理的方法，来确立所给命题的真实性．

上述 [例 6]（2008 年高考江苏卷第 16 题），结合图形给出命题，要求考生识别图形，运用相关定理证明结论．对于（1），先运用三角形中位线定理证明 $EF\parallel AD$；再运用直线与平面平行的判定定理证明直线 $EF\parallel$ 平面 ACD．对于（2），先证 $EF\perp BD$，再运用平面与平面垂直的判定定理证明平面 $EFC\perp$ 平面 BCD．

(3) 应用题

应用题一般有实际的背景，首先要将实际问题或其他学科的问题通过数学建模，转化为数学问题，然后运用数学方法解决．

[例 7]（2008 年高考江苏卷第 17 题），要求我们将一个管道铺设问题转化为一个函数问题，然后再求这个函数的最值．

目前高考中，概率应用题与函数最值应用题居多．

(4) 探索题

探索题一般是结论不甚明确，或者条件不够完备，要求通过观察、试验、分析、比较、类比、归纳，猜想出题目的结论或条件，然后加以严格的证明．

[例 8]（2008 年高考江苏卷第 18 题）的第 3 小题，可以通过特殊化尝试，先找出定点，

然后再加以证明，也可以先假设圆 C 经过定点 (x_0,y_0)，再探求其满足的关系式 $x_0^2+y_0^2+2x_0+y_0+b(1-y_0)=0$（把它看成关于 b 的方程或函数式），为使该式对所有满足 $b<1$ $(b\neq0)$ 的 b 都成立，必须有 $1-y_0=0$，由此可得：$\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=2\\y_0=1\end{cases}$，即圆 C 经过定点 $(0,1)$ 和 $(2,1)$.

(5) 求作题

求作题一般是给出图形或图像的某些条件，要求应用作图的理论和方法，作出合乎条件的几何图形或函数图像.

【例 11】 如图 1-5，表示一块长方形木板挖去了两个半径相等并且外切的圆洞．试在图上画一条直线，若沿此线锯开，便可把木板分为面积相等的两块.

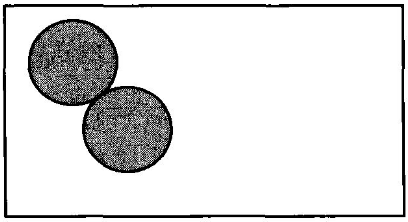


图 1-5

【例 12】 作函数 $y=\dfrac{|1-x^2|}{1-|x|}$ 的图像.

(6) 开放题

开放题一般是指探究目标的正确答案个数不确定的问题．这里的探究目标可以是：①问题中数学命题的条件部分；②问题中数学命题的结论部分；③探索解决数学问题逻辑通道的策略与方法；④数学对象的设计与描述.

【例 13】 CD 为 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的高，设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$CD=h$. 那么，a、b、c、h 这四个量之间有哪些关系？

【例 14】 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，试找出充分多的 $f(x)$，使得 $f(x)$ 满足 $f(x)=f^{-1}(x)$.

开放题大多没有现成的算法，也没有终结答案，所以在教学中有其特定的功能．学生在解题过程中可以形成积极探究和创造的心理势态，获得不同的发展，对数学的本质产生新的领悟．如通过［例 13］的探究，可以列出常用的结论如：① $a^2+b^2=c^2$； ② $ab=ch$；③ $c>a>h,c>b>h$；④ $a+b>c$；⑤ $c+h>a+b$ 等．可以由这些基本关系发现 a、b、c、h 这四个量之间的许多关系，如：⑥ $c\geqslant2h$；⑦ $c^n>a^n+b^n(n\geqslant3)$；⑧ $a^2+b^2\geqslant4h^2$；⑨ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{h}$；…在探索过程中不断深化对直角三角形中有关量之间的认识.

第三节 数学题的设计

中学数学中的习题、试题，服务于数学的教与学．数学题的设计，在中学数学教学中有着重要的、积极的意义．其一，设计良好的数学题，有利于学生深化对数学基础知识的理解，体会其中所蕴含的思想方法，培养良好的思维品质；其二，通过数学题的设计，可以进一步深化相关数学基础知识之间的联系甚至与其他学科之间的联系，进一步熟悉基本技能的运用；其三，从一定意义上来说，数学题的各种解题思路，渊源于它的设计方法，深入考察数学题的设计思想，有助于从根本上揭示题目的结构，提高解题能力．因此，了解和掌握数学题的设计方法，无论是进行数学教学，还是数学解题，都有着积极的意义.

一、设计数学题的基本原则

数学题是数学教学的重要载体，新课中，可以设计一些基础题，通过变式，使学生深化基础知识的理解与基本技能的熟练．在单元复习中，则可以适当注重前后知识之间的联系，设计一些小综合题．目前，能力立意，重视知识的发生发展过程，突出理性思维，是高考数学命题的指导思想．而重视知识形成过程的思想和方法，在知识网络的交汇点设计问题，则是高考命题的创新主体．高考数学命题十分关注知识网络的交汇点，注重学科的内在联系和综合，坚持多角度、多层次的考查，以检验学生是否形成一个有序的网络化知识体系，是否能对课程内容融会贯通，是否具有分析问题和解决问题的能力．

在题型的设计上，一般情况下，选择题主要检查对基本概念的理解及容易混淆的知识点；填空题主要检查基本概念、性质的掌握；计算题主要检查基础知识掌握和基本技能的熟练程度；证明题主要检查性质、定理的综合应用，探究题、开放题有助于培养学生的创新意识等．

明确设计目的与题型后，在具体设计数学题时，一般应遵循以下原则．

1. 准确性原则

题目的叙述必须清楚、准确，不能模棱两可，题中涉及的概念或记号必须是教材中已被定义的或已被规定的，如需要使用教材以外的概念或记号，必须在题目中加以阐明，题中的已知数据和结论数据必须合乎实际情形，不能脱离实际故弄玄虚．

2. 相容性原则

题目的条件与条件之间不能互相矛盾，条件与结论之间不能互相矛盾，条件与定义、公理、定理之间也不能互相矛盾．

3. 完备性原则

题目的条件必须充分，在给定的知识范围内足以保证结论成立或问题可解．

4. 独立性原则

题目的条件不能互相推出，也不能含有多余的条件．换言之，在设计数学题时，要力求把题设条件的数量减少到最低限度．在教学实践中，有时为了便于学生接受，可适当降低题目的难度，也可保留一些多余的条件．

二、设计数学题的常用方法

有了数学题设计的总体思想，根据设计数学题的基本原则，一般情况下，以下是设计数学题的一些常用方法．

1. 根据系统的基本量设计数学题

一个系统中，如果有几个量起着决定作用，可以独立取值，而其余的量可以由这几个量导出，那么这几个起决定作用的量称为这一系统的基本量．对于代数特别是与方程有关的系统，它的基本量是系统中的独立变量；对于几何系统，它的基本量是确定与其有关图形的形状、大小的元素．如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，系数 a、b、c 确定了这个方程．三角形 ABC 中，两边及其夹角确定了这个三角形，其他的元素都可以由这些基本元素求出．

根据基本量设计数学题，就是给选定的一组基本量赋以适当的数值，形成反映系统中各个量之间关系的数学题，这种设计方法通常称为基本量法．