College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程（第五版）
学习辅导与习题选解

沈恒范　严钦容

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程（第五版）
学习辅导与习题选解

Gailülun yu Shuli Tongji Jiaocheng（Di-wu Ban）

Xuexi Fudao yu Xiti Xuanjie

沈恒范　严钦容

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是《概率论与数理统计教程(第五版)》的配套辅导书，包括概率论与数理统计的基本内容，与主教材相对应，全书共分九章，每章包括内容要点、教学基本要求、习题选解、历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题详解等四部分。

习题选解部分从主教材各章中选取一部分（约占总量的二分之一）较难或具有典型性的习题给出详细解答，有些习题还给出多种解法。

本书收集了2001—2011年全国硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论与数理统计的全部试题，并给出详细分析和解答，有些试题也给出多种解法。

本书通过总结主教材的教学内容和解题过程，注意培养学生掌握概率论与数理统计的基础知识、基本理论和基本技能，对于提高读者解决实际遇到的随机问题的能力是有益的。本书可供高等学校工科和其它非数学类专业的学生使用，也可供准备报考硕士研究生的读者和使用主教材的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程（第五版）学习辅导与习题选解/沈恒范，严钦容编. 一北京:高等教育出版社,2011.6

ISBN 978-7-04-032296-5

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①沈…②严…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP数据核字(2011)第083424号

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　杨　帆　　封面设计　于文燕　　版式设计　王艳红

插图绘制　郝　林　　责任校对　金　辉　　责任印制　韩　刚

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京市朝阳展望印刷厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　16.5
字　　数　310 000
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2011年6月第1版
印　　次　2011年6月第1次印刷
定　　价　22.80元

物 料 号　32296-00

序　言

本书是为学习《概率论与数理统计教程(第五版)》(以下简称《教程》)的读者编写的学习辅导书。全书共分九章,各章的顺序和内容与《教程》保持一致,每章的内容分为四个部分(最后三章的内容只有三个部分):

(一) 内容要点

将《教程》中本章讲述的内容(包括基本概念、基本定理、基本公式、计算方法等)予以归纳总结,便于读者复习和查阅。

(二) 教学基本要求

以教育部最新制定的高等学校《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为基础,同时参考教育部考试中心制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(有关概率论与数理统计部分),拟写了本章的教学基本要求。

(三) 习题选解

初学本课程的读者,计算有关概率论部分的习题往往感到比较困难,而计算有关数理统计部分的习题又感到比较繁琐,容易出现计算差错。本书从《教程》各章的习题中选取一部分(约占总量的二分之一)具有典型性或较难的习题做出分析与详细解答,所有习题都保留《教程》中原有的编号,便于读者查阅。

(四) 历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题详解

本书收集了自2001—2011年全国硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论与数理统计部分的全部试题,并给出了详细解答,有些题还给出了两种或多种解法;填空题和选择题部分,则不仅给出了答案,还给出了详细的分析或计算过程。如果试题的内容仅涉及某一章的内容,则该试题安排在这一章中;如果试题的内容涉及某两章(或两章以上)的内容,则该试题安排在后一章中。每一章中的试题分为三个部分:填空题、选择题、解答题,各部分的试题则按年份的先后顺序编排。这些试题可以作为《教程》习题的补充,不仅对于准备报考硕士研究生的读者有所帮助,对于所有学习本课程的读者复习和巩固所学内容也是有益的。

本书各章的前三部分由沈恒范负责编写,第四部分由严钦容负责编写。

本书编写过程中,曾经得到湖北汽车工业学院领导的关心和支持,还得到高

等教育出版社数学分社编辑的大力协助，编者谨致以衷心的谢意。

限于编者的水平，本书难免存在某些缺点和错误，诚恳希望读者批评指正。

沈恒范　严钦容

2011年1月

本课程学习方法指导

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 由于随机现象广泛地存在于自然科学、社会科学和工程技术的众多领域中,所以概率统计的理论和方法在这些领域中有着重要的应用.

