

高等学校水利学科教学指导委员会组织编审

高等学校水利学科专业规范核心课程教材·水文与水资源工程

# 水文统计学

黄振平 陈元芳 主编



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

高等学校水利学科教学指导委员会组织编审

高等学校水利学科专业规范核心课程教材·水文与水资源工程

# 水文统计学

黄振平 陈元芳 主编



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)

## 内 容 提 要

本书密切结合水文实际,系统地阐述了水文学中常用的概率统计理论和方法,并扼要介绍了近年来水文统计研究新观点、新理论和新方法。

本书由概率论、水文数理统计方法、误差理论基础以及水文随机过程四部分组成。全书结构合理,循序渐进,条理清晰,表述简练、通俗,书中有大量例题,每章配有适量习题,书后还附有习题答案和常用数表,便于自学和应用。

本书可作为高等学校水文与水资源工程等水利类专业的本科生教材,也可供水文水资源、水利、环境、海洋、气象、地理等专业技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

水文统计学 / 黄振平, 陈元芳主编. -- 北京: 中国水利水电出版社, 2011.5

高等学校水利学科专业规范核心课程教材. 水文与水资源工程

ISBN 978-7-5084-8579-9

I. ①水… II. ①黄… ②陈… III. ①水文统计—高等学校—教材 IV. ①P333.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第077303号

|      |                                                                                                                                                                                                                    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 书 名  | 高等学校水利学科专业规范核心课程教材·水文与水资源工程<br><b>水文统计学</b>                                                                                                                                                                        |
| 作 者  | 黄振平 陈元芳 主编                                                                                                                                                                                                         |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038)<br>网址: <a href="http://www.waterpub.com.cn">www.waterpub.com.cn</a><br>E-mail: <a href="mailto:sales@waterpub.com.cn">sales@waterpub.com.cn</a><br>电话: (010) 68367658 (营销中心) |
| 经 售  | 北京科水图书销售中心(零售)<br>电话: (010) 88383994、63202643<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点                                                                                                                                                |
| 排 版  | 中国水利水电出版社微机排版中心                                                                                                                                                                                                    |
| 印 刷  | 北京市兴怀印刷厂                                                                                                                                                                                                           |
| 规 格  | 175mm×245mm 16开本 24.25印张 560千字                                                                                                                                                                                     |
| 版 次  | 2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷                                                                                                                                                                                            |
| 印 数  | 0001—3000册                                                                                                                                                                                                         |
| 定 价  | <b>45.00元</b>                                                                                                                                                                                                      |

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

# 高等学校水利学科专业规范核心课程教材

## 编 审 委 员 会

主 任 姜弘道 (河海大学)

副主任 王国仪 (中国水利水电出版社) 谈广鸣 (武汉大学)  
李玉柱 (清华大学) 吴胜兴 (河海大学)

### 委 员

周孝德 (西安理工大学)

刘 超 (扬州大学)

任立良 (河海大学)

杨金忠 (武汉大学)

梅亚东 (武汉大学)

姜 峰 (大连理工大学)

王元战 (天津大学)

张展羽 (河海大学)

陈建康 (四川大学)

孙明权 (华北水利水电学院)

陈 楚 (水利部人才资源开发中心)

李建林 (三峡大学)

朝伦巴根 (内蒙古农业大学)

余锡平 (清华大学)

袁 鹏 (四川大学)

胡 明 (河海大学)

郑金海 (河海大学)

康海贵 (大连理工大学)

黄介生 (武汉大学)

冯 平 (天津大学)

侍克斌 (新疆农业大学)

孙春亮 (中国水利水电出版社)

秘 书 周立新 (河海大学)

