



状元笔记

教材详解

九年级数学下

R

丛书主编：洪林旺 本册主编：张攀波 吴国庆



YZLI0890150609

昔日状元读书留笔记
今朝我用笔记中状元

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE



龍門書局

龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

★内含教材习题答案★

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUAN BILJI
JIAOCAI XIANGJIE

九年级数学 下



丛书主编：洪林旺

本册主编：张肇波 吴国庆

编委：徐元生 郭光辉 周忠平 郭咏松

郭小强 陈敏 林畅 徐建英

刘建明 高明艳 梅真颜 徐正佾

肖焰松 万小华 黄新元 舒文桥

谢志勇 舒新咏 齐志斌 何春平

靖泽川



YZLI0890160609

龍門書局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010-64031958;13801093426

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

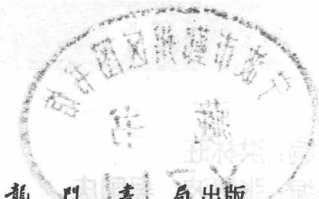
状元笔记教材详解. 九年级数学. 下:R/洪林旺丛书主编;张攀波,吴国庆本册主编. —修订版. —北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-1702-6

I. 状… II. ①洪…②张…③吴… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 161431 号

责任编辑:张凤玲 梁 莉/封面设计:魏晋文化



龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

www.longmenbooks.com

北京汇林印务有限公司 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2008 年 10 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2011 年 9 月第三次修订版 印张:9 1/2

2011 年 9 月第八次印刷 字数:382 000

定 价: 20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

他山之石，可以攻玉

——《状元笔记·教材详解》前言

是否，在冥思苦想之余，仍感困惑？

是否，在洗耳恭听之时，还是无助？

是否，在挑灯夜战之后，犹觉茫然？

问鼎状元，如千军万马过独木桥。父母、老师不要求每一位孩子、每一位学生都能力争状元，但如果我们都来借鉴、掌握状元的学习方法、学习技巧，那么，我们就能跳出题海，用较少的时间取得良好的学习效果。因此，龙门书局将全国各省高考状元的各个学科的学习心得和方法技巧，经过名师整理、挖掘与提升出来，形成《状元笔记·教材详解》，与同学们一起分享。

它用“详解”破译你的困惑；用“技巧”解除你的无助；用“警示”驱走你的茫然。

翻开这本笔记，你将看到的经典栏目有：

教材详解：全面、细致地讲解教材上的知识点，深入剖析其内涵，并配典型例题对其进行巩固。一讲一练夯实基础，使你考试稳拿基础分。

解题技巧：归纳各节的解题方法和技巧，辅以例题，通过对例题的分析和点评，让你掌握解题所用的通性通法以及小窍门，快速提高解题能力。

状元笔记：总结规律、提炼学习方法和技巧，让你掌握状元的学习方法。

陷阱警示：梳理学习过程中遇到的易错点和易混点，通过错因透视，扫除学习中的困惑和障碍。

参考答案及点拨：给出本书所有习题以及教材习题的答案，并用精细的分析，对习题进行点拨。

亲爱的同学，“他山之石，可以攻玉”，取状元学习之精华，架成功积累之天梯。如能掌握本书的方法和技巧，到时，你将成为或班级、或学校、或县市、或全省乃至全国的佼佼者。

在学习过程中有什么疑问或本书如有遗漏之处，请与 zyxxbj@163.com 联系，不胜感谢！

洪林旺

2011年9月

《状元笔记·教材详解》学生顾问团



·赵胜·

山西省文科状元
中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



·卢胜·

浙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：卡尔维诺文集

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统的梳理，无论是预习时或复习时，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



·武容蓉·

河北省文科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习习惯，如制订学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



·刘诗泽·

黑龙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



·邱文·

四川省文科状元
北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远

学习方法、技巧：1.要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2.学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3.学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4.坚持锻炼，劳逸结合。



·林叶·

江苏省文科状元
北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



·白木·

北京市理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



·朱师达·

湖北省理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，
有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1.知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2.知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3.整体把握兴趣和强弱科的平衡。4.正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



