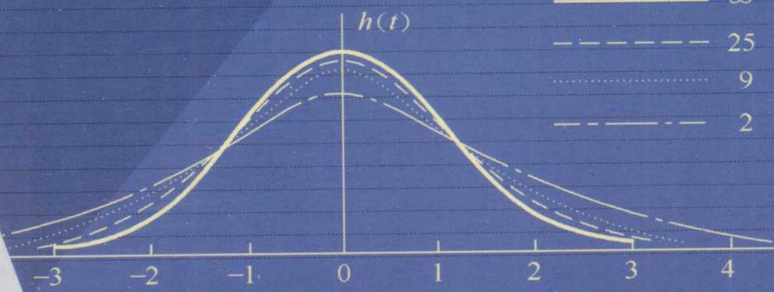
工业和信息化普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目

概率统计与随机过程

孔告化 何铭 胡国雷 编

Probability and Stochastic Processes



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

概率统计
与随机过程

工业和信息化普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目

概率统计与随机过程

孔告化 何铭 胡国雷 编

Probability and Stochastic Processes

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

概率统计与随机过程 / 孔告化，何铭，胡国雷编
-- 北京 : 人民邮电出版社，2011.9
ISBN 978-7-115-25787-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①孔… ②何… ③胡… Ⅲ. ①概率论
②随机过程 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第139718号

内容提要

本书共有 11 章，第 1 章至第 5 章是概率论部分，内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第 6 章至第 8 章是数理统计部分，内容有样本及抽样分布、参数估计、假设检验；第 9 章至第 11 章是随机过程部分，内容有随机过程引论、马尔可夫链、平稳过程. 各章均选配了适量的习题，并附有参考答案.

本书可作为工科、理科（非数学）、经济、管理等专业的概率统计课程的教材，也可作为研究生入学考试的参考书.

概率统计与随机过程

◆ 编　　孔告化　何　铭　胡国雷
　责任编辑　蒋　亮
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　电子邮件 315@ptpress.com.cn
　网址 http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
　印张：19　　2011 年 9 月第 1 版
　字数：449　　2011 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-25787-1

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

概率论、数理统计与随机过程作为现代数学的重要分支，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有及为广泛的应用．特别是近 30 年来，随着信息技术的快速发展，概率统计与随机过程在通信、计算机、材料、经济、管理、生物等方面的应用更是得到了长足的发展，在众多的学科与行业中得到了越来越广泛的应用，它今天成为各类专业大学生的最重要的数学课程之一．

在撰写本书时，我们根据 20 余年的教学经验，结合通信与信息技术、管理等专业的特点、后续课程的教学等方面的需要，对教材内容作了认真精选。在选材和叙述上尽量做到联系工科、管理等各专业的特点，从实例出发，引出基本概念，并在引出基本概念时注意揭示其直观背景和实际意义，注重概率统计与随机过程在通信与信息技术、经济学等领域的应用．在内容的处理上由具体到一般，由直观到抽象，由浅入深，循序渐进．在例题与习题的选取上也做了很大努力，力争使这些题目既具有启发性，又具有广泛的应用性．

本书共 11 章，分 3 大部分．第 1 部分由第 1 章至第 5 章组成，主要内容是随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理．第 2 部分由第 6 章至第 8 章组成，主要内容是样本及抽样分布、参数估计、假设检验．第 3 部分由第 9 章至第 11 章组成，主要内容是随机过程引论、马尔可夫链、平稳过程．各章均选配了适量的习题，并附有参考答案．

本书的编写分工如下：第 1 章至第 4 章由孔告化撰写，第 5 章至第 8 章由何铭撰写，第 9 章至第 11 章由胡国雷撰写．本书的编写工作得到了南京邮电大学理学院领导的关心与支持，同时也得到了人民邮电出版社的鼎力帮助，编者借此机会一并致谢．

由于编者水平有限，不当乃至缪误之处在所难免，恳请广大读者不吝赐教．

编　者

2011 年 5 月

目　录

第 1 章 随机事件及其概率

在自然界和社会实践中发生的现象是多种多样的，这些现象一般可分为两种类型．一类是在一定条件下必然要发生的现象，如在标准大气压下，水温达到 100 ℃时就要沸腾；太阳每天都从东方升起；向上抛一个石子它必然下落等等．我们称这类现象为**确定性现象或必然现象**．另一类现象则与此不同，如抛一枚硬币，落地时，可能“正面”朝上，也可能“反面”朝上，但事先无法准确预言哪一面朝上；在单位时间内，某市“110”收到的呼叫次数，事先也无法准确预知；某人多次掷一枚骰子，每次向上的点数不尽相同，且在每次掷骰子前不能准确预知向上的点数。我们称这类现象为**随机现象**．当我们大量重复观察随机现象的时候，就会发现随机现象呈现出某种规律性，这种规律性称为统计规律性．概率统计与随机过程就是研究和揭示随机现象所具有的统计规律性的一门数学学科．

