

高等学校教材

微分几何 及其在力学中的应用

武际可 黄克服 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

微分几何及其在力学中的应用

武际可 黄克服 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微分几何及其在力学中的应用/武际可,黄克服编著. —北京:
北京大学出版社,2011.9
ISBN 978-7-301-14537-1

I. ①微… II. ①武… ②黄… III. ①微分几何 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 005986 号

书 名: 微分几何及其在力学中的应用

著作责任者: 武际可 黄克服 编著

责任编辑: 曾琬婷

标准书号: ISBN 978-7-301-14537-1/O · 0768

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62767347
出版部 62754962

印 刷 者: 三河市北燕印装有限公司

经 销 者: 新华书店

850mm×1168mm 32 开本 9.375 印张 250 千字

2011 年 9 月第 1 版 2011 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 25.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: (010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是作者根据多年来为北京大学力学系研究生和高年级本科生讲授同名课程的讲稿编写而成的,书中系统介绍了微分几何的基础知识。全书共分为六章:第一章介绍了向量和张量的基本性质;第二章给出了欧氏空间中曲线与曲面的几何;第三章引入了流形的概念及若干性质,如向量的 Lie 导数的性质;第四章介绍了流形上的微分形式和外微分运算,并给出了几个重要定理的证明;第五章介绍了 Lie 群与 Lie 代数的性质,特别是在不变量理论中的应用;第六章介绍了动力系统与 Symplectic 几何的理论及其在力学中的应用。每章末配有适量的习题,便于读者选用。

本书叙述简明易懂、逻辑严谨、条理清晰,注重分析及应用,着重在所介绍内容和力学理论的联系上举一些例子,如应变和 Lie 导数的关系、协调方程、Hamilton 力学的几何理论等等。

本书可作为高等院校力学专业研究生或高年级本科生学习微分几何知识的教材,也可供从事与力学相关专业的教学和研究的教师和科研工作者参考。

前 言

几何是关于空间的科学. 微分几何是利用微积分研究空间构造的数学学科.

人类关于空间的认识是逐步深化的, 最早的知识是对于日常经验中的三维欧氏空间的认识. 约公元前 300 年, 古希腊的欧几里得^①写成的巨著《几何原本》奠定了欧氏几何的基础. 1637 年法国的笛卡儿^②发表的《几何学》奠定了解析几何的基础, 从而把分析和几何图形联系起来. 1788 年法国的拉格朗日^③出版了巨著《分析力学》, 引进了用高维空间来描述动力系统的状态. 德国高斯^④的研究工作推进了曲面微分几何的发展, 之后他的学生黎曼^⑤系统发展了微分几何, 奠定了流形与黎曼空间的基础. 到了 20 世纪初, 意大利的里奇^⑥和莱维-齐维塔^⑦发展了一整套流形上的张量分析方法, 系统地进行了微分不变量的研究. 与此同时, 法国的嘉当^⑧创立了外形式和外微分方法.

力学同数学的发展是同步的, 或者说, 有什么样的数学就有什么样的力学; 反过来, 在一定的程度上也可以说, 有什么样的力学就有什么样的数学. 力学的研究经常是要了解客观事物的质和量

① 欧几里得(Euclid, 约公元前 325—约公元前 265), 古希腊数学家.

② 笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650), 法国哲学家、物理学家、数学家、生物学家.

③ 拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813), 法国数学家、力学家、天文学家.

④ 高斯(C. F. Gauss, 1777—1855), 德国数学家、物理学家、天文学家.

⑤ 黎曼(G. F. B. Riemann, 1826—1866), 德国数学家.

⑥ 里奇(G. Ricci-Curbastro, 1853—1925), 意大利数学家.

⑦ 莱维-齐维塔(T. Levi-Civita, 1873—1941), 意大利数学家、物理学家.

⑧ 嘉当(E. Cartan, 1869—1951), 法国数学家.

两个侧面,而质和量是不可分的,所以力学同数学自古便有紧密联系的传统.1627年,我国出版了最早的力学著作,即由传教士邓玉函^①口授、王徵^②笔录的《远西奇器图说》.该书在谈到力学与数学的关系时说:“造物主之生物,有数、有度、有重,物物皆然.数即算学,度乃测量学,重则此力艺之重学也.重有重之性.以此重较彼重之多寡,则资算学;以此重之形体较彼重之形体之大小,则资测量学.故数学、度学、重学之必须,盖三学皆从性理而生,为兄弟内亲,不可相离者也.”这里说的数学就是计算,度学就是几何,而重学即是力学.