丛书总策划 王国仪

# 水文与水资源工程专业教材编审分委员会

主 任 任立良（河海大学）

副主任 袁 鹏（四川大学）

梅亚东（武汉大学）

## 委 员

沈 冰（西安理工大学）

吴吉春（南京大学）

刘廷玺（内蒙古农业大学）

方红远（扬州大学）

姜卉芳（新疆农业大学）

靳孟贵（中国地质大学）

吴泽宁（郑州大学）

陈元芳（河海大学）

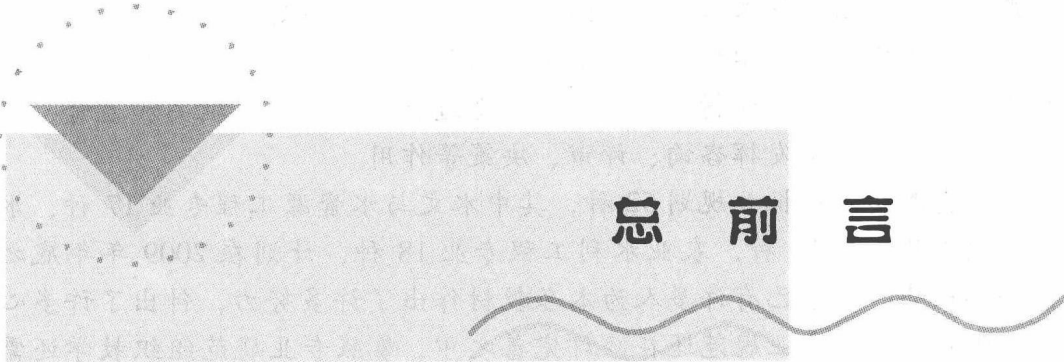
冯 平（天津大学）

纪昌明（华北电力大学）

刘俊民（西北农林科技大学）

金菊良（合肥工业大学）

郭纯青（桂林理工大学）



## 总 前 言

随着我国水利事业与高等教育事业的快速发展以及教育教学改革的不断深入,水利高等教育也得到很大的发展与提高。与1999年相比,水利学科专业的办学点增加了将近一倍,每年的招生人数增加了将近两倍。通过专业目录调整与面向新世纪的教育教学改革,在水利学科专业的适应面有很大拓宽的同时,水利学科专业的建设也面临着新形势与新任务。

在教育部高教司的领导与组织下,从2003年到2005年,各学科教学指导委员会开展了本学科专业发展战略研究与制定专业规范的工作。在水利部人教司的支持下,水利学科教学指导委员会也组织课题组于2005年底完成了相关的研究工作,制定了水文与水资源工程、水利水电工程、港口航道与海岸工程以及农业水利工程四个专业规范。这些专业规范较好地总结与体现了近些年来水利学科专业教育教学改革的成果,并能较好地适用不同地区、不同类型高校举办水利学科专业的共性需求与个性特色。为了便于各水利学科专业点参照专业规范组织教学,经水利学科教学指导委员会与中国水利水电出版社共同策划,决定组织编写出版“高等学校水利学科专业规范核心课程教材”。

核心课程是指该课程所包括的专业教育知识单元和知识点,是本专业的每个学生都必须学习、掌握的,或在一组课程中必须选择几门课程学习、掌握的,因而,核心课程教材质量对于保证水利学科各专业的教学质量具有重要的意义。为此,我们不仅提出了坚持“质量第一”的原则,而且还通过专业教学组讨论、提出,专家咨询组审议、遴选,相关院、系认定等步骤,对核心课程教材的选题及主编、主审人选和教材编写大纲进行

了严格把关。为了把本套教材组织好、编著好、出版好、使用好，我们还成立了高等学校水利学科专业规范核心课程教材编审委员会以及各专业教材编审分委员会，对教材编纂与使用的全过程进行组织、把关和监督，充分依靠各学科专家发挥咨询、评审、决策等作用。

本套教材第一批共规划 52 种，其中水文与水资源工程专业 17 种，水利水电工程专业 17 种，农业水利工程专业 18 种，计划在 2009 年年底之前全部出齐。尽管已有许多人为本套教材作出了许多努力，付出了许多心血，但是，由于专业规范还在修订完善之中，参照专业规范组织教学还需要通过实践不断总结提高，加之，在新形势下如何组织好教材建设还缺乏经验，因此，这套教材一定会有各种不足与缺点，恳请使用这套教材的师生提出宝贵意见。本套教材还将出版配套的立体化教材，以利于教、便于学，更希望师生们对此提出建议。

高等学校水利学科教学指导委员会

中国水利水电出版社

2008 年 4 月

# 前 言

本书是在教育部高等学校水利学科教学指导委员会指导下，由河海大学组织编写，并被确定为教育部水利学科高等学校专业规范核心课程教材。本书是在总结过去不同版本《水文统计》教材基础上，结合当前水文与水资源工程专业发展新形势和水文统计学科新发展编写而成的。

