



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学物理

(第四版)

下册

主 编 王纪龙 周希坚

副主编 杨毅彪 郝玉英 崔彩娥



科学出版社

(O-4185.0102)

大学物理

(第四版) 下册

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-030171-0



9 787030 301710 >

高等教育出版中心 数理出版分社

电 话: 010-64015178

E-mail: mph@mail.sciencep.com

定 价: 57.00 元(含上、下册)

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学物理

(第四版)

下 册

主 编 王纪龙 周希坚

副主编 杨毅彪 郝玉英 崔彩娥

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是根据《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求(正式报告稿)》,按照 21 世纪人才培养模式的需要和课程体系、教学内容改革的要求,在广泛吸取了近年来出版的国内外一些较为优秀的同类教材的成功经验后,在第三版基础上编写而成的。全书分上、下两册。上册包括力学、热物理学和电磁学;下册包括振动和波动、光学和近代物理基础;配套的《学习指导与习题选解》另行出版。

本书可作为高等工科大学各专业和其他类院校非物理类专业本、专科学生的大学物理教材,也可用作成人教育的大学物理教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理. 下册/王纪龙,周希坚主编. —4 版. —北京:科学出版社,2011
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-030171-0

I. 大… II. ①王… ②周… III. 物理学-高等学校-教材 IV. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 016367 号

责任编辑:昌 盛/责任校对:陈丽珠

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年1月第 二 版 印张:44 1/2

2007年8月第 三 版 字数:844 000

2011年1月第 四 版 2011年3月第十三次印刷

印数:60 001—61 000

定价:57.00 元(含上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书自第一版到第三版出版发行以来,已经被多所院校的大学物理课程选为教材,根据广大教师与读者反映的情况和提出的建议,对原书的内容进行了进一步修订,形成了《大学物理(第四版)》。在此,衷心感谢多年来使用并关心本教材的广大师生,并欢迎继续对本书中的不足或错误提出批评指正。

第四版内容的撰写仍保持原有的体系和风格,涵盖了2006年教育部新颁布的“非物理类理工学科大学物理课程基本要求”,反映了教学改革和精品课程建设的最新成果,并考虑了当前学生的实际,加强了基础理论的叙述,加强对学生分析问题和解决问题能力的培养。

参加本书编写与修订的人员均为太原理工大学教师,分工如下:李孟春编写第一章;黄平编写第二章;张叶编写第三章;邓霄编写第四章;刘红利编写第五章;杨跃俊编写第六章;张绪树编写第七章;朱林彦编写第八章;郝玉英编写第九章;薛萍萍编写第十章;乔记平编写第十一章;王丽平编写第十二章;贺晓红编写第十三章;王冰洁编写第十四章;武媛编写第十五章;张彩霞编写第十六章;刘瑞萍编写第十七章;崔彩娥编写第十八章;杨毅彪编写第十九章及附录。王纪龙、周希坚、陈世杰负责全书统校工作。

全书论述力求语言准确、简洁,例题、习题围绕教学内容,力争经典、难度与数量适当。若有不当之处,恳请使用本书的同行与读者提出宝贵的批评意见。

王纪龙

2010年12月于太原

本书中涉及的物理量和单位

量的名称	量的符号	单位名称	单位符号	量 纲	备 注
振 幅	A	米	m	L	主要用于光谱学
周 期	T	秒	s	T	
频 率	V	赫[兹]	Hz	T^{-1}	
角 频 率	ω	每秒	s^{-1}	T^{-1}	
相 位	φ	—	—	—	
波 长	λ	米	m	L	
波 数	σ	每米	m^{-1}	L^{-1}	
波 速	u, c	米每秒	$m \cdot s^{-1}$	LT^{-1}	
角 波 数	k	每米	m^{-1}	L^{-1}	
波 的 强 度	I	瓦[特]每平方米	$W \cdot m^{-2}$	MT^{-3}	
坡印亭矢量	S	瓦[特]每平方米	$W \cdot m^{-2}$	MT^{-3}	常用分贝 (dB)为单位
声 压	p	帕[斯卡]	Pa	$L^{-1}MT^{-2}$	
声 强 级	L_I	贝	B	—	
折 射 率	n	—	—	—	
光 程 差	δ	米	m	L	
辐[射]出[射]度	$M(T)$	瓦[特]每平方米	$W \cdot m^{-2}$	MT^{-3}	
单色辐出度	$M_\lambda(T)$	瓦[特]每立方米	$W \cdot m^{-3}$	$L^{-1}MT^{-3}$	
单色吸收比	$\alpha(\lambda, T)$	—	—	—	
斯特藩-玻	σ	瓦[特]每平方米	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	$T^{-3}M\Theta^{-4}$	
尔兹曼常量	b	四次方开[尔文]	$m \cdot K$	$L\Theta$	
维 恩 常 量	Φ	焦[耳]	J	L^2MT^{-2}	米 · 开 常用电子伏特 (eV)为单位
逸 出 功	λ_C	米	m	L	
康普顿波长	$h, \hbar$	焦[耳]秒	$J \cdot s$	L^2MT^{-1}	
普朗克常量	Ψ	—	—	—	
波 函 数	$\Psi^* \Psi$	每立方米	m^{-3}	L^{-3}	
概 率 密 度	n	—	—	—	
主 量 子 数	l	—	—	—	
角 量 子 数	m	—	—	—	
磁 量 子 数	s	—	—	—	
自旋量子数	m_s	—	—	—	
自旋磁量子数	A	—	—	—	
质 量 数					