意大利文艺复兴时期的大师达·芬奇^③说过:“力学是数学科学的天堂,因为我们在这里获得数学的成果.”牛顿^④在他1687年出版的《自然哲学的数学原理》的绪言中则把几何学看做力学的一部分,他说:“几何学是建立在力学的实践之上的,它无非是普通力学的一部分,能精确地提出并论证测量的方法.”

力学是研究物质在空间运动的学科,所以力学尤其是和几何学有着不可分割的联系.我们可以把从阿基米德^⑤开始的有限自由度力学与数学的关系的特点归纳如下:

● 从阿基米德到哥白尼^⑥、斯梯芬^⑦时代,力学的研究内容主要是静力学和天体的圆运动.在几何方面的主要工具是欧氏几何,相应的计算工具是常量的代数运算.

① 邓玉函(J. Terrenz, 1576—1630),瑞士人.

② 王徵(1571—1644),陕西泾阳人.

③ 达·芬奇(L. da Vinci, 1452—1519),意大利科学家、画家.

④ 牛顿(I. Newton, 1643—1727),英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家.

⑤ 阿基米德(Archimedes, 公元前287—公元前212),希腊数学家、力学家.

⑥ 哥白尼(N. Copernicus, 1473—1543),波兰天文学家.

⑦ 斯梯芬(S. Stevin, 1548—1620),荷兰数学家、工程师.

● 从伽利略^①、惠更斯^②到牛顿、莱布尼茨^③时代,力学研究的主要内容是自由质点的运动,特别是解决在引力作用下的自由质点的运动.在几何方面的主要工具是解析几何,特别是有关圆锥曲线的解析几何.在计算方面的主要工具则是引进了变量,发明了微积分,而且微积分的发明人牛顿与莱布尼茨自己也是著名的力学家,是那个时期的力学学科的开拓者.

● 从拉格朗日到哈密顿^④和雅可比^⑤时代,力学主要的研究内容是约束运动.在几何方面的主要工具是引进了 n 维空间的概念,后来经过黎曼的严格化,就是流形或黎曼几何.而在分析方面的主要工具则是引进了泛函的概念,并且发展了求泛函极值的方法,也就是变分法.拉格朗日自己就是早期开拓变分法的主将.

● 在19世纪末,力学又进入了一个重要的新阶段,这就是以庞加莱^⑥与李亚普诺夫^⑦为代表的发展动力系统的定性理论时代.定性理论与运动稳定性的研究本来是从天体力学中提出来的一个理论课题,之后发现在一切力学系统中,甚至在由一切非线性常微分方程确定的系统中都有普遍理论与应用意义.简单说,定性理论是研究系统解的性质随参数而变化的方向,例如有没有周期解的变化,有没有极限环的变化,解稳定与不稳定的变化,等等.在几何方面的主要工具就是拓扑学和微分拓扑学,而相应的计算工具是同伦与外微分等.力学中的定性理论的开拓者庞加莱本人也是拓扑学的奠基人之一.至今经过了一百多年的发展,它仍然是世界上都很关心的研究领域.

① 伽利略(Galileo, 1564—1642),意大利物理学家、天文学家.

② 惠更斯(C. Huygens, 1629—1695),荷兰物理学家、数学家、天文学家.

③ 莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716),德国数学家、自然科学家、哲学家.

④ 哈密顿(W. R. Hamilton, 1805—1865),英国数学家、物理学家.

⑤ 雅可比(C. G. J. Jacobi, 1804—1851),德国数学家.

⑥ 庞加莱(J. H. Poincaré, 1854—1912),法国数学家、天文学家.

⑦ 李亚普诺夫(A. M. Lyapunov, 1857—1918),俄国数学家、力学家.

这些力学历史发展的事实说明,在力学发展的每一个关键时期,总是要同从前没有研究过的空间和数量模型打交道,力学家并不是坐等数学家解决好了数学工具才动手去工作,而是自己深入到数学中去发明新的数学工具,或者在与数学家的合作中加以解决.因此,在整个力学史上,许多开拓新领域的大力学家也同时是大数学家.即使是沿着他们开拓的路子前进的后继力学家,也必须熟悉前人发明的这些数学工具.