本书由概率论、水文数理统计方法、误差理论基础以及水文随机过程四部分组成，全面系统地介绍了水文统计的基本原理和方法，扼要介绍了有代表性的水文统计学研究新进展。本书的取材立足于水文工作的实际需要，在适当注意数学理论系统性的基础上，避免某些抽象的数学推理和繁琐的公式演绎，着重内容的实用性。本书编写力求结构合理，条理清楚，并注重概念的清晰正确，知识的系统完整，文字的通顺流畅，语言的简练易懂。书中举例较多，每章配有适量的习题，书后附有习题答案和常用数表，便于学习和应用。

本书由河海大学、南京大学、四川大学、西安理工大学等高校中多年从事水文统计课程教学工作的老师承担编写任务。各章编写人员如下：秦毅、黄振平(第一章)；黄振平(第二章、第三章、第四章、第五章、第十章)；陈元芳(绪论、第六章、第七章)；王栋、陈元芳(第八章)；黄振平、秦毅(第九章)；王文圣(第十一章、第十二章)。全书由河海大学水文水资源学院黄振平、陈元芳主编，河海大学王俊德主审。

本书编写过程中，很多专家、学者提出了宝贵意见，研究生葛慧、周川、李肖阳、曹雪芹、黄琴等参与了部分图表的处理和校对工作，编者还参考了国内外有关教材、专著和论文，在此，谨向他们一并表示衷心感谢！

由于时间仓促，编者水平所限，书中不足之处，恳请读者批评指正。

编 者

2010年8月于南京

# 目 录

## 总前言

## 前言

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 绪论                   | 1   |
| 第一章 事件与概率            | 4   |
| 第一节 事件及其运算           | 4   |
| 第二节 概率的定义与性质         | 9   |
| 第三节 条件概率与事件的独立性      | 18  |
| 习题                   | 27  |
| 第二章 随机变量及其分布         | 31  |
| 第一节 随机变量与分布函数        | 31  |
| 第二节 离散型随机变量          | 33  |
| 第三节 连续型随机变量          | 41  |
| 第四节 随机变量函数的概率分布      | 51  |
| 习题                   | 57  |
| 第三章 多元随机变量及其分布       | 61  |
| 第一节 多元随机变量与联合分布      | 61  |
| 第二节 边际分布             | 68  |
| 第三节 条件分布             | 71  |
| 第四节 随机变量的独立性         | 73  |
| 第五节 多元随机变量函数的分布      | 78  |
| 第六节 二元正态分布           | 94  |
| 习题                   | 96  |
| 第四章 数字特征与特征函数        | 101 |
| 第一节 数学期望             | 101 |
| 第二节 方差               | 109 |
| 第三节 离势系数、矩、偏态系数及峰度系数 | 115 |
| 第四节 多元随机变量的数字特征      | 118 |
| 第五节 特征函数             | 128 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 习题 .....                 | 132 |
| <b>第五章 极限定理</b> .....    | 135 |
| 第一节 大数定律 .....           | 135 |
| 第二节 中心极限定理 .....         | 137 |
| 习题 .....                 | 140 |
| <b>第六章 抽样分布</b> .....    | 142 |
| 第一节 简单随机抽样 .....         | 142 |
| 第二节 样本分布与抽样分布 .....      | 145 |
| 第三节 几种统计量的抽样分布 .....     | 150 |
| 第四节 顺序统计量及其分布 .....      | 153 |
| 习题 .....                 | 156 |
| <b>第七章 水文频率计算</b> .....  | 158 |
| 第一节 概述 .....             | 158 |
| 第二节 几种理论分布的频率计算与分析 ..... | 160 |
| 第三节 参数点估计的数理统计方法 .....   | 167 |
| 第四节 参数点估计的水文统计方法 .....   | 175 |
| 第五节 估计量好坏的评价标准 .....     | 186 |
| 第六节 参数的区间估计 .....        | 190 |
| 习题 .....                 | 193 |
| <b>第八章 假设检验</b> .....    | 196 |
| 第一节 基本概念 .....           | 196 |
| 第二节 正态总体均值的假设检验 .....    | 200 |
| 第三节 正态总体方差的假设检验 .....    | 206 |
| 第四节 零相关检验 .....          | 209 |
| 第五节 非参数假设检验 .....        | 210 |
| 习题 .....                 | 215 |
| <b>第九章 回归分析</b> .....    | 217 |
| 第一节 基本概念 .....           | 217 |
| 第二节 一元线性回归模型 .....       | 220 |
| 第三节 多元线性回归模型 .....       | 237 |
| 第四节 非线性回归 .....          | 260 |
| 习题 .....                 | 264 |
| <b>第十章 误差理论基础</b> .....  | 267 |
| 第一节 误差的基本概念 .....        | 267 |
| 第二节 随机误差 .....           | 270 |
| 第三节 系统误差 .....           | 275 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 第四节 粗大误差 .....             | 281 |
| 第五节 误差的传递、合成与分配 .....      | 284 |
| 第六节 测量的不确定度 .....          | 293 |
| 习题 .....                   | 297 |
| <b>第十一章 随机过程简介</b> .....   | 299 |
| 第一节 随机过程的基本概念 .....        | 299 |
| 第二节 随机过程的分布函数 .....        | 300 |
| 第三节 随机过程的数字特征 .....        | 301 |
| 第四节 独立随机过程与独立增量随机过程 .....  | 304 |
| 第五节 平稳随机过程 .....           | 305 |
| 第六节 马尔柯夫过程 .....           | 309 |
| 习题 .....                   | 313 |
| <b>第十二章 水文时间序列分析</b> ..... | 315 |
| 第一节 水文时间序列及其组成 .....       | 315 |
| 第二节 水文时间序列相关分析 .....       | 316 |
| 第三节 水文时间序列的谱分析 .....       | 320 |
| 第四节 水文时间序列组成成分识别 .....     | 323 |
| 习题 .....                   | 332 |
| <b>习题答案</b> .....          | 335 |