概率论与数理统计课程在高等工业学校的本科教学计划中是一门必修的基础课. 初学本课程的读者往往会在学习中遇到某些困难,这里简要介绍本课程的一般学习方法,以便帮助读者初步理解和掌握概率论与数理统计的基本概念和基本理论,以及处理随机现象的基本思想和基本方法,并培养读者运用概率统计的理论和方法分析和解决实际问题的能力.

学习概率论部分时,应着重理解或了解的基本概念有:随机事件的频率与概率,随机变量的概率函数、概率密度、分布函数,二维随机变量的联合概率函数、联合概率密度、联合分布函数、边缘概率函数、边缘概率密度、边缘分布函数、条件概率函数、条件概率密度、条件分布函数,数学期望与方差、原点矩与中心矩、协方差与相关系数,等等. 应重点掌握或会运用的基本定理、公式和方法有:概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式,概率函数与概率密度的性质以及它们与分布函数的关系,随机变量函数的概率分布,关于数学期望与方差的定理,切比雪夫不等式、大数定律,中心极限定理,等等. 此外,还应熟悉某些常用分布,如:二项分布、超几何分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布,等等;其中正态分布在概率论与数理统计中最常用,因而也是最重要的分布,读者必须掌握正态分布的定义、性质及其在实际问题中的应用.

学习数理统计部分时,应着重理解或了解的基本概念有:总体、个体、样本、统计量,参数点估计的无偏性、有效性、一致性,参数区间估计的置信水平与置信区间,假设检验的基本思想及推理方法,方差分析中有关的统计量,回归分析中的回归函数与回归方程,等等. 应重点掌握或会运用的基本理论和方法有:正态总体统计量的分布,参数的矩估计法与最大似然估计法,正态总体参数的区间估计,关于正态总体参数的假设检验,总体分布的拟合检验,单因素试验及双因素试验的方差分析,一元线性相关的显著性检验,一元线性及曲线回归方程的求法,等等. 此外,还应熟悉数理统计中的某些常用分布,除正态分布外,还有:χ^2分布、t 分布、F 分布. 这里强调指出,读者必须熟练掌握利用计算器或计算机软件进行统计计算.

读者学习本课程时，最重要的环节当然是听课，课后应仔细阅读、认真钻研教材中每章、每节的内容. 阅读应当按顺序逐章、逐节地进行，搞清每个概念，弄懂每个定理(或公式)的条件、结论及其证明. 对于教材中的例题，就不仅是阅读，还应当进行必要的分析、推理及计算. 关于重点和难点，可以结合教材中的"自学例题分析与详解"一起来阅读，读者将从中获得更多的帮助.

在阅读每章、每节的内容的基础上，通过解答教材中该章后面的习题可以加深对所学内容的理解. 解题时只有认真独立思考，才能增强学习效果. 对于某些较难的习题，可以适当参看教材中的习题答案或提示，也可以查阅本书中的"习题选解".

在学完教材的每一章之后，应当对该章的主要内容(包括基本概念、定理、公式、方法等)进行小结. 虽然本书已列举了各章的"内容要点"，但是仍建议读者最好自己能独立地完成这项工作，这样可以更好地巩固所学的知识.

总之，本课程研究的对象是随机现象，正如在教材中指出的那样，随机现象既有偶然性的方面，又有必然性的方面，它们互相对立而又互相联系，科学的任务就在于要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性，即随机现象的统计规律性. 这就是本课程区别于其他课程的主要特点. 为此，我们必须用自然辩证法的观点学习本课程，这样才能深入理解和掌握本课程的基本概念、基本理论和基本方法，并且更好地把它们应用于分析和解决实际问题.

目　　录

第一章　随机事件及其概率

内 容 要 点

概率论与数理统计是研究随机现象的一门学科. 随机事件的发生既有偶然性,又有必然性,即随机事件的频率的稳定性,这是一种统计规律性,它是在大量现象中被发现的. 正是由于大量现象中随机事件的统计规律性是客观存在的,才使得数学家和统计学家们对各种随机现象进行深入的研究,并取得了极其丰富的重要成果. 概率论与数理统计的理论与方法在自然科学、社会科学、工农业生产、国家经济建设中有着广泛的应用.