既然力学是研究物质在空间的存在和运动形式,因此对于空间的深入理解就成为深入力学研究的决定性条件.但是,多年来,在力学和技术学科的教育中,一直有一种忽视几何的偏向.一般说来,人们对于分析方面的培养是足够重视的,而在几何方面的大学教育中只涉及很少的知识,一直是只限于解析几何.这种情况近年来正在逐步改变.从20世纪60年代起,在世界范围内,近代微分几何知识迅速向物理界和力学界普及,出现了许多好的微分几何学教科书.古老的力学学科被以现代微分几何语言重新表述,从而开辟了许多新的研究方向.在力学中随着线性问题的逐渐成熟,非线性力学的研究正在兴起,而非线性和大范围的力学问题的研究又要求人们熟悉流形几何.本书正是为适应这种需要和发展趋势而写的.它打算为力学专业的研究生在了解现代微分几何及其与力学的联系上提供一个入门的导引.

全书共分六章.第一章是关于向量和张量的代数.第二章是讨论 n 维欧氏空间的曲纹坐标、向量和张量分析,其中用了相当的篇幅介绍曲线论和曲面论.曲线论和曲面论本来是属于初等微分几何的内容,但是考虑到现在的高等院校本科生物理学专业一般没有开设这门课,所以在这里进行了系统的介绍.第三章介绍的是Riemann几何.第四章介绍外微分及其应用.第五章介绍Lie群及其应用.第六章介绍动力系统和Symplectic几何.在内容的叙述中,我们着重在它们与力学理论的联系上举了一些例子.

学习数学不做习题是不行的,对于书中讨论的比较明显的问题或证明比较简单的内容,我们留给读者自行计算或证明.此外,我们在每一章的后面都附了适量习题,以供读者选用.

武际可 黄克服

2010年6月于北京大学

目 录

第一章 向量与张量	(1)
§ 1.1 n 维实向量空间	(1)
一、向量与坐标	(1)
二、坐标变换	(2)
§ 1.2 对偶空间	(3)
一、线性函数与对偶空间	(3)
二、对偶空间中的坐标变换	(4)
三、力学中的对偶空间	(5)
§ 1.3 欧氏空间与伪欧氏空间	(8)
一、欧氏空间	(8)
二、欧氏空间的自对偶性质	(10)
三、伪欧氏空间	(11)
§ 1.4 张量	(14)
一、张量的定义	(14)
二、欧氏空间中的张量	(15)
三、张量代数	(16)
§ 1.5 张量的反称化和外积	(20)
一、张量的反称化, 外形式	(20)
二、向量的外积	(22)
三、Hodge 星算子	(26)
§ 1.6 几类特殊张量和它们的性质	(29)
一、二阶张量与特征值	(29)
二、Levi-Civita 符号	(30)

习题一	(31)
第二章 欧氏空间中的曲纹坐标	(32)
§ 2.1 曲纹坐标与活动标架	(32)
一、曲纹坐标	(32)
二、活动标架	(33)
三、活动标架的微商	(35)
§ 2.2 绝对微商	(38)
一、协变导数	(38)
二、逆变导数	(41)
三、张量的绝对微商	(42)
四、正交曲线坐标与非完整系	(44)
五、张量的物理分量	(48)
六、几个常见的微分算子	(48)
七、两点张量场	(51)
§ 2.3 欧氏空间中的曲线	(52)
一、曲线的参数方程与弧长	(52)
二、Frenet 公式	(53)
三、曲线的密切性质	(57)
四、例子与应用——曲杆的弯曲	(59)
§ 2.4 曲面论	(62)
一、欧氏空间的子流形	(62)
二、曲面与曲面的弯曲性质	(64)
三、曲面论的基本方程	(67)
四、Gauss 方程与 Codazzi 方程	(68)
五、曲面上的曲线,测地曲率与测地线	(71)
六、曲面上的曲线坐标网	(72)
§ 2.5 曲面的无限小弯曲	(79)
一、曲面的弯曲变形与无限小弯曲	(79)
二、卵形曲面的刚性	(82)