## 附 表

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 附表一 泊松分布数值表 .....                                | 348 |
| 附表二 标准化正态分布密度纵坐标表 .....                          | 350 |
| 附表三 标准化正态分布函数表 .....                             | 352 |
| 附表四 皮尔逊Ⅲ型分布离均系数 $\Phi_p$ 值表 .....                | 354 |
| 附表五 对数正态曲线离均系数 $\Phi_p$ 值表 .....                 | 358 |
| 附表六 $\chi^2$ 分布表 .....                           | 360 |
| 附表七 耿贝尔曲线离均系数 $\Phi_p$ 值表 .....                  | 362 |
| 附表八 $t$ 分布表 .....                                | 363 |
| 附表九 $F$ 分布表 .....                                | 364 |
| 附表十 相关系数检验表 .....                                | 370 |
| 附表十一 复相关系数检验表 .....                              | 371 |
| 附表十二 柯莫哥洛夫-斯米尔诺夫 $\lambda$ 分布表 .....             | 372 |
| 附表十三 游程检验法临界值 $k_\alpha$ 的查算表 .....              | 373 |
| 附表十四 秩和检验表 $P(W_1 < W < W_2) = 1 - \alpha$ ..... | 374 |
| <b>参考文献</b> .....                                | 375 |

# 绪 论

## 一、随机现象与统计规律

自然界和社会中存在着各种各样的现象，但归纳起来，可以分为两种类型。一类称为必然现象，或确定性现象。其特点是：在一定条件下，某种结果一定会发生（或出现）。例如，在标准大气压下，将水加热到  $100^{\circ}\text{C}$ ，“水沸腾”这一结果一定会发生；在一段导线两端施加电压时，“导线内产生相应的电流”这一结果也一定会发生等等。这类现象与其形成的条件之间存在比较固定的因果联系，可以用经典的数学物理方法和定律来描述。因此，对于这类现象，只要满足一定条件，人们可以准确地预测其结果。另一类现象称为随机现象，或偶然现象。这类现象的特点是：在一定条件下，有多种可能发生的结果，但究竟哪个结果发生，事先不能确定。例如，抛一枚质地均匀的硬币，有两种可能发生的结果，正面朝上和反面朝上（通常把有币值的一面称为正面），在抛硬币之前，不能确定哪面朝上。又例如，投掷一颗骰子，观测向上那面的点数，有 6 种可能结果，投掷前，不能确定将出现几点。在水文领域，很多水文现象都属于随机现象。例如，观察某地的年降水天数，有 366 种可能，在年初是不能确定该年到底有多少天会降水。观测河流某断面处的年最高水位、年最大洪峰流量等，也都属于随机现象。这类现象带有很大偶然性，所以，又称为偶然现象。这类现象之所以具有不确定性，是因为它们除了受基本的起主导作用的因素制约外，还受许多次要且多变的偶然因素影响。