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与样本空间

为了叙述方便，在本书中，我们将试验作为一个含意广泛的术语，它包括各种各样的实验、试验和检验，甚至对某些特征的观察也认为是一种试验．在概率论中，我们将具有以下三个特征的试验称为**随机试验**（**random trial**），简称**试验**（**trial**）．

（1）试验可以在相同的条件下重复进行（重复性）；

（2）试验的可能结果不止一个，并且一切可能的结果都已知（多样性）；

（3）在每次试验前，不能确定哪一个结果会出现（随机性）．

以后我们所提到的试验都指的是随机试验，随机试验一般用大写字母 E 表示．下面列举一些随机试验的例子．

例 1.1　E_1：抛一枚硬币，观察其出现正面 H 、反面 T 的情况．

E_2：掷一枚骰子，观察其出现的点数.

E_3：记录某市“110”一昼夜收到的呼叫次数.

E_4：从一批产品中任意抽检 5 件，观察其中的次品数.

E_5：在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命.

E_6：在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

随机试验中出现的各种可能结果称为试验的**基本结果**. 显然，随机试验具有两个或两个以上的基本结果，而且事前不知哪个结果会在试验中出现.

随机试验的基本结果，可以按不同的方法来定义，这取决于试验的目的. 例如，从一批产品中任意抽检一件产品是一个随机试验，如果抽检的目的仅是考察产品是正品还是次品，那么试验就只有两个基本结果（产品是正品和产品是次品）；如果抽检的目的是考察产品是一等品、二等品还是等外品，则试验就有三个基本结果.

定义 1.1 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验的**样本空间（sample space）**，记为 S. 样本空间中的元素，即 E 的每个基本结果，称为**样本点（sample point）**.

下面列出例 1.1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 S_k：

$$S_1=\{H,T\}. \qquad S_2=\{1,2,,3,4,5,6\}.$$
$$S_3=\{0,1,2,\cdots\}. \qquad S_4=\{0,1,2,3,4,5\}.$$
$$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}. \qquad S_6=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

1.1.2 随机事件

现在利用样本空间的概念，给出随机事件的定义.

定义 1.2 称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件（random event）**，简称**事件（event）**.

随机事件通常利用大写英文字母如 A、B、C 等来表示. 在一次试验中，当且仅当这一子集（事件）中的某个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，将只含有一个样本点的事件称为**基本事件**；样本空间 S 包含所有的样本点，它在每次试验中都发生，称 S 为**必然事件**；事件 $\phi(\phi\subset S)$不包含任何样本点，它在每次试验中都不发生，称 ϕ 为**不可能事件**.

下面列举一些随机事件的例子：

例 1.2 在例 1.1 的 E_2 中，事件 A_1：“出现奇数点”，即

$$A_1=\{1,3,5\}.$$

在例 1.1 的 E_3 中，事件 A_2：“一昼夜收到的呼叫次数不超过 100 次”，即

$$A_2=\{0,1,2,\cdots,100\}.$$

在例 1.1 的 E_5 中，事件 A_3：“寿命小于 1000 小时”，即

$$A_3=\{t \mid 0\leqslant t<1000\}.$$

1.1.3　随机事件间的关系及运算

在随机试验中，有的随机事件比较简单，有的比较复杂．为了从简单的事件出发来研究一些复杂的事件，还需要讨论随机事件之间的关系与运算．由于随机事件是样本空间的子集，因此事件的关系和运算与集合的关系和运算是一致的．下面分别给出这些运算和关系在概率论中的含义．

设随机试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集．

（1）**包含关系：**若 $B\subset A$，则称事件 A 包含事件 B，也称事件 B 含在事件 A 中，它表示：若事件 B 发生必导致事件 A 发生．

（2）**相等关系：**若 $B\subset A$ 且 $A\subset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$．

（3）**事件的和：**称事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**和事件**．事件 $A\cup B$ 发生意味着事件 A 发生或事件 B 发生，即事件 A 与事件 B 至少有一发生．

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件．

（4）**事件的积：**称事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**积事件**．事件 $A\cap B$ 发生意味着事件 A 发生且事件 B 发生，即事件 A 与事件 B 都发生．$A\cap B$ 简记为 AB．