续表

量的名称	量的符号	单位名称	单位符号	量 纲	备 注
电 荷 数	Z	—	—	—	
里德伯常量	R	每米	m^{-1}	L^{-1}	
玻尔磁子	μ_B	焦[耳]每特[斯拉]	$\text{J} \cdot \text{T}^{-1}$	$\text{L}^2 \text{I}$	
核磁子	μ_N	焦每特[斯拉]	$\text{J} \cdot \text{T}^{-1}$	$\text{L}^2 \text{I}$	
质量亏损	B	千克	kg	M	
核的结合能	ΔE	焦[耳]	J	$\text{L}^2 \text{MT}^{-2}$	
比结合能	$\Delta E/A$	焦[耳]	J	$\text{L}^2 \text{MT}^{-2}$	
衰变常数	λ	每秒	s^{-1}	T^{-1}	
半衰期	T	秒	s	T	

目 录

第四篇 振动和波动

第十一章 机械振动	3
11-1 简谐振动	3
* 11-2 阻尼振动 受迫振动 共振	16
11-3 同方向的简谐振动的合成	19
* 11-4 相互垂直的简谐振动的合成	22
习题	25
第十二章 机械波	28
12-1 机械波的产生和传播	28
12-2 平面简谐波的波函数	32
12-3 波的能量 波的强度	37
* 12-4 声波	41
12-5 惠更斯原理	44
12-6 波的叠加原理 波的干涉 驻波	45
* 12-7 多普勒效应	55
习题	58
中外物理学家简介(十)	63

第五篇 光 学

第十三章 几何光学	67
13-1 几何光学的基本定律	67
13-2 光在平面上的反射、折射	70
13-3 光在球面上的反射	71
13-4 光在球面上的折射	74
13-5 透镜	77
13-6 光学仪器	81
习题	83
第十四章 波动光学	85
14-1 光源 光的相干性	85

14-2	光程 光程差	86
14-3	杨氏双缝实验	89
14-4	薄膜干涉	100
* 14-5	迈克耳孙干涉仪	113
14-6	光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理	115
14-7	单缝和圆孔的夫琅禾费衍射	117
14-8	衍射光栅	126
* 14-9	X射线的衍射 布拉格方程	134
14-10	自然光和偏振光	136
14-11	偏振片的起偏和检偏 马吕斯定律	138
14-12	反射和折射时光的偏振	141
* 14-13	光的双折射现象	143
* 14-14	偏振光的干涉 人为双折射 波晶片	150
* 14-15	旋光现象	154
	习题	155
	中外物理学家简介(十一)	161
	中外物理学家简介(十二)	162

第六篇 近代物理基础

第十五章	狭义相对论基础	165
15-1	力学相对性原理	165
* 15-2	迈克耳孙-莫雷实验	168
15-3	狭义相对论的基本假设	170
15-4	几个重要的狭义相对论效应	176
15-5	狭义相对论动力学基础	182
	习题	192
第十六章	从经典物理到量子物理	194
16-1	黑体辐射 普朗克的能量子假说	194
16-2	光电效应 爱因斯坦的光量子论	200
16-3	原子结构和原子光谱 玻尔的量子论	209
	习题	216
	中外物理学家简介(十三)	218
第十七章	量子力学基础	219
17-1	实物粒子的波粒二象性 德布罗意波	219
17-2	波函数及其物理意义	221