目 录 CONTENTS

第二十六章 二次函数

1

- 26.1 二次函数及其图象 2
- 26.2 用函数观点看一元二次方程 39
- 26.3 实际问题与二次函数 57
- 数学活动 71
- 本章小结 75

第二十七章 相似

88

- 27.1 图形的相似 89
- 27.2 相似三角形 102
- 27.3 位似 139
- 本章小结 154

第二十八章 锐角三角函数

168

- 28.1 锐角三角函数 169
- 28.2 解直角三角形 191
- 本章小结 210

第二十九章 投影与视图

223

- 29.1 投影 224
- 29.2 三视图 241
- 29.3 课题学习与数学活动 258
- 本章小结 266

期末复习

277

2012 年中考数学模拟题

290

第二十六章

二次函数



二次函数的图象——抛物线,是人们最为熟悉的曲线之一,如桥拱、隧道、蔬菜大棚等都给我们以抛物线的形象。像商品经营中的最大利润问题,工农业生产中的最大产量问题等都要用到二次函数知识。

本章学习目标

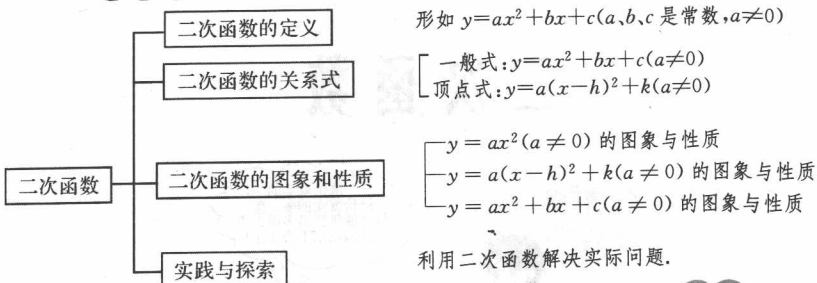
- ◆根据二次函数的表达式确定二次函数的开口方向、对称轴和顶点坐标。
- ◆结合图象理解二次函数的增减性、最大(小)值和图象的对称性。
- ◆理解一元二次方程与二次函数的关系,并能利用二次函数的图象求一元二次方程的近似根。
- ◆能利用二次函数解决实际问题,能对变量的变化趋势进行预测。

26.1 二次函数及其图象



整体感知

概念图



要点



教材详解

26.1.1 二次函数

知识点一 二次函数的定义

【例1】 某广告公司设计一幅周长为 16 米的矩形广告牌, 如果设矩形的一边长为 x 米, 广告牌的面积为 S 平方米.

(1) 请写出此广告牌面积 S 与一边长 x 之间的函数关系式;

(2) 所列的函数应该叫什么函数?

解析: 如图 26-1-1, 设矩形的一边长为 x 米, 则相邻另一边长为 $(8-x)$ 米, 根据矩形的面积 = 矩形的长 $\times$ 矩形的宽可求 S 与 x 的函数关系式.

解: (1) $S=x(8-x)$, 整理, 得 $S=-x^2+8x (0 < x < 8)$.

(2) 这里 S 是用自变量 x 的二次式表示的, 应该叫做二次函数.

一般地, 形如 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫做二次函数, 其中 x 是自变量, a, b, c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

详解 (1) 在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 中, a 必须不等于 0, 因为 $a=0$ 时, 此式子变为 $y=bx+c$ 的形式, 就不是二次函数了;

(2) 任何一个二次函数解析式都可化成 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的形式, 因此, 把 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 叫做二次函数的一般式;

(3) 在 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 中, x 的取值范围是全体实数.

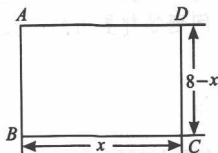


图 26-1-1

【例2】 下列函数中，是关于 x 的二次函数的是_____ (填序号)。

(1) $y = -3x^2$; (2) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; (3) $y = 3x^2 - 4 - x^3$;

(4) $y = -2 - \frac{1}{3}x^2$; (5) $y = ax^2 + 3x + 6$; (6) $y = \sqrt{x^2 + 2x} + 3$ 。

解析：紧扣二次函数的定义去判断，(1)、(4)符合二次函数的条件；(2)中 $x^2 + \frac{1}{x}$ 不是关于 x 的整式，而是分式；(3)中 x 的最高次数不是2，而是3；(5)中二次项系数 a 可能为0；(6)中 $\sqrt{x^2 + 2x}$ 不是整式而是根式，所以(2)、(3)、(5)、(6)均不符合二次函数的条件。

答案：(1)、(4)