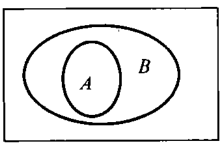
类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件．

（5）**事件的差：**称事件 $A-B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$ 为事件 A 与事件 B 的差事件．事件 $A-B$ 发生意味着事件 A 发生且事件 B 不发生．

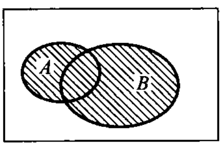
（6）**互不相容（互斥关系）：**若 $A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**，又称事件 A 与事件 B **互斥**．事件 A 与 B 互不相容意味着事件 A 与 B 不可能同时发生．

（7）**互逆关系（对立关系）：**若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**，又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$．

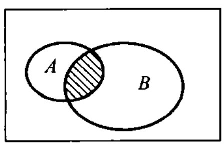
在讨论随机事件的关系与运算时，常借助于维恩（Venn）图来帮助理解，显得直观简洁．我们用以下的图形（见图 1.1）来表示上述事件间的关系与运算．矩形表示样本空间 S，椭圆 A 与 B 表示事件 A 与 B．



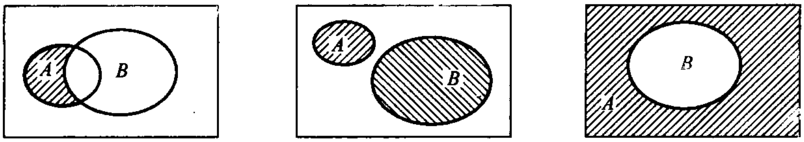
$A\subset B$



$A\cup B$



$A\cap B$



$A-B$　　　　$A\cap B=\phi$　　　　$A\cup B=S, AB=\phi$

图 1.1

在进行事件的运算时，经常要用到如下的运算规律.

交换律：$A\cup B=B\cup A$；　　　$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律与对偶律可以推广到有限个事件或可列个事件，如：

$$A\cup(\bigcap_i B_i)=\bigcap_i(A\cup B_i)\text{，}\qquad A\cap(\bigcup_i B_i)=\bigcup_i(A\cap B_i)\text{.}$$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}\text{，}\qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}\text{.}$$

例 1.3　在电路图中，经常出现以下两种电路：并联（见图 1.2）与串联（见图 1.3）. 令 $A_i=\{a_i\text{连通}\}$，$i=1,2,3$，$B=\{MN\text{连通}\}$. 试分别就并联与串联两种情况，利用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示 B.

解　并联：由于 a_1,a_2,a_3 只要有一个连通，则 MN 就连通，所以

$$B=A_1\cup A_2\cup A_3$$

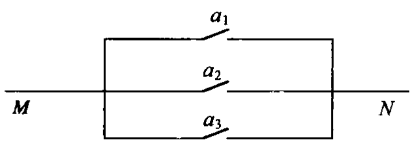


图 1.2　并联电路

串联：由于 a_1,a_2,a_3 要同时连通，MN 才能连通，所以

$$B=A_1\cap A_2\cap A_3$$

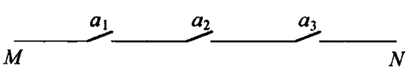


图 1.3　串联电路

例 1.4 设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 的运算及关系表示下列事件：

（1） A,B,C 都发生.

（2） A,B,C 都不发生.

（3） A,B 都发生，而 C 不发生.

（4） A,B,C 至少有一个发生.

（5） A,B,C 中恰有一个发生.

（6） A,B,C 中不多于两个发生.

（7） A,B,C 中不多于一个发生.

（8） A,B,C 中至少有两个发生.

解 记 $F_i\ (i=1,2,\cdots,8)$ 为题中所要求表示的第 i 个事件.

（1）因为“A,B,C 都发生”，所以 $F_1=ABC$.

（2）“A,B,C 都不发生”，意味着“$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 都发生”，因此 $F_2=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

（3） C 不发生，意味着 $\bar{C}$ 发生. 即本题为“$A,B,\bar{C}$ 都发生”，故 $F_3=AB\bar{C}$.

（4）由事件和的定义知，$F_4=A\cup B\cup C$.