随机现象的个别观察或试验结果虽然是无规律的，但对一种随机现象进行了大量的观察研究之后，总能揭示出某种完全确定的规律。例如，若抽检产品的件数足够多，就可以发现，该批产品的合格率总是稳定地在某一常数附近摆动；若上抛一枚质地均匀的硬币次数足够多，就会发现，落下后出现正面和反面的次数大体相等；再如，物理学表明，在一个盛满水的容器中，水对器壁的压力是由各个水分子对器壁的冲击力汇合而成的，虽然每个水分子的运动速度和轨迹都是随机的，致使它们对器壁的冲击力千差万别，但从宏观角度看，器壁各点所受的压力都是稳定的，可以用水力学定律来描述。随机现象的这种规律称为统计规律，它是随机现象的宏观规律，与随机现象个别观测结果的特性几乎没有关系。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的数学分支。

## 二、水文统计学的产生与发展

水文现象和其他一切自然现象一样，它的发生和发展过程，既有确定性的一面，又有随机性的一面。由于天文和宏观地理地质因素比较稳定，河流的水文情势具有以年为周期的循环性和明显的季节性，这就是水文现象的确定性。然而，在水文现象的发展过程中，还不时受到许多次要因素的影响，例如大气环流的变化、降水的时空分布和受人类活动影响下导致下垫面条件变化等。这些因素不仅种类繁多，而且组合也

复杂多变,从而使水文现象在其稳定的年、季变化背景上不断发生各种随机偏差,这就是水文现象的随机性。

由于水文现象具有显著的随机性,因此,概率统计的方法在水文学的各个方面都得到日益广泛的应用。如在水文测验中,站网的规划和测验误差的分析等;在水文预报中,预报方案的制订,预报误差的分析和评定等;在水文水利计算中,各种水利系统的规划设计及运行管理等,都要使用概率统计方法。通常,把水文学中的概率统计方法称为水文统计法,通过应用水文统计法解决水文问题逐步形成水文统计学科方向。

水文学中应用概率统计法,固然是水文现象本身的特性所决定的,但其直接原因还是生产实践的需要。早期的水利工程设计,大多以历史上出现过的大洪水或者在这种洪水上再加上一个安全系数为依据,但是,这样做有许多问题,特别是历史上的大洪水与实测资料或调查年限的长短有关,如果资料年限不长,这样做可能很不安全。另外,这种方法也不能回答在未来工程运行期间发生大小洪水的可能性,而这个问题恰恰是人们最关心的。概率统计方法正是解决这类问题的有力工具。

水文学中应用概率统计方法大约始于 1880 ~ 1890 年,最初大都应用纯经验的历时曲线(即目前称为的经验频率曲线)。后来霍顿(Horton)在 1896 年的径流研究中,首先采用了概率方法,但当时主要采用正态分布。其后海森(Haizen)对正态分布的实用性进行了许多研究,注意到了实际资料的非对称性问题,并首先采用了对数正态分布。随着水文研究的发展,概率统计方法被运用得越来越多,许多非对称分布,如对数正态分布、皮尔逊Ⅲ型(P-Ⅲ型)分布、耿贝尔分布、对数皮尔逊Ⅲ型分布,克里茨基-门克尔(K-M)分布等都得到了广泛的应用,特别在分布参数的估计方面提出了许多方法,大大推动了水文统计学的发展。

我国学者应用水文统计法大约始于 20 世纪 30 年代,那时周镇伦和陈椿庭曾用概率统计方法分别研究过年降水量和洪水流量。但在旧中国,由于不关心水利建设事业,加之水文资料十分贫乏,对于水文统计的理论和方法,几乎没什么研究。