状元笔记

方法技巧：判断一个函数是否是二次函数，应抓住三个特征：

- (1) 经整理后，函数表达式是含自变量的整式；
- (2) 自变量的最高次数为2；
- (3) 二次项系数不为0，尤其是含有字母系数的函数，应特别注意含字母的二次项系数是否为0。

知识点二 列实际问题中的二次函数关系式

【例3】 几位同学聚会，每两个人之间握手一次，试写出握手的总数 m 与参加聚会的人数 n 之间的函数关系式。

解析： n 位同学中，因为每人除自己之外都要与其余同学分别握手一次，即握 $(n-1)$ 次手，考虑到两位同学彼此的握手只算一次，所以 n 位同学共握手 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。

$$\text{解：} m = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

【例4】 某果园有100棵橙子树，每一棵平均结600个橙子，现准备多种一些橙子树以提高产量，但是如果多种树，树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少，根据经验估计，每多种一棵树，平均每棵树就会少结5个橙子。

(1) 假设果园增加 x 棵橙子树，这时平均每棵树结多少橙子？

(2) 如果果园橙子的总产量为 y 个，请写出 y 与 x 之间的关系式，并确定自变量 x 的取值范围。

解析：果园增加 x 棵橙子树后，果园共有 $(100+x)$ 棵橙子树，这时平均每棵树结 $(600-5x)$ 个橙子，所以总产量 $y = (600-5x)(100+x)$

解：(1) 设增加的橙子树为 x 棵，平均每棵树结 $(600-5x)$ 个橙子；

(2) $y = (600-5x)(100+x)$ ，整理，得 $y = -5x^2 + 100x + 60000$ 。 ($0 \leq x < 120$)

状元笔记

规律总结：列实际问题中的二次函数的一般步骤：

1. 审清题意，找出实际问题中的已知量与未知量，并分析它们之间的关系；
2. 建立二次函数模型，并将解析式转化为一般形式；
3. 联系实际，确定自变量的取值范围。



解题技巧

技巧1 根据二次函数定义解题.

【例5】 已知函数 $y=(m-1)x^{m^2+1}+5x+3$ 是二次函数,求 m 的值.

解析:函数 $y=(m-1)x^{m^2+1}+5x+3$ 是二次函数,则 x 的次数 $m^2+1=2$,解得 $m=\pm 1$,这时还要考虑二次项系数 $m-1\neq 0$,即 $m\neq 1$,所以 $m=-1$.

解: $\because y=(m-1)x^{m^2+1}+5x+3$ 是二次函数.

$\therefore m^2+1=2$,且 $m-1\neq 0$, $\therefore m=-1$.

特别提醒: 已知一个函数是二次函数求字母系数的值时,根据定义必须满足两个条件:①自变量的最高次数为2;②二次项系数不为0.二者缺一不可.特别容易忽略二次项系数不为0这个条件.

技巧2 分析图形特点,建立函数关系.

【例6】 如图 26-1-2,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=10\text{cm}$, $BC=20\text{cm}$, P 、 Q 两点同时从 A 点出发,分别以 1cm/s 和 2cm/s 的速度沿 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D\rightarrow A$ 运动,当 Q 点回到 A 点时, P 、 Q 两点即停止运动,设点 P 、 Q 运动的时间为 t 秒.当 P 、 Q 分别在 AB 边和 BC 边上运动时,设以 P 、 B 、 Q 为顶点的三角形面积为 S ,请写出 S 关于 t 的函数解析式及自变量 t 的取值范围.

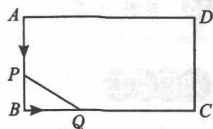


图 26-1-2

解析:由题意 $AP=t$, $\therefore BP=10-t$; $AB+BQ=2t$, $\therefore BQ=2t-10$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} BQ \cdot PB = \frac{1}{2} (2t-10)(10-t).$$

由于 P 在 AB 边上, Q 在 BC 边上, $\therefore 0 < AP < 10$.

$10 < AB+BQ < 30$,即 $0 < t < 10$ 且 $10 < 2t < 30$

可求自变量 t 的取值范围.

解:由题意,得 $BP=10-t$, $BQ=2t-10$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} (2t-10)(10-t) = -t^2 + 15t - 50.$$

由题意,得 $\begin{cases} 0 < t < 10 \\ 10 < 2t < 30 \end{cases}$,则 t 的取值范围为 $5 < t < 10$.