17-3 不确定性原理	223
17-4 薛定谔方程	226
17-5 定态问题	229
17-6 氢原子	237
17-7 多电子原子和元素周期表	245
* 17-8 应用专题	249
习题	260
中外物理学家简介(十四)	263
* 第十八章 原子核和基本粒子简介	266
18-1 核的组成和基本性质	266
18-2 核力与原子核结构	269
18-3 原子核衰变	271
18-4 基本粒子简介	275
习题	281
中外物理学家简介(十五)	282
第十九章 天体物理与宇宙学	283
19-1 星体的演化	283
19-2 广义相对论基础	287
19-3 宇宙学简介	291
1901~2006 百年诺贝尔物理学奖获得者简况	298

第四篇 振动和波动

振动是自然界中最常见的运动形式之一。物体在平衡位置附近作具有时间周期性的往复运动,称为机械振动。例如,钟摆的运动,气缸中活塞的运动,一切发声体的运动,晶体中原子的运动等都是机械振动。振动现象是非常普遍的,并不局限于机械振动。振荡电路中电流的变化、电磁场的变化等虽属于不同的运动形式,各自遵循不同的运动规律,但它们都具有许多和机械振动共同的物理特征。故广义地讲,任何一个物理量(如位置矢量、电流、电压、电量、电场强度、磁感应强度等)在某个定值附近作周期性的变化,都可称为振动。

在不同的振动中,最基本最简单的振动是简谐振动。一切复杂的振动都可以分解为若干个简谐振动。甚至从更广泛的意义上讲,任何复杂的非周期性运动,也属于振动的研究范畴,因为非周期性运动可以分解为频率连续分布的无限多个简谐振动的叠加,所以振动是声学、地震学、建筑力学、光学、电工学、无线电技术及原子物理学等不可缺少的基础。

波是振动在空间的传播。所以说,振动和波动关系十分密切,振动是产生波动的根源,而波是振动的传播。波的种类繁多,通常我们可以把它分成两大类:机械振动在弹性媒质中的传播称为机械波;电磁振动在空间的传播称为电磁波。机械波和电磁波是本质上完全不同的两类波,产生的条件和方法不同,与物质相互作用的规律也不一样,但是,它们又有许多波的共同的特征。例如,它们在波动过程中都伴随着能量的传播,它们都能产生反射和折射现象,它们都会出现干涉和衍射现象。不仅如此,机械波和电磁波还遵守一些共同的传播规律,能够用同样的数学方法进行研究和描述。

本篇将在第十一章对简谐振动作比较详细的讨论;在第十二章对机械波的基本规律作比较细致的阐述。

第十一章 机械振动

11-1 简谐振动

一、简谐振动的特征

质量为 m 的物体系于一端固定的轻弹簧(弹簧的质量相对于物体来说可以忽略不计)的自由端,这样的弹簧和物体系统就称为弹簧振子。

如将弹簧振子水平放置,当弹簧为原长时,物体所受的合力为零,处于平衡状态,此时物体所处的位置就是平衡位置,如果把物体略加移动后释放,这时弹簧被拉长或被压缩,便有指向平衡位置的弹性力作用在物体上,迫使物体返回平衡位置。这样,在弹性力的作用下,物体就在其平衡位置附近作往复运动,如图 11-1 所示。

若取物体的平衡位置为坐标原点,物体的运动轨道为 x 轴,向右为正方向,在小幅振动情况下,按照胡克定律,物体所受的弹性力 f 与弹簧的形变量(即物体相对于平衡位置的位移 x)成正比,即

$$f = -kx$$

式中 k 是弹簧的劲度系数,负号表示力与位移的方向相反。

根据牛顿第二定律,物体的加速度为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m}x$$

对于一个给定的弹簧振子, $m > 0$, $k > 0$, 且 m 与 k 均为常量,故可设

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (11.1)$$

代入上式得
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (11.2)$$

或
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

这一微分方程的解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.3)$$

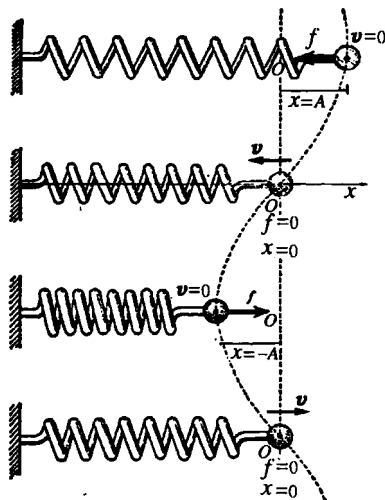


图 11-1 弹簧振子的振动

或

$$x = A \sin(\omega t + \varphi'_0)$$

式中 $\varphi'_0 = \varphi_0 + \pi/2$, 显然 A 和 φ_0 (或 φ'_0) 为积分常数, 它们的物理意义和确定方法将在后面讨论. 由上可见, 物体相对平衡位置的位移按余弦 (或正弦) 函数关系随时间变化, 具有这种特征的振动称为简谐振动. 为了方便起见, 本书均采用余弦函数表达式 [即式 (11.3)] 为简谐振动的运动方程.