新中国成立以后,为了满足蓬勃发展的水利建设事业的需要,我国水文工作者广泛地学习运用水文统计学的理论和方法,有效地解决了许多水文分析计算问题。从 20 世纪 50 年代初至 60 年代前期,对水文统计学的研究十分活跃,此间不仅翻译出版了国外许多水文计算文献和书籍,还发表了大量结合我国水文实际的研究论文和报告,例如,1957 年北京水利科学研究院水文研究所的《暴雨及洪水频率计算方法的研究(初稿)》;1958 年水利出版社的《水文计算经验汇编》等。这些论文和报告大大丰富和发展了水文统计理论和方法。1959 年 5 月出版的金光炎专著《水文统计原理和方法》,比较详细地阐述了水文分析中常用的概率论与数理统计基本概念和理论,并广泛地介绍了当时国内外关于水文统计法的研究成就。该书对我国水文科技人员中普及和提高水文统计知识曾起过积极作用,至今仍是一本较好的参考书。进入 20 世纪 70 年代以来,随着国际学术交流的增多和计算机的普遍应用,我国水文统计学的研究也得到了更大的发展,不仅在水文频率计算方面又取得了一些新成就,而且还对回归分析、随机过程、时间序列分析等在水文学的应用展开了研究。1981 年 6 月丛树铮主编的《水文学的概率统计基础》一书,详细介绍了随机模拟技术及其在水文学中

的应用,对我国随机水文学的研究起了积极的推动作用。随后,王俊德、黄振平分别于1992年和2003年编写出版了《水文统计》教材,郭生练编写出版了《设计洪水研究进展与评价》,比较全面地总结了国内外水文统计学研究进展。

应当指出的是,虽然概率统计方法在水文学中得到了广泛而成功应用,但在任何自然现象中,起主导作用的仍是必然性规律,随机性只是起着从属的作用。因此,在研究水文现象时,必须把概率统计方法和物理成因分析方法密切结合起来,只有这样才能更深入地研究水文现象的客观规律和正确运用水文统计的分析结果。

### 三、本课程在水文专业教学中的地位

水文统计是水文与水资源工程专业的一门重要专业基础课,一方面,它要为水文测验、水文预报、水文水利计算、水资源利用和水环境保护等专业课程提供必要的概率统计基础知识;另一方面,它的理论和方法也是水文研究和实践的有力工具。

本书的重点是结合水文现象的实际,介绍概率论与数理统计的基本概念和原理。只有掌握了这些内容,才能在水文研究和实践中正确、灵活和创造性地应用它们。不过,本书又不同于一般的概率论和数理统计教材。它的取材立足于水文工作的实际需要,在适当注意数学理论系统性的基础上,强调理论和方法的应用。为了不使读者陷入深奥的数学迷雾而迷失方向,本书不过分强调数学的严密性,对于比较抽象的概念和理论,以及繁琐的数学推导和证明,一般从略,或只给予粗略和直观的说明,以便读者始终把注意力放在对基本原理的理解和应用上。本书在编写过程中,还注重反映最新水文统计学研究进展以及工程设计的新需求。

# 第一章 事件与概率

## 第一节 事件及其运算

### 一、随机试验

人们为了认识客观事物的特性和变化规律，就要对它进行观测、调查或试验。为了方便起见，把这类活动统称为“试验”。

显然，对确定性现象所做的试验，在试验之前人们就能准确预测它将会出现怎样的结果，而对随机现象作试验时，人们却不能根据试验的条件预测试验将会出现怎样的结果，因为试验结果具有随机性。若一种试验满足下列三个条件，则称之为随机试验，简称试验，用符号  $E$  表示。

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行；
- (2) 试验的所有可能结果预先是知道的；
- (3) 试验前不能确切地预料将会出现哪一个结果。

**例 1** 掷一颗骰子观察它出现的点数。这是一个随机试验。因为骰子可以重复地掷；所有可能的结果是已知的，不外乎出现“1 点”，“2 点”，…，“6 点”这六种情况；每掷一次骰子前不能确定将会出现哪一种点数。

**例 2** 观测某地 5 月 1 日的最高温度  $T(^{\circ}\text{C})$ 。这也是随机试验。因为每年的 5 月 1 日都可以进行观测；设该地的温度不会低于  $T_0$ ，也不会高于  $T_1$ ，则  $T$  的所有可能取值为  $[T_0, T_1]$  区间；而每年观测之前，不能确定该年的  $T$  是多少。