（5）“A,B,C 中恰有一个发生”，意味着“A,B,C 中恰有 A 发生或恰有 B 发生或恰有 C 发生”，所以 $F_5=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

（6）“A,B,C 中不多于两个发生”，即为“A,B,C 三个都发生”的逆事件，故

$$F_6=\overline{ABC}.$$

（7）“A,B,C 中不多于一个发生”表示“A,B,C 都不发生或恰有一个发生”，从而

$$F_7=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C.$$

（8）“A,B,C 中至少有两个发生”表示“A,B,C 都发生或恰有两个发生”，因此

$$F_8=ABC\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC.$$

又“A,B,C 中至少有两个发生”意味着“A,B,C 中有 A,B 发生或有 A,C 发生或有 B,C 发生”，所以又有 $F_8=AB\cup AC\cup BC$.

1.2 随机事件的概率

对于一个随机事件（不可能事件与必然事件除外）来说，在一次试验中，它可能发生，也可能不发生. 另外，在随机试验中，有的随机事件在试验中发生的可能性较大，而有的随机事件在试验中发生的可能性较小. 我们希望找到一个数量指标，来表征随机事件在试验中发生的可能性大小，下面先从频率讲起，从而引出这一数量指标，即随机事件的概率.

1.2.1 频率

定义 1.3 在相同的条件下，将一个试验重复进行 n 次，在这 n 次试验中，记事件 A 发生的次数为 N_A 次，称比值 N_A/n 为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**（**frequency**），记为 $f_n(A)$.

根据频率的定义，不难验证频率具有下列基本性质：

性质 1 非负性 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

性质 2 规范性 $f_n(S)=1$；

性质 3 可加性 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

人们经过长期的实践发现，虽然一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，但在大量的重复试验中，一个随机事件发生的频率具有稳定的特性.

具体地说，经过大量的试验证实，在 n 次试验中，事件 A 发生了 N_A 次，则当 n 很大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)=N_A/n$ 总是稳定地在某个数值附近摆动；当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，并逐渐稳定于某个常数. 这种稳定性就是我们通常所说的“统计规律性”.

例如，投掷一枚均匀的硬币，观察出现的是正面还是反面. 随着试验次数的增大，出现“正面”这一事件的频率总是稳定在 0.5 附近. 这种试验历史上有多人做过（读者也可以自己做一做），如表 1-1 所示.

表 1-1　　掷硬币试验数据表

试验者	投掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

再如，考虑某种油菜种子发芽率的试验. 从一大批该种油菜种子中抽取 8 批种子，分 8 次做发芽试验. 随着试验中种子数的增大，种子的发芽率总是稳定在 0.900 附近. 其结果如表 1-2 所示.

表 1-2　　油菜种子发芽率试验数据表

试验批次	种子数	发芽种子数	种子发芽率
1	10	8	0.800
2	100	87	0.870
3	250	229	0.916

续表

试验批次	种子数	发芽种子数	种子发芽率
4	400	364	0.910
5	700	638	0.911
6	1500	1342	0.895
7	2000	1792	0.896
8	3000	2712	0.904

从以上试验可以看出，一个事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率 $f_n(A)$ 具有随机波动性．当试验的次数 n 较小时，随机波动的幅度较大；当试验的次数 n 较大时，随机波动的幅度较小．而且，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数．从理论上说，我们可以将试验重复大量的次数，然后计算出事件 A 的频率 $f_n(A)$，并以它来表征随机事件 A 在试验中发生的可能性大小．但是在实际生活中，我们不可能也没有必要对每一个事件都做大量的试验，然后计算出事件的频率，并以它来表征随机事件 A 在试验中发生的可能性大小，同时这样做也不便于理论研究．为此，我们从频率的稳定性和频率的性质得到了启发，给出表征随机事件发生的可能性大小的数量指标，即随机事件的概率．

1.2.2 概率的公理化定义及性质

定义 1.4 设 S 是随机试验 E 的样本空间．按照某种方法，对随机试验 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，且满足以下三条公理：

（1）非负性　对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性　对必然事件 S，有 $P(S)=1$；

（3）可列可加性　对于两两互不相容的可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+\cdots. \tag{1.2.1}$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率（probability）**.

在本书第 5 章中，将证明当试验的次数 $n\to\infty$ 时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于事件 A 的概率 $P(A)$．基于这一事实，我们有理由利用事件 A 的概率 $P(A)$ 来表征随机事件 A 发生的可能性大小．

概率的公理化体系是前苏联数学家科尔莫戈罗夫（1903－1987）在 1933 年提出的，它的出现迅速获得举世公认，从此概率论被认为是数学的一个分支．有了这个公理化体系之后，概率论得到迅速发展，它是概率论发展史上的一个里程碑．

利用概率的定义，我们可以推出概率具有以下重要性质．

性质 1 对不可能事件 ϕ，有 $P(\phi)=0$.