规律总结: 列几何图形中函数关系时,常用到周长公式、面积公式和体积公式,有时借助图形的性质解决问题,自变量的取值范围由点运动的位置确定,请思考当 P 、 Q 分别在 BC 、 CD 边上或 P 、 Q 分别在 BC 、 DA 边上时,如何求此题.



陷阱警示

易错点1 片面理解定义,丢失条件,导致错误.

形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函数叫二次函数,其中隐含条件 $a\neq 0$ 不可忽视.

【例 7】如果函数 $y=(n-3)x^{n^2-3n+2}+nx+1$ 是二次函数,试求 n 的值.

正解:∵ 函数 $y=(n-3)x^{n^2-3n+2}+nx+1$ 是二次函数.

$$\therefore \begin{cases} n^2-3n+2=2 \\ n-3 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } n=0.$$

纠错秘方:由于当 $n=3$ 时,函数为 $y=3x+1$,不是二次函数,错误原因是二次函数定义理解片面,丢失了“ $a \neq 0$ ”的条件.

错解:根据题意,得 $n^2-3n+2=2$,解得 $n_1=0$,
 $n_2=3$.

易错点 2 审题不清导致解题错误.

解应用题时,要注意抓关键词,如“进价”、“售价”、“涨价”、“利润”、“利润率”、“销量”等,特别注意题中字母所代表的意义.

【例 8】某商店将每件进价为 10 元的商品按每件 12 元出售时,一天可卖出 150 件,该商店经过调查发现,该商品每提价 0.1 元,其销量下降 5 件,设该商品每件提高 x 元时,每天的销售利润为 y 元,求 y 与 x 的函数关系式.

$$\begin{aligned} \text{正解: } y &= (12-10+x) \\ &\left(150-\frac{x}{0.1} \times 5\right) \\ &= (2+x)(150-50x) = \\ &-50x^2+50x+300. \end{aligned}$$

$$\text{错解 1: } y = (12-10+x)(150-5x) = -5x^2 + 140x + 300.$$

$$\text{错解 2: } y = (12+x)\left(150-\frac{x}{0.1} \times 5\right) = -50x^2 - 450x + 1800.$$

$$\text{错解 3: } y = (x-12)\left(150-\frac{x-12}{0.1} \times 5\right) = -50x^2 + 1350x - 9000.$$

纠错秘方:错解 1 忽略了销售件数与提高价格的关系,误认为商品每件提高 x 元,其销量下降 $5x$ 件;错解 2 不理解每件商品的利润应为售价减进价.错解 3 将字母 x 看成了售价,所以仔细读题,审题是解题的重要环节,切不可扫描式地看题.



轻松练习

1. 下列函数中一定是二次函数的是

()

A. $y=2x^2+\frac{1}{x}$

B. $y=ax^2+bx+c$

C. $y=(x+1)(x-1)$

D. $y=\sqrt{x^2+2x+1}$

2. $y=mx^{m^2+3m+2}$ 是二次函数,则 m 的值为

()

A. 0 或 -2

B. 0 或 3

C. 0

D. -3

3. 半径是 3 的圆,如果半径增加 $2x$,面积 S 与 x 之间的函数关系是

()

A. $S=2x(x+3)^2$

B. $S=9\pi+x$

C. $S = \pi(2x-3)^2$

D. $S = \pi(2x+3)^2$

4. 一台机器的原价是 30 万元,若每年折旧率为 x ,两年过后这台机器的价值为 y 万元,则 y 与 x 的函数关系式为 ()

A. $y = 30(1-x)^2$

B. $y = 30(1-2x)$

C. $y = 30-x^2$

D. $y = 30(1+x)^2$

5. 边长为 12 cm 的正方形铁片,中间剪去一个边长 x cm 的小正方形铁片,剩下的四方框铁片的面积 $y(\text{cm}^2)$ 与 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式为 _____.

6. 如图 26-1-3,用一段长 30 米的篱笆围成一个一边靠墙(墙的长 unlimited)的矩形菜园 ABCD,设 AB 的边长为 x 米,则菜园的面积 y (单位: 米^2) 与 x (单位: 米) 的函数关系式为 _____ (不要求写自变量的取值范围).

