



普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材

ANSYS有限元基础教程

ANSYS YOUXIANYUAN JICHU JIAOCHENG

王新荣 初旭宏 主编



Basic
Course



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

ANSYS 有限元基础教程

王新荣 初旭宏 主 编

刘国华 刘贺平 副主编

王俊发 主 审

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是有限元法的入门教材, 简明易学, 坚持理论与实践的结合, 强调实用性和可操作性。全书分为两篇, 第 1 篇由第 1~4 章组成, 介绍有限元法的基本理论和分析过程; 第 2 篇由第 5~11 章组成, 介绍 ANSYS 软件的操作及工程应用。其主要内容包括有限元法的基本理论、平面问题的有限元法、空间问题和轴对称问题的有限元法、等参数单元、ANSYS 软件的实体建模技术、网格划分技术、施加载荷与求解、结果后处理技术及工程应用实例。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者, 在第 1 章对有限元法中涉及的弹性力学基本知识进行了简要介绍。同时, 还免费为采用本书授课的教师提供电子课件(通过 yuy@phei.com.cn 进行申请)。

本书适合于作为机械工程、工程力学、土木建筑、材料冶金、航空航天等专业本科生及研究生的教材, 也可为工程技术人员了解有限元法和 ANSYS 软件提供快速入门的参考。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 有限元基础教程 / 王新荣, 初旭宏主编. —北京: 电子工业出版社, 2011.4

(普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材)

ISBN 978-7-121-13004-5

I. ①A… II. ①王…②初… III. ①有限元分析—应用程序, ANSYS—高等学校—教材 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 029784 号

策划编辑: 余 义

责任编辑: 刘真平

印 刷: 北京市李史山胶印厂

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 15 字数: 403.4 千字

印 次: 2011 年 4 月第 1 次印刷

印 数: 4000 册 定价: 31.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

“有限元法”是伴随着电子计算机技术普及应用而迅速发展起来的一种非常有效的数值计算方法，在当今工程分析中获得最为广泛的应用。目前有限元法已经成为工程设计和科研领域不可或缺的一项重要技术和分析手段，解决了大量的实际问题，为国民经济建设做出了巨大贡献。

本书全面、系统地介绍有限元法的基本概念、基础理论、建模方法、ANSYS 11.0 软件操作、结果分析及工程实际应用。在兼顾基础知识的同时，强调实用性和可操作性，让读者不仅对有限元理论方法有较全面的了解，而且更重要的是学会如何使用有限元法解决实际问题。

读者可以跟随本书所介绍的分析步骤和过程快速入门，在比较短的时间内，使读者既能知其然，又能知其所以然，真正掌握 ANSYS 有限元分析方法，并能灵活应用于实际问题中。本书坚持理论与实践紧密结合的原则，将有限元理论与 ANSYS 操作糅合在一起，以期有助于促进有限元理论与 ANSYS 软件的学习、应用、推广与普及。

本书分为两篇，第 1 篇由第 1~4 章组成，介绍有限元法的基本理论和方法；第 2 篇由第 5~11 章组成，介绍 ANSYS 软件的操作及工程应用。具体内容为：第 1 章介绍有限元法的基本思想及基本步骤，并通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论；第 2 章以弹性力学平面问题为对象，详细介绍和讨论有限元法的基本原理和过程；第 3 章介绍空间问题和轴对称问题的有限元法；第 4 章讲述等参数单元的有限元法；第 5 章主要介绍 ANSYS 软件的基本知识、各种常用菜单与对话框的基本操作方法，该部分内容是熟练使用 ANSYS 软件的基础；第 6 章从实体模型的基本概念讲起，详细介绍 ANSYS 实体建模的思路及方法，包括自底向上建模、自顶向下建模、布尔运算、编辑图元等；第 7 章介绍网格划分与创建有限元模型技术；第 8 章介绍 ANSYS 施加载荷与求解，包括求解器的菜单系统、基本求解步骤、载荷施加及载荷步设置、求解控制等内容；第 9 章介绍通用后处理技术，包括读取结果数据、结果输出方式控制、图形显示结果及抓图、动画显示结果等内容；第 10 章详细介绍时间历程后处理技术，包括变量的定义和存储、变量的数学运算、变量数据的显示和变形过程的动画显示等内容；第 11 章介绍 ANSYS 软件的基本应用和基于 ANSYS 软件的有限元分析工程应用实例。