在水文工作中，观测河流某断面的年最大洪峰流量，年最高洪水位，或者观测某地区一定时间内的降水量、蒸发量等，都是随机试验。

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，简称事件，一般用大写英文字母  $A, B, C, \dots$  表示。

如在例 1 中，“出现 1 点”，“出现偶数点”，“出现的点数不大于 4”等，都是随机事件。又如在例 2 中，“ $T > 25$ ”，“ $20 \leq T \leq 35$ ”，“ $T < 15$ ”等也都是随机事件。

每次试验中，一定发生的事情称为必然事件，记为  $\Omega$ 。每次试验中，一定不发生的事情称为不可能事件，记为  $\phi$ 。显然，必然事件和不可能事件都是对确定性现象试验的结果，为了研究的方便和统一，把必然事件和不可能事件也看成随机事件，即把它们作为随机事件的两个极端情况。

在讨论一个事件的必然性、不可能性和随机性时，要把它与试验的条件联系起来。例如，在标准大气压下，纯净水加热到  $100^{\circ}\text{C}$  时，“水沸腾”是必然事件。但如果试验条件是“在标准大气压下，纯净水加热到  $80^{\circ}\text{C}$ ”，则“水沸腾”是不可能事件。又如，一次射击命中目标，通常是一个随机事件，但如果射击者距离目标极近，那么“命中目标”就将成为必然事件了。

## 二、基本事件，复合事件，基本空间

在随机试验中，每一个可能出现的结果（又称样本点）都是一个随机事件，这种简单的随机事件称为基本事件。基本事件也可以看作是试验中不能再分解的事件。由若干个基本事件组成的事件称为复合事件。

在例 1 中，共有 6 个基本事件：“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”，它们都是不可分解的事件。“出现偶数点”，“出现的点数小于 3”等事件是复合事件。

设  $\omega_i$  表示“出现  $i$  点”， $A$  表示“出现偶数点”， $B$  表示“出现的点数小于 3”，则

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

$$B = \{\omega_1, \omega_2\}$$

事件  $A$  是由  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  三个基本事件组成的，当且仅当  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  中的一个出现（又称发生）时，事件  $A$  才发生。反之，若  $A$  发生了，则表明它所包含的基本事件  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  中有一个发生了。同理，事件  $B$  是由  $\omega_1, \omega_2$  两个基本事件组成的。当且仅当  $\omega_1$  或  $\omega_2$  出现时，事件  $B$  才发生。反之，若  $B$  发生了，则表明  $\omega_1, \omega_2$  中有一个发生了。

每次试验，有且仅有一个基本事件发生，基本事件的全体称为基本空间（又称样本空间）。由于随机试验的任一结果必然是基本空间中的一个基本事件，因此，基本空间作为一个事件是必然事件，所以仍用  $\Omega$  表示。

在例 1 中，基本空间

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$$

在例 2 中，若用  $t$  表示“该地 5 月 1 日的最高温度观测值”，则  $t$  的取值范围为  $[T_0, T_1]$ ，即基本事件有无限多个，它充满了区间  $[T_0, T_1]$ ，故基本空间

$$\Omega = \{t \mid T_0 \leq t \leq T_1\}$$

从上面例子可以看到，基本空间中的基本事件的总数可以是有限多个，也可以是无限多个。按集合论的观点，对于某一随机试验  $E$ ，基本空间  $\Omega$  是所有基本事件的全体所构成的集合。随机事件是集合  $\Omega$  的一个子集，必然事件就是基本空间  $\Omega$ ，不可能事件就是空集  $\phi$ 。

值得注意的是，对一个随机现象试验的目的不同时，相应的基本空间也可能有所不同。例如，观测某地年降水量，区间  $[0, PMP]$ （ $PMP$  为该地可能最大降水量）中的任一实数，都是一个基本事件，这时，基本事件有无穷个；但如果观测年降水量的目的是为了确定是早年、正常年还是丰水年，这时就只有三个基本事件了。