本章内容是概率论与数理统计课程的基础知识. 随机试验、样本空间、随机事件、事件的关系及运算、随机事件的频率、概率及条件概率、随机事件的独立性、独立试验序列等是本章的基本概念. 概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式、二项概率公式等是本章的基本理论与基本公式. 根据概率的古典定义计算随机事件的概率时,往往需要用到排列与组合的知识. 了解事件的关系及运算,把复杂事件分解为若干个简单事件的并或交,从而利用概率论的基本定理与基本公式计算随机事件的概率,是读者应该掌握的基本方法,也是本章的重点和难点. 本章讲述的基本概念、基本理论与基本公式将贯穿于全课程之中,所以理解并掌握所有这些内容才能为学习本课程奠定良好的基础.

一、随机试验、样本空间与随机事件

随机试验(简称试验)就是一定的综合条件的实现,假定这种综合条件可以任意多次地重复实现.

试验的结果中所发生的现象叫做事件. 在试验的结果中,可能发生、也可能不发生的事件叫做随机事件,记作 $A, B, C, \cdots$;一定发生的事件叫做必然事件,记作 U;一定不发生的事件叫做不可能事件,记作 V.

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做试验的样本点(或基本事件),记作 ω;试验的所有样本点的集合叫做试验的样本空间,记作 $\Omega=\{\omega\}$.

任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集. 必然事件 U 就是样本空间 Ω,今后就把必然事件记作 Ω. 不可能事件 V 就是空集 $\varnothing$,今后就把不可能事件

记作 $\varnothing$.

二、事件的关系及运算

1. 包含:如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $B\supset A$(或称事件 A 包含于事件 B,记作 $A\subset B$).

2. 相等:如果事件 B 包含事件 A,且事件 A 包含事件 B,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

3. 并:"二事件 A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的并,记作 $A\cup B$;"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

4. 交:"二事件 A 与 B 都发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的交,记作 $A\cap B$(简记为 AB);"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$).

5. 互不相容(或互斥):如果二事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的);如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即

$$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

"二互不相容事件 A 与 B 的并"记作 $A+B$;"n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并"记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$(简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$).

6. 对立(或互逆):如果二事件 A 与 B 互不相容,并且它们中必有一事件发生,即

$$AB=\varnothing,A+B=\Omega,$$

则称事件 A 与 B 是对立的(或互逆的).事件 A 的对立事件(或逆事件)记作 $\bar{A}$.于是有

$$A\bar{A}=\varnothing,A+\bar{A}=\Omega.$$

7. 完备组:如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件一定发生,即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称这 n 个事件构成完备事件组.

事件的关系及运算的性质:事件的并与交,除满足交换律、结合律、分配律外,还满足德摩根(De Morgan)定律:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

三、频率与概率的定义

1. 频率的定义:设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次,则比值$\frac{m}{n}$叫做随机事件 A 的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

2. 概率的统计定义:在大量重复试验中,随机事件 A 的频率具有稳定性,即当试验次数 n 很大时,频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字 $p(0<p<1)$ 的附近摆动,这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的数字 p 叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$,即

$$P(A) = p \approx f_n(A). \tag{1.2}$$

3. 概率的古典定义:设试验的样本空间总共有 N 个等可能的基本事件,其中有且仅有 M 个基本事件是包含于随机事件 A 的,则随机事件 A 所包含的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值叫做随机事件 A 的概率,记作$P(A)$,即

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.3}$$

必然事件的概率等于 1,即

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.4}$$

不可能事件的概率等于 0,即

$$P(\varnothing) = 0. \tag{1.5}$$

4. 几何概型:设试验的基本事件有无穷多个,但是可用某种几何特征(如长度、面积、体积)来表示其总和,设为 S;并且其中的一部分,即随机事件 A 所包含的基本事件数,也可用同样的几何特征来表示,设为 s;则随机事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{s}{S}. \tag{1.6}$$

5. 概率的公理化定义:设试验的样本空间为 Ω,随机事件 A 是 Ω 的子集,$P(A)$是实值函数,如果满足下述三条公理:

公理 1 (非负性) 对于任一随机事件 A,有

$$P(A) \geqslant 0; \tag{1.7}$$

公理 2 (规范性) 对于必然事件 Ω,有

$$P(\Omega) = 1; \tag{1.8}$$

公理 3 (完全可加性) 对于可数无穷多个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$,

$A_n,\cdots$,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.9}$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

四、概率加法定理

对于任意二事件 A 与 B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.10}$$

特别是,对于二互不相容事件 A 与 B,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.11}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.12}$$

特别是,对于 n 个互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.13}$$

对于事件 A 及其对立事件 $\bar{A}$,有

$$P(A)=1-P(\bar{A}). \tag{1.14}$$

五、条件概率、事件的独立性

事件 A 在事件 B 已发生的条件下的概率叫做条件概率,记作 $P(A|B)$. 设 $P(B)>0$,则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.15}$$

如果 $P(A|B)=P(A)$ 或 $P(B|A)=P(B)$,则称二事件 A 与 B 是独立的.

如果事件 A 与 B 独立,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也分别是独立的.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任一事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与其他任意 $m(m=1,2,\cdots,n-1)$ 个事件的交是独立的,即

$$P(A_i|\underbrace{A_jA_k\cdots}_{m})=P(A_i),$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

六、概率乘法定理

对于任意二事件 A 与 B,如果 $P(A)>0,P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \tag{1.16}$$

特别是,对于二独立事件 A 与 B,有

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1.17}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.18}$$

特别是,对于 n 个相互独立的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \tag{1.19}$$

七、全概率公式

设事件 A 当且仅当 n 个互不相容事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中的任一事件发生时才可能发生,已知概率 $P(B_i)>0$ 及条件概率 $P(A|B_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则有

1. 全概率公式:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.20}$$

2. 贝叶斯公式:

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}, \tag{1.21}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$.

八、独立试验序列、二项概率公式

进行一系列试验,每次试验的结果与其他各次试验的结果无关,事件 A 的概率 $P(A)$ 在各次试验中保持不变,这样的一系列试验叫做独立试验序列. 设每次试验只有两个互相对立的结果 A 与 $\bar{A}$,且

$$P(A)=p,P(\bar{A})=q,0<p<1,p+q=1,$$

则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率

$$P_n(m)=\mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.22}$$

公式(1.22)叫做二项概率公式.

在 n 次独立试验中事件 A 发生的次数 m 介于 m_1 与 m_2 之间的概率为

$$P(m_1\leqslant m\leqslant m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}\mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.23}$$

在 n 次独立试验中事件 A 至少发生一次的概率为

$$P(m\geqslant 1)=1-(1-p)^n. \tag{1.24}$$

教学基本要求

（1）了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算.

（2）了解事件频率的概念，了解概率的统计定义.

（3）理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率；了解概率的几何定义，会计算简单的几何概率.

（4）了解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，了解概率加法定理.

（5）了解条件概率的概念、概率乘法定理与全概率公式，会应用贝叶斯（Bayes）公式解决比较简单的问题.

（6）理解事件的独立性概念，掌握独立事件的概率乘法定理.

（7）了解独立重复试验的概念，了解伯努利（Bernoulli）概型和二项概率的计算方法.

习题一选解

1.7　在桥牌比赛中，把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家（每家 13 张牌），求北家的 13 张牌中，

（1）恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花的概率；

（2）恰有大牌 A、K、Q、J 各 1 张，其余为小牌的概率.

解法一　一副桥牌共有 52 张牌，按花色区分，有黑桃、红心、方块、草花各 13 张牌；按大小区分，有大牌 A，K，Q，J 与小牌 10，9，…，3，2 各 4 张牌. 把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家（每家 13 张牌），如果考虑发牌的顺序，则 52 张牌的全排列共有 52！种不同的排列法. 所以，基本事件的总数

$$N=52!.$$

当第 1 张牌发给东家时，则北家得到的是第 4、第 8、…、第 52 张牌.