本书第 2、3、11 章由佳木斯大学王新荣编写；第 7~10 章由佳木斯大学初旭宏编写；第 4、5 章由黑龙江大学刘国华编写；第 1、6 章由哈尔滨工程大学刘贺平编写。王俊发教授对全书进行了仔细审阅。

在本书编写过程中，参考了大量的教材、论著和论文等文献资料，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误与欠妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 有限元法的产生	(1)
1.1.1 有限元法的发展过程	(1)
1.1.2 有限元法的基本思想	(2)
1.1.3 有限元法的特点	(3)
1.2 有限元法的基本步骤	(4)
1.3 有限元法的应用	(5)
1.3.1 有限元法的应用领域	(5)
1.3.2 有限元法在产品开发中的应用	(6)
1.4 弹性力学基本知识	(7)
1.4.1 弹性力学的基本假设	(7)
1.4.2 弹性力学的基本变量	(8)
1.4.3 弹性力学的基本方程	(11)
1.4.4 弹性问题的能量原理	(13)
1.4.5 弹性力学的平面问题	(15)
习题	(19)
第 2 章 平面问题的有限元法	(20)
2.1 结构的离散化	(20)
2.2 单元分析	(21)
2.2.1 位移函数	(22)
2.2.2 单元应变	(25)
2.2.3 单元应力	(26)
2.2.4 单元刚度矩阵	(27)
2.3 整体分析	(29)
2.4 有限元法解题过程与算例	(35)
2.5 单元等效节点力	(40)
2.6 边界条件的处理	(42)
2.7 计算结果的整理	(43)
2.8 矩形单元	(44)
2.8.1 位移函数	(45)
2.8.2 单元应变	(46)
2.8.3 单元应力	(46)
2.8.4 单元刚度矩阵	(47)
2.8.5 单元等效节点力	(47)

2.8.6	整体平衡方程	(47)
2.8.7	矩形单元与三角形单元比较	(48)
2.8.8	解答的收敛性	(48)
习题	(48)
第3章	空间问题和轴对称问题有限元法	(52)
3.1	空间问题的特点	(52)
3.2	采用四面体单元解一般空间问题	(52)
3.2.1	结构离散化	(52)
3.2.2	单元位移函数	(53)
3.2.3	单元的应变与应力	(54)
3.2.4	单元刚度矩阵	(55)
3.2.5	单元等效节点力	(56)
3.3	轴对称问题的有限元法	(57)
3.3.1	轴对称问题定义	(57)
3.3.2	基本变量和基本方程	(58)
3.3.3	轴对称问题单元分析	(59)
习题	(65)
第4章	等参数单元与数值积分	(67)
4.1	等参数单元的基本概念	(68)
4.2	平面 8 节点四边形等参数单元	(69)
4.2.1	单元位移函数	(70)
4.2.2	单元应变	(72)
4.2.3	单元应力	(74)
4.2.4	单元刚度矩阵	(74)
4.3	空间 20 节点六面体等参数单元	(75)
4.3.1	单元位移函数	(76)
4.3.2	单元应变	(77)
4.3.3	单元应力	(79)
4.3.4	单元刚度矩阵	(79)
4.3.5	单元等效节点力	(81)
4.4	高斯求积法	(82)
习题	(85)
第5章	ANSYS 软件简介	(86)
5.1	ANSYS 概述	(86)
5.2	ANSYS 启动、退出与 GUI 环境	(87)
5.2.1	ANSYS 启动	(87)
5.2.2	ANSYS 交互界面环境组成	(87)
5.2.3	退出 ANSYS	(87)

5.3	ANSYS 常用菜单与对话框操作	(88)
5.3.1	主菜单	(88)
5.3.2	工具菜单	(89)
5.3.3	绘图菜单	(89)
5.3.4	输入窗口	(90)
5.3.5	快捷功能图标按钮	(90)
5.3.6	工具条按钮	(90)
5.3.7	可见/隐藏按钮	(90)
5.3.8	对话框执行按钮	(91)
5.3.9	图形变换对话框	(91)
5.3.10	图形拾取	(93)
5.4	ANSYS 文件操作	(94)
5.4.1	新分析相关文件及其操作	(94)
5.4.2	ANSYS 文件重命名、复制与删除	(96)
5.4.3	导入与导出几何文件	(96)
5.5	ANSYS 的坐标系与工作平面	(97)
5.5.1	总体坐标系	(97)
5.5.2	局部坐标系	(97)
5.5.3	工作平面	(99)
5.5.4	激活坐标系(当前坐标系)	(102)
5.6	ANSYS 标准有限元分析过程	(103)
5.6.1	ANSYS 有限元求解的基本步骤	(103)
5.6.2	ANSYS 标准求解过程实例	(104)
	习题	(112)
第 6 章 实体建模技术		(114)
6.1	实体建模概述	(114)
6.1.1	ANSYS 实体建模的思路	(114)
6.1.2	ANSYS 实体建模菜单系统简介	(115)
6.2	创建基本几何对象	(115)
6.2.1	关键点、硬点及其创建方法	(115)
6.2.2	线的类型与创建方法	(117)
6.2.3	面的类型与创建方法	(119)
6.2.4	体的类型与创建方法	(122)
6.3	布尔运算	(126)
6.4	拖拉	(129)
6.5	编辑功能	(130)
6.5.1	缩放	(130)
6.5.2	移动	(131)
6.5.3	复制	(132)