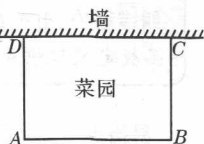


图 26-1-3



参考答案及点拨

[轻松练习]

1. C(点拨: A 中含分式; B 中 $a=0$ 时不为二次函数; D 中含根式)
2. D(点拨: 由 $m^2+3m+2=2$ 且 $m \neq 0$ 可得 $m=-3$)
3. D(点拨: 增加后半径为 $(2x+3)$, $\therefore S = \pi(2x+3)^2$)
4. A(点拨: 根据下降率公式可知 $y = 30(1-x)^2$)
5. $y = 144 - x^2$ (点拨: 剩下四方框的面积为两个正方形的面积差)
6. $y = x \cdot \frac{30-x}{2} = -\frac{x^2}{2} + 15x$.

[教材习题解答]

练习 1(P3)

1. 由题意知圆柱的母线长 $l=r$, 则 $S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2$.
 $\therefore S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2$.
2. $m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n (n \geq 2)$.

26.1.2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象

知识点一 二次函数 $y=ax^2 (a \neq 0)$ 的图象的画法

【例 1】 用描点法画 $y=x^2$ 的图象. ① $y=x^2$ 中的自变量 x 可以是任意实数, 以 0 为中心, 取几个自变量的整数值, 列表找出相应的 y 的对应值;

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...

②根据表中 x 、 y 的数值在坐标平面中描点，再用平滑的曲线顺次连接各点，就得到如图 26-1-4 所示 $y=x^2$ 的图象。

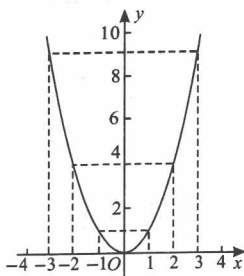


图 26-1-4

描点法画图象的一般步骤

步骤：第一步，列表（表中给出自变量的值及其相对应的函数值）；

第二步，描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标、相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）；

第三步，连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑的曲线连接起来）。

工具箱

规律总结：二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，这条曲线叫做抛物线 $y=x^2$ ，开口向上，对称轴是 y 轴，抛物线与对称轴的交点 $(0,0)$ 叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点。

【例 2】 在同一直角坐标系中，作出下列二次函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$; (2) $y=-\frac{1}{2}x^2$; (3) $y=2x^2$; (4) $y=-2x^2$.

解析：列表时，应在顶点的左右两侧对称地选取自变量 x 的值，并把函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 放在一起，把 $y=2x^2$ 和 $y=-2x^2$ 放在一起，列表时要方便些。一般情况下，包括顶点，描出 5 至 7 个点即可。连线时要注意平滑，图象的两边要伸展出去。

解：①列表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2}x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8
$y=-\frac{1}{2}x^2$	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8
x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y=2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8
$y=-2x^2$	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8

②描点、连线，如图 26-1-5 所示。

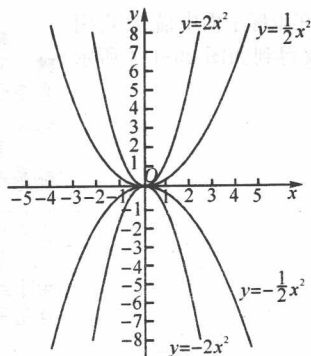


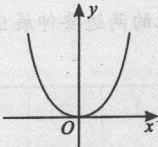
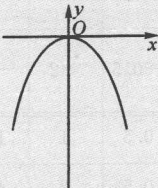
图 26-1-5

 状元
笔记

规律总结: 二次函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象是一条抛物线, 它的对称轴是 y 轴, 顶点是原点 $(0,0)$. 画抛物线一定要注意图象的对称性, 在对称轴左右对称地取 x 的值, 同一个“ y 值”对应着两个“ x 值”, 可一下描出两个点.

知识点二 二次函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象与性质

关于二次函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的性质, 主要是从抛物线的开口方向、顶点坐标、对称轴、函数变化的趋势及函数的最值等方面来考虑, 可以通过下表来表示:

函数	图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	函数变化	最大(小)值
$y=ax^2$ $a>0$		向上	$(0,0)$	y 轴	$x>0$ 时, y 随 x 增大而增大; $x<0$ 时, y 随 x 增大而减小	当 $x=0$ 时, $y_{\text{最小}}=0$
$y=ax^2$ $a<0$		向下	$(0,0)$	y 轴	$x>0$ 时, y 随 x 增大而减小; $x<0$ 时, y 随 x 增大而增大	当 $x=0$ 时, $y_{\text{最大}}=0$

拓展 在二次函数 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象中, 抛物线的形状取决于 a 的值: $a>0 \Leftrightarrow$ 抛物线的开口向上; $a<0 \Leftrightarrow$ 抛物线的开口向下. 其中, 当 $|a|$ 越大时, 抛物线的开口越小, 自左向右图象上升(或下降)的速度越快; 当 $|a|$ 越小时, 抛物线的开口越大, 自左向右图象上升(或下降)的速度越慢.