## 三、事件之间的关系与运算

### （一）事件之间的关系

研究随机现象，常常要研究几个事件以及它们之间的关系。例如，研究一次洪水时，不仅要考虑洪峰流量，还要考虑洪水总量；研究区域洪水时，不仅要研究干流洪水，还要研究支流洪水。详细地分析事件之间的关系，不仅能使人们更加深刻地认识

事件的本质, 而且还能大大简化某些复杂事件的概率计算。

事件之间的关系可归结为以下几种。

### 1. 包含关系

若在每次试验中事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 则称事件  $B$  包含事件  $A$ , 或称  $A$  是  $B$  的特款。记为  $B \supset A$  或  $A \subset B$ 。此时属于  $A$  的基本事件都属于  $B$ , 如图 1-1 所示。图中矩形区域表示基本空间  $\Omega$ , 圆  $A$  和圆  $B$  分别表示事件  $A$  和事件  $B$ 。例如, 设  $A$  表示“南京市一年中降水日数超过 100 天”,  $B$  表示“南京市一年中降水日数超过 80 天”, 则  $B$  包含  $A$ , 因为若一年降水日数超过 100 天, 则必然超过 80 天。

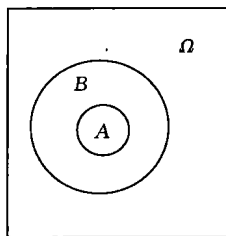


图 1-1

若事件  $B$  包含事件  $A$ , 且事件  $A$  也包含事件  $B$ , 即  $B \supset A$  及  $A \supset B$  同时成立, 则称事件  $A$  与事件  $B$  相等(或等价), 记为  $A = B$ , 此时, 事件  $A$  与事件  $B$  所含的基本事件相同。

显然, 对  $\Omega$  中的任何事件  $A$ , 必有  $\Omega \supset A \supset \phi$ 。

### 2. 互斥关系

若在每次试验中事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生, 则称事件  $A$  与事件  $B$  互斥, 或称  $A$  与  $B$  互不相容。显然, 互不相容事件不含相同的基本事件, 如图 1-2 所示。例如, 设  $A$  表示“南京市一年中降水日数超过 80 天”,  $B$  表示“南京市一年中降水日数少于 70 天”, 则事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生, 所以  $A$  与  $B$  互斥。若两个随机事件能同时发生, 则称它们是相容事件, 或称它们是相容的。

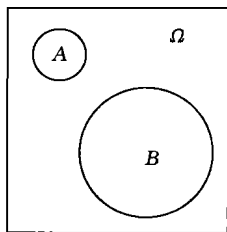


图 1-2

类似地,  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中任意两个事件都不可能同时发生, 则称事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容或两两互斥。显然, 在随机试验中, 基本事件是两两互不相容的。

### 3. 对立事件

若在每次试验中事件  $A$  与事件  $B$  不可能同时发生, 但必有一个发生, 则称事件  $A$  是事件  $B$  的对立事件(逆事件), 或称事件  $B$  是事件  $A$  的对立事件(逆事件), 或称它们是对立(互逆)的, 记成  $A = \bar{B}$  或  $B = \bar{A}$ 。通常将  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ , 显然  $\bar{A}$  的对立事件即为  $A$ , 即  $\bar{\bar{A}} = A$ 。 $A$  的对立事件  $\bar{A}$  是由基本空间中不属于  $A$  的基本事件组成的。同理,  $B$  的对立事件  $\bar{B}$  由基本空间中不属于  $B$  的基本事件组成, 如图 1-3 所示。

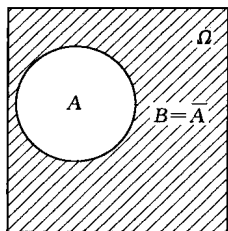


图 1-3

若在观察南京市年降水日数的试验中设  $A$  表示“南京市年降水日数大于等于 80 天”,  $B$  表示“南京市年降水日数少于 80 天”, 那么任一年, 事件  $A$  和事件  $B$  互为对立事件。

这里需要指出, 两个事件  $A, B$  对立与互斥的差别在于后者不要求  $A$  与  $B$  中一定有一个发生, 而两者共同之点在于  $A$  与  $B$  不能同时发生。所以, 两个对立的事件一定是对立的, 但两个互斥的事件不一定是互斥的。