§ 2.6 几种特殊曲面	(85)
一、直纹面与可展曲面	(85)
二、旋转曲面	(88)
三、平行曲面, 曲面的焦曲面	(88)
四、伪球面与 Sine-Gordon 方程	(89)
五、Bäcklund 变换	(92)
§ 2.7 欧氏空间的变换群	(97)
一、变换群	(97)
二、线性变换群 $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$	(98)
三、线性变换群的某些特殊子群	(100)
四、变换群与其切空间的关系	(102)
五、欧氏空间中的保角变换	(104)
习题二	(109)
第三章 流形与 Riemann 流形	(111)
§ 3.1 流形	(111)
一、流形的定义	(111)
二、流形上的坐标	(113)
§ 3.2 流形的切空间	(117)
一、切空间与切丛	(117)
二、余切空间与余切丛	(120)
三、流形上的张量	(122)
§ 3.3 子流形与 Riemann 流形	(123)
一、流形间光滑映射的诱导映射	(123)
二、子流形	(124)
三、Riemann 流形	(127)
四、Riemann 流形中向量的平行	(128)
§ 3.4 Riemann 曲率张量	(129)
一、曲率张量的引进	(129)
二、曲率张量的性质	(130)

三、曲率张量的缩并	(131)
§ 3.5 Riemann 流形与力学系统	(134)
一、有限自由度系统的运动方程	(134)
二、变形张量的协调方程	(134)
习题三	(136)
第四章 外微分与 Stokes 定理	(138)
§ 4.1 外微分	(138)
一、微分形式	(138)
二、外微分	(139)
三、若干例子	(141)
§ 4.2 Stokes 定理	(143)
一、流形上的积分	(143)
二、Stokes 定理	(146)
三、Stokes 定理的若干应用	(150)
§ 4.3 Poincaré 逆定理	(151)
一、闭形与恰当形	(151)
二、Poincaré 逆定理	(152)
三、Poincaré 逆定理在全局成立的充分条件	(155)
四、流形上的对偶关系	(156)
§ 4.4 Lie 导数	(157)
一、流形上的向量场	(157)
二、Lie 导数	(159)
三、Lie 导数的性质	(161)
§ 4.5 Frobenius 定理	(162)
一、预备讨论	(162)
二、Frobenius 定理	(165)
三、外微分方程与 Frobenius 定理的第二种形式	(170)
四、Frobenius 定理的应用	(173)
习题四	(176)

第五章 Lie 群与 Lie 代数	(179)
§ 5.1 基本概念	(179)
一、Lie 群	(179)
二、Lie 群核	(181)
三、Lie 代数	(183)
四、变换诱导的切向量变换	(184)
§ 5.2 Lie 群与 Lie 代数	(186)
一、Lie 群的 Lie 代数	(186)
二、单参数 Lie 群	(189)
三、Taylor 展式	(191)
§ 5.3 Lie 群的同态和同构	(193)
一、代数系统的同态、同构和自同构	(193)
二、Lie 代数的矩阵表示	(195)
§ 5.4 不变量	(196)
一、不变量的定义	(196)
二、微分不变量	(199)
三、Killing 向量场	(205)
四、积分不变量	(206)
§ 5.5 Lie-Bäcklund 变换	(208)
一、Lie-Bäcklund 变换	(208)
二、Lie-Bäcklund 变换对微分方程的应用	(211)
三、Bäcklund 变换	(212)
§ 5.6 与变换群有关的某些力学问题	(215)
一、不变量嵌入法	(215)
二、量纲分析与相似性理论	(216)
三、算子与分离变量	(219)
习题五	(222)
第六章 动力系统的几何理论	(224)
§ 6.1 Symplectic 几何与多自由度的 Hamilton 动力系统	(224)