【例3】根据下列条件求 a 的取值范围：

(1)函数 $y=(a-2)x^2$ ，当 $x>0$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x<0$ 时， y 随 x 的增大而增大；

(2)函数 $y=(3a-2)x^2$ 有最大值；

(3)抛物线 $y=(a+2)x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同；

(4)函数 $y=ax^{a^2+a}$ 的图象是开口向上的抛物线。

解析：(1)由增减性可知， $a-2<0$ ，从而可求 a 的范围；(2)由于函数有最大值，所以其抛物线开口向下，从而得到 $3a-2<0$ ；(3)由两抛物线形状相同可知， $|a+2|=-\frac{1}{2}$ ，从而求出 a 的值；(4)由其图象是开口向上的抛物线可知， $\begin{cases} a^2+a=2 \\ a>0 \end{cases}$ ，从而求出 a 的值。

解：(1)由题意得， $a-2<0$ ，解得 $a<2$ 。

(2)由题意得， $3a-2<0$ ，解得 $a<\frac{2}{3}$ 。

(3)由题意得， $|a+2|=-\frac{1}{2}$ ，解得 $a_1=-\frac{5}{2}$ ， $a_2=-\frac{3}{2}$ 。

(4)由题意得， $\begin{cases} a^2+a=2 \\ a>0 \end{cases}$ ，解得 $a_1=-2$ ， $a_2=1$ ，但 $a>0$ ， $\therefore a=1$ 。

状元笔记

方法技巧：1. 解答此类问题，要注意联想二次函数的图象和性质，抓住形状、开口、最值、增减性等特征，并结合草图来确定二次项系数的取值范围。

2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的形状由 $|a|$ 决定，与 b 、 c 无关，当 $|a|$ 相同时，抛物线的形状相同。

【例4】函数 $y=x^2$ ， $y=\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=3x^2$ 的图象大致如图26-1-6所示，则图中从里向外的三条抛物线对应的函数关系式是_____。

解析：先比较 $|\frac{1}{2}|$ ， $|1|$ ， $|3|$ 的大小关系，由 $|a|$ 越大开口越小，可确定从里向外的三条抛物线所对应的函数依次是 $y=3x^2$ ， $y=x^2$ ， $y=\frac{1}{2}x^2$ 。

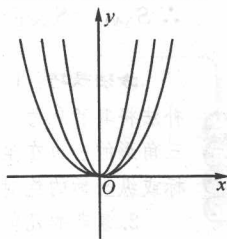


图 26-1-6

解：图中从里向外的三条抛物线对应的函数关系式是 $y=3x^2$ ， $y=x^2$ ， $y=\frac{1}{2}x^2$ 。

状元笔记

规律总结：抛物线的开口大小，只与 $|a|$ 的大小有关， $|a|$ 越大，抛物线的开口越小；反之， $|a|$ 越小，抛物线的开口就越大。



解题技巧

技巧1 数形结合法求解抛物线中的面积问题.

【例5】 如图 26-1-7, 已知 $y = -2x + 3$ 的图象与 $y = x^2$ 的图象交于 A、B 两点, 且与 x 轴、 y 轴交于 D、C 两点, O 为坐标原点.

(1) 求 A、B 的坐标; (2) 求 $S_{\triangle AOB}$.

解析: (1) 求两个函数图象的交点, 解两个关系式联立的方程组即可; (2) 在直角坐标系中求三角形的面积, 必须借助于图象, 依据图象分析, $\triangle AOB$ 的面积可看成 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 的面积之和, 或看成 $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOD$ 的面积之差, 求面积的必要条件是要知道这些三角形的顶点坐标, 因此若用第一种方法, 需要求点 C 的坐标, 即直线与 y 轴的交点; 若用第二种方法, 需要求点 D 的坐标, 即直线与 x 轴的交点.