（1）设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花，则不妨设想先从 13 张黑桃中任选 5 张、从 13 张红心中任选 4 张、从 13 张方块中任选 3 张、从 13 张草花中任选 1 张，再把选出的这 13 张牌在上述 13 个位置进行全排列，有

$$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}\cdot 13!$$

种不同的排列法. 同时，还应考虑分发给其他三家的 39 张牌在其余 39 个位置上的全排列，有 39！种不同的排列法，从而共有

$$C_{13}^{5}C_{13}^{4}C_{13}^{3}C_{13}^{1}\cdot 13!\cdot 39!$$

种不同的排列法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1 = C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13! \cdot 39!.$$

于是,按公式(1.3)①得所求概率

$$P(A) = \frac{C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot 13! \cdot 39!}{52!} \approx 0.005\ 39.$$

(2) 设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A,K,Q,J 各 1 张,其余为小牌,则不妨设想先从 4 张 A,4 张 K,4 张 Q,4 张 J 中分别任选 1 张,从 36 张小牌中任选 9 张,再把选出的这 13 张牌在上述 13 个位置进行全排列,有

$$(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13!$$

种不同的排列法. 同时,还应考虑分发给其他三家的 39 张牌在其余 39 个位置上的全排列,有 39! 种不同的排列法,从而共有

$$(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!$$

种不同的排列法. 所以,事件 B 包含的基本事件数

$$M_2 = (C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!.$$

于是,按公式(1.3)得所求概率

$$P(B) = \frac{(C_4^1)^4 C_{36}^9 \cdot 13! \cdot 39!}{52!} \approx 0.037\ 95.$$

解法二 如果不考虑发牌的顺序,则把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家(每家 13 张牌),共有

$$C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以,基本事件的总数

$$N = C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}.$$

(1) 设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花,则不妨设想先从 13 张黑桃中任选 5 张、从 13 张红心中任选 4 张、从 13 张方块中任选 3 张、从 13 张草花中任选 1 张(共 13 张牌)分给北家,有

$$C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1$$

种不同的分法. 再把其余 39 张牌分给东、南、西三家(每家 13 张牌),有

$$C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}$$

种不同的分法,从而共有

$$C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以,事件 A 包含的基本事件数

$$M_1 = C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \cdot C_{39}^{13} C_{26}^{13} C_{13}^{13}.$$

于是,按公式(1.3)得所求概率

---

① 这里及以后的所有公式编号都是本书各章内容要点中的公式编号.

$$P(A)=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}$$

$$=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1}{C_{52}^{13}}\approx 0.005\ 39.$$

（2）设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A,K,Q,J 各 1 张，其余为小牌，则不妨设想先从 4 张 A,4 张 K,4 张 Q,4 张 J 中分别任选 1 张，从 36 张小牌中任选 9 张（共 13 张牌）分给北家，有

$$(C_4^1)^4C_{36}^9$$

种不同的分法. 再把其余 39 张牌分给东、南、西三家（每家 13 张牌），有

$$C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法，从而共有

$$(C_4^1)^4C_{36}^9\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$$

种不同的分法. 所以，事件 B 包含的基本事件数

$$M_2=(C_4^1)^4C_{36}^9\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}.$$

于是，按公式(1.3)得所求概率

$$P(B)=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^9\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}$$

$$=\frac{(C_4^1)^4C_{36}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.037\ 95.$$

解法三　注意到解法二的(1)及(2)的计算过程中都是先把分母与分子的公约数 $C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 约去，再进行计算，所以我们只需考虑从 52 张牌中任取 13 张分发给北家的情况，而不必再考虑其余 39 张牌分发给其他三家的情况.

从 52 张牌中任取 13 张分发给北家，共有 C_{52}^{13} 种不同的分法. 所以，基本事件的总数

$$N=C_{52}^{13}.$$

（1）设事件 A 表示北家的 13 张牌中恰有 5 张黑桃、4 张红心、3 张方块、1 张草花，则有

$$C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1$$

种不同的分法. 所以，事件 A 包含的基本事件数

$$M_1=C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1.$$

于是，按公式(1.3)得所求概率

$$P(A)=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1}{C_{52}^{13}}\approx 0.005\ 39.$$

（2）设事件 B 表示北家的 13 张牌中恰有大牌 A,K,Q,J 各 1 张，其余为小牌，则有