根据速度和加速度的定义, 我们可以得到物体作简谐振动时的速度和加速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= -v_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &= -a_m \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (11.5)$$

式中 $v_m = \omega A$ 和 $a_m = \omega^2 A$ 称为速度幅值和加速度幅值. 由此可见, 物体作简谐振动时, 其位移、速度及加速度都是随时间作周期性变化的, 图 11-2 给出了 $\varphi_0 = 0$ 时简谐振动的位移、速度和加速度与时间的关系. 可见物体作简谐振动时位移、速度及加速度都随时间周期性变化.

通过弹簧振子的振动可知, 如果物体受到的力的大小总是与物体对其平衡位置

的位移成正比、而方向相反, 那么, 该物体的运动就是简谐振动, 这是物体作简谐振动的动力学特征, 这种性质的力称线性回复力. 从式 (11.2) 还可以看出, 作简谐振动的物体的加速度的大小总是与其位移的大小成正比、而方向相反, 这一结论通常称为简谐振动的运动学特征. 式 (11.3) 常称作简谐振动表达式. 无论是运动学特征、动力学特征, 还是简谐振动的表达式 [即式 (11.3)], 都可以作为一个系统是否作简谐振动的判据.

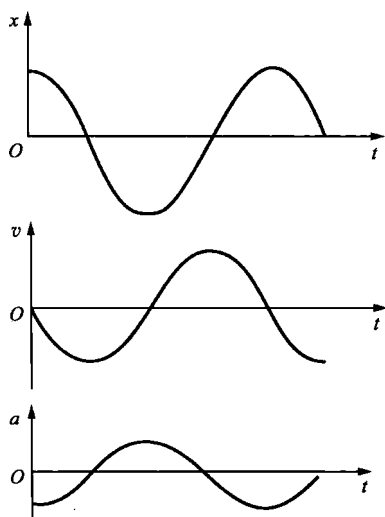


图 11-2 简谐振动的 $x-t$ 图线、 $v-t$ 图线与 $a-t$ 图线 ($\varphi=0$)

二、简谐振动的振幅、周期、频率和相位

1. 振幅

在简谐振动表达式中, 因余弦 (或正弦) 函数的绝对值不大于 1, 所以物体的振动范围只能处于 $+A$ 与 $-A$ 之间, 通常把简谐振动的

物体离开平衡位置的最大位移的绝对值 A 叫做振幅。

2. 周期和频率

振动量完全重复一次所需要的时间,叫做振动的周期,常用 T 表示。由于每隔一个周期,振动状态就完全重复一次,所以

$$x = A\cos[\omega(t+T) + \varphi_0] = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

显然,满足上述方程的 T 的最小值应为 $\omega T = 2\pi$, 故有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (11.6)$$

单位时间内(即 1 s 内)物体所作的完全振动的次数称做振动频率,用 ν 表示, ν 的单位为赫兹(Hz),显然频率与周期的关系是

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{或} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (11.7)$$

所以 ω 表示物体在 2π 秒的时间内所作的完全振动次数,称为振动的角频率,也称圆频率,它的单位是 $\text{秒}^{-1}(\text{s}^{-1})$ 。

对于弹簧振子来讲, $m\omega^2 = k$, 即 $\omega = \sqrt{k/m}$, 所以弹簧振子的周期和频率为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

可见, ω 、 T 与 ν 都是由谐振系统本身的特性来决定的, 因此我们称之为谐振系统的固有周期和固有频率。

利用 T 和 ν , 谐振动表达式可写成

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \text{或} \quad x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

3. 相位和初相

由式(11.3)、(11.4)和(11.5)可知,在角频率 ω 和振幅 A 确定的情况下,振动物体在任一时刻 t 的运动状态(指位移、速度与加速度)都由 $(\omega t + \varphi_0)$ 决定。 $(\omega t + \varphi_0)$ 是决定简谐振动物体运动状态的物理量,称为振动的相位。例如 $\omega t + \varphi_0 = \pi/2$ 时, $x=0$, $v=-\omega A$, 表明此物体在平衡位置以最大速率向负方向运动; 当 $\omega t + \varphi_0 = 0$ 时, $x=A$, $v=0$, 表明此时物体在正向最大位移处, 且速度为零, 等等。物体在进行一次完全振动的过程中, 每一时刻的运动状态都不相同, 各个不同的运动状态都通过与之对应的不同相位反映出来。此外, 振动经历一个周期后, 相位由 $\omega t + \varphi_0$ 变为 $\omega(t+T) + \varphi_0 = 2\pi + (\omega t + \varphi_0)$, 亦即振动物体的相位经历了 2π 的变化, 物体恢复到原来的运动状态。可见, 用相位描述物体的运动状态, 还能充分体现

出简谐运动的周期性.