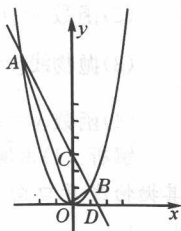


图 26-1-7

解: (1) 解方程组 $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases}$ 得,

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 9 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

$\therefore A(-3, 9), B(1, 1).$

(2) 解法 1: 直线 $y = -2x + 3$ 与 y 轴的交点为 $C(0, 3)$.

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = 6.$$

解法 2: 直线 $y = -2x + 3$ 与 x 轴交点 $D(\frac{3}{2}, 0)$.

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 9 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 = 6.$$

数形结合思维: 将抽象的“数(量)”与直观的“形(图)”结合起来, 通过“以形助数”或“以数解形”来解决问题

工具箱

方法技巧: 1. 求斜置于平面直角坐标系中的三角形的面积时, 一般可用割补法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差去求解. 因为当三角形的一边在坐标轴上时, 这边的长易求, 这边上的高则为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值.

2. 复杂的几何图形问题一般应根据题意画出草图帮助思考和解题, 数形结合会使复杂问题变得更具体、容易.

技巧2 利用增减性比较大小.

【例6】 函数 $y = x^2$ 的图象对称轴左侧上有两点 $A(a, 15), B(b, \frac{1}{4})$, 则 $a - b$ _____ 0 (填“>”、“<”或“=”号).

解法一: 将 $A(a, 15), B(b, \frac{1}{4})$ 分别代入 $y = x^2$ 中得: $15 = a^2, \therefore a = \pm\sqrt{15}; \frac{1}{4} = b^2,$

$$b = \pm\frac{1}{2}.$$

又 A, B 在抛物线对称轴左侧, $\therefore a < 0, b < 0$, 即 $a = -\sqrt{15}$,
 $b = -\frac{1}{2}$, $\therefore a - b = -\sqrt{15} + \frac{1}{2} < 0$

解法二: 画函数 $y = x^2$ 的草图 (如图 26-1-8), 可知在 y 轴左侧 ($x < 0$) 时, y 随 x 的增大而减小, 又 $\because 15 > \frac{1}{4}$, $\therefore a < b$, 即 $a - b < 0$.

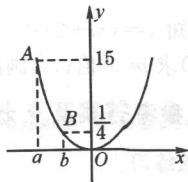


图 26-1-8

状元笔记

方法技巧: 利用草图和函数的增减性比较函数值的大小或自变量的大小, 显得更简单、直观, 充分运用了数形结合的思想.



陷阱警示

易错点 由抛物线的开口方向确定字母的值时, 易忽略系数的取值范围.

含有字母系数的抛物线, 除满足次数最高的项的次数为 2 之外, 还要考虑开口方向对字母的取值的限制.

【例 7】 已知抛物线 $y = (a+2)x^{a^2+5a-4}$ 的开口向下, 求 a 的值.

正解: $\because y = (a+2)x^{a^2+5a-4}$ 是抛物线,

$$\therefore \begin{cases} a+2 \neq 0 \\ a^2+5a-4=2 \end{cases}, \therefore a=1 \text{ 或 } a=-6.$$

又 $\because$ 抛物线开口向下, $\therefore a+2 < 0, \therefore a < -2$,

$$\therefore a = -6.$$

错解: $\because$ 抛物线的开口向下, $\therefore a+2 < 0, \therefore a < -2$.

纠错秘方: 由于函数 $y = (a+2)x^{a^2+5a-4}$ 是二次函数, 因此 $a^2+5a-4=2$, 又由于抛物线开口向下, 因此 $a+2 < 0$, 所以 a 的取值应由 $a^2+5a-4=2$ 和 $a+2 < 0$ 同时限定.



轻松练习

- 若某函数图象的最低点为原点 $(0,0)$, 则这个函数是 ()
 A. $y = \frac{1}{2}x + 3$ B. $y = -x^2$ C. $y = x^2$ D. $y = -x$
- 在抛物线 $y = x^2$ 上有两点 $A(m, \frac{1}{64})$, $B(n, \frac{1}{64})$, 则 $|m+n|$ 的值为 ()
 A. 0 B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{4}$
- 已知抛物线的解析式为 $y = -3x^2$, 它的开口向_____, 对称轴为_____, 顶点坐标是_____, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而_____.
- 若函数 $y = ax^2$ 过点 $(2,9)$, 则 $a =$ _____.
- 已知抛物线 $y = x^2$ 上有一点 A , A 点的横坐标是 -1 , 过点 A 作 $AB \parallel x$ 轴, 交抛物线于另一点 B , 则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.