一、相空间及其度量	(224)
二、Poisson 括弧	(226)
三、Symplectic 几何与 Hamilton 动力系统	(230)
四、Hamilton-Jacobi 方程	(233)
§ 6.2 Birkhoff 系统	(236)
一、Birkhoff 方程	(236)
二、Birkhoff 方程的性质	(239)
§ 6.3 动力系统	(242)
一、动力系统	(242)
二、微分动力系统所确定的流	(245)
三、随参数变化的动力系统	(247)
§ 6.4 动力系统的等价和等价类	(248)
一、动力系统的等价	(248)
二、线性动力系统在奇点邻近的等价	(251)
三、非线性动力系统在奇点邻近的等价	(255)
四、非自治系统的等价	(257)
五、动力系统的稳定性	(261)
§ 6.5 什么是分岔	(263)
一、分岔的定义	(263)
二、中心流形	(265)
三、自治系统含参数解的分岔	(267)
§ 6.6 关于线性非自治系统的等价类问题	(270)
一、引言	(270)
二、预备讨论	(271)
三、线性非自治系统的等价类	(273)
名词索引	(277)
参考文献	(281)

第一章 向量与张量

§ 1.1 n 维实向量空间

一、向量与坐标

定义 1.1 设 $\mathcal{V}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的集合. $\mathcal{V}$ 称为**实向量空间** (简称**向量空间**), 如果在 $\mathcal{V}$ 上定义了加法和对实数的乘法这两种运算, 即对 $\forall x, y, z \in \mathcal{V}$ 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 满足:

对于加法, 有

$$(1) \quad x + y = y + x; \quad (\text{交换律})$$

$$(2) \quad (x + y) + z = x + (y + z); \quad (\text{结合律})$$

$$(3) \quad \exists 0 \in \mathcal{V}, \text{使 } 0 + x = x; \quad (\text{零元素})$$

$$(4) \quad \exists -x \in \mathcal{V}, \text{使 } x + (-x) = 0. \quad (\text{逆运算})$$

对于实数的乘法, 有

$$(1) \quad 1 \cdot x = x;$$

$$(2) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x; \quad (\text{数乘的结合律})$$

$$(3) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \quad (\text{对向量的分配律})$$

$$(4) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \quad (\text{对数乘的分配律})$$

并且运算的结果仍然属于 $\mathcal{V}$, 即 $\mathcal{V}$ 关于这两种运算是封闭的.

元素 $x \in \mathcal{V}$ 称为**向量**. 如果 $\mathcal{V}$ 中存在 n 个向量线性无关, 并且任何 $n+1$ 个向量线性相关 (由线性代数知识可知这样的 n 是存在的), 则称 $\mathcal{V}$ 为 **n 维线性向量空间** (简称 **n 维向量空间**). 一般地, 这时我们记 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{L}^n$.

$\mathcal{L}^n$ 中任意取定的 n 个线性无关的向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 称为它的

一组基底. 显然, 任一向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$ 可以唯一地表示为

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad (1.1.1)$$

其中 $x^i \in \mathbb{R} (i=1, 2, \dots, n)$. 这里我们采用 Einstein^① 约定求和, 即凡是上、下标出现相同的指标时表示对这个指标从 1 到 n 求和. 本书后面如没有特殊的说明一律采用这种符号.

(1.1.1) 式中的 x^i 称为向量 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标. 任意一个向量 $\mathbf{x}$ 在同一基底上的坐标是唯一的. 事实上, 设在基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 上有两组坐标:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = y^j \mathbf{e}_j,$$

则两边相减后应有

$$(x^i - y^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

由于基底是线性无关的, 故必然有

$$x^i = y^i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

即坐标是唯一的. 这一事实说明在给定基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的条件下, $\mathcal{L}^n$ 中的元素 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$ 中的点建立了一一对应.

二、坐标变换

由于在 $\mathcal{L}^n$ 中基底是不唯一的, 因而当基底改变时, 向量的坐标也要相应地变化. 设 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是 $\mathcal{L}^n$ 的一组基底. 在 $\mathcal{L}^n$ 中给定一组新基底 $\{\tilde{\mathbf{e}}_{i'}\}$:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i'} = \alpha_{i'}^j \mathbf{e}_j, \quad (1.1.2)$$

这里 $\alpha_{i'}^j$ 是转换系数. 设向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$ 在新旧基底中的坐标分别为 $\tilde{x}^{i'}$ 与 x^i , 即

$$\mathbf{x} = \tilde{x}^{i'} \tilde{\mathbf{e}}_{i'} = x^i \mathbf{e}_i, \quad (1.1.3)$$

则有

① A. Einstein(1879—1955), 德国-美国科学家.