当 $t=0$ 时, 相位 $\omega t + \varphi_0 = \varphi_0$, 故 φ_0 叫做初相位, 简称初相. 它是决定初始时刻振动物体运动状态的物理量.

相位概念的重要性还在于比较两个谐振动之间在“步调”上的差异. 设有两个同频率的谐振动, 它们的表达式分别是

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

即它们在任意时刻的相位差恒等于其初相位差. 当 $\Delta\varphi = 2k\pi$ (k 为整数) 时, 这时两振动物体将同时到达各自同方向的位移的最大值, 同时通过平衡位置且向同方向运动, 它们的步调完全一致, 我们称它们“同相”; 当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ (k 为整数) 时, 两个谐振动物体, 一个到达正方向最大位移处, 而另一个却恰到负方向最大位移处, 它们同时到达平衡位置但运动方向相反, 即两个振动的步调完全相反, 我们称这样的两个振动为“反相”.

当 $\Delta\varphi$ 为其他值时, 如果 $\varphi_{20} - \varphi_{10} > 0$, 我们称第二个简谐振动超前第一个振动 $\Delta\varphi$, 或者说第一个振动落后于第二个振动 $\Delta\varphi$.

相位不但可用来比较简谐振动中同一物理量变化的步调, 也可以比较不同物理量之间变化的步调. 如果我们把速度和加速度的表达式(11.4)与(11.5)改写成

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -a_m \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

可以看出, 速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$, 加速度的相位比位移的相位超前(或落后) π , 即二者恒反相. 速度的相位比加速度落后 $\pi/2$ (或超前 $3\pi/2$).

4. 振幅 A 和初相 φ_0 的确定

设 $t=0$, 物体相对于平衡位置的位移为 x_0 , 速度为 v_0 .

代入式(11.3)和(11.4)中, 得

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (11.8)$$

由式(11.8)可求得

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \varphi_0 = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0}) \end{cases} \quad (11.9)$$

其中振动物体在 $t=0$ 时的位移 x_0 和初速度 v_0 称作振动的初始条件. 显然由谐振动的初始条件 x_0 与 v_0 可以确定振幅 A 和初相 φ_0 . 在确定初相 φ_0 时, 我们不妨采用式(11.10)

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0, & \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{A} \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0, & \sin \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega A} \end{cases} \quad (11.10)$$

联合确定 φ_0 的值. 即先由 $\cos \varphi_0 = x_0/A$ 可定出 φ_0 的两个可能值, 再由 $\sin \varphi_0 = -v_0/\omega A$ 的正负号, 在这两个可能值中进行取舍确定 φ_0 的值.

例 11-1 如图 11-3, 一弹簧振子放置在光滑水平面上. 已知弹簧的劲度系数 $k = 1.60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 物体的质量 $m = 0.40 \text{ kg}$. 试就下面两种情况分别求出谐振动方程:

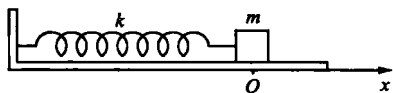


图 11-3 例 11-1 图

(1) 将物体从平衡位置向右移到 $x = 0.10 \text{ m}$ 处后静止释放;

(2) 将物体从平衡位置向右移到 $x = 0.10 \text{ m}$ 处后, 并给物体以向左的速度 $0.20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

解 (1) 弹簧振子的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.60}{0.40}} \text{ s}^{-1} = 2 \text{ s}^{-1}$$

根据初始条件, $t=0$ 时, $x_0 = 0.10 \text{ m}$, $v_0 = 0$, 故由式(11.9)和(11.10)得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.10 \text{ m}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{0.10}{0.10} = 1, \text{ 故 } \varphi_0 = 0$$

这样谐振动方程为

$$x = 0.10 \cos(2.0t) \text{ m}$$

(2) 依据初始条件, $t=0$ 时, $x_0 = 0.10 \text{ m}$, $v_0 = -0.20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 故由式(11.9)得振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0.10)^2 + \left(\frac{-0.20}{2.0}\right)^2} \text{ m} = 0.1\sqrt{2} \text{ m}$$

又由式(11.10)得

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{0.1}{0.1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{或} \quad -\frac{\pi}{4}$$