6.5.4	镜像	(133)
6.5.5	编辑操作综合训练	(134)
6.6	合并重合几何对象	(135)
6.7	删除几何对象	(136)
	习题	(137)
第7章 网格划分与创建有限元模型技术		(139)
7.1	网格划分过程	(139)
7.1.1	ANSYS 创建有限元模型的方法	(139)
7.1.2	网格划分基本过程	(139)
7.1.3	定义单元类型	(140)
7.1.4	定义单元实常数	(142)
7.1.5	定义材料属性	(144)
7.2	网格划分控制	(146)
7.2.1	网格划分工具	(147)
7.2.2	SmartSize 网格划分控制	(148)
7.2.3	尺寸控制	(149)
7.2.4	单元形状控制	(151)
7.2.5	网格划分器选择	(151)
7.3	清除实体模型上的网格	(152)
	习题	(152)
第8章 施加载荷与求解		(154)
8.1	分析类型与求解过程	(154)
8.1.1	单载荷步求解过程	(154)
8.1.2	选择分析类型	(155)
8.2	载荷与载荷步选项	(155)
8.2.1	载荷分类	(155)
8.2.2	设置载荷步选项	(156)
8.2.3	施加载荷的途径	(156)
8.2.4	载荷显示	(157)
8.3	施加结构载荷	(157)
8.3.1	施加位移约束	(158)
8.3.2	施加集中力载荷	(160)
8.3.3	施加表面载荷	(161)
8.3.4	施加体载荷	(164)
8.3.5	施加惯性载荷	(165)
8.3.6	施加特殊载荷	(165)
8.4	求解控制	(166)
8.4.1	求解控制的 Basic 选项卡	(166)
8.4.2	选择合适的求解器	(167)

8.5	多载荷步求解	(168)
8.6	中断和重新启动求解过程	(168)
	习题	(169)
第9章 通用后处理技术		(170)
9.1	后处理器、结果文件与结果数据	(170)
9.1.1	后处理器	(170)
9.1.2	结果文件	(170)
9.1.3	结果数据	(170)
9.1.4	通用后处理一般步骤及常用技术	(171)
9.2	选择结果文件与结果数据	(171)
9.3	查看结果文件包含的结果序列	(172)
9.4	读入用于后处理的结果序列	(172)
9.5	结果输出方式控制	(173)
9.6	绘制变形图	(174)
9.7	绘制等值线图	(175)
9.8	抓取结果显示图片	(177)
9.9	动画显示结果	(177)
	习题	(178)
第10章 时间历程后处理技术		(179)
10.1	定义和存储变量	(179)
10.1.1	变量定义	(179)
10.1.2	变量存储	(181)
10.1.3	变量导入	(182)
10.2	变量的操作	(182)
10.2.1	数学运算	(182)
10.2.2	变量与数组相互赋值	(183)
10.2.3	数据平滑	(185)
10.2.4	生成响应频谱	(185)
10.3	查看变量	(186)
10.3.1	绘制变量曲线	(186)
10.3.2	列表显示变量	(187)
10.4	动画技术	(188)
10.4.1	直接生成动画	(188)
10.4.2	通过动画帧显示动画	(189)
	习题	(190)
第11章 ANSYS 有限元分析实例		(191)
11.1	结构静力分析实例	(191)
11.1.1	钢支架静力分析	(191)

11.1.2	悬臂梁几何非线性分析	(196)
11.1.3	转轮轴对称结构静力分析	(200)
11.2	结构动力分析实例	(211)
11.2.1	ANSYS 动力分析简介	(211)
11.2.2	飞机机翼模态分析	(212)
11.2.3	钢梁瞬态动力分析	(216)
11.2.4	弹簧质量系统谐响应分析	(224)
习题	(229)
参考文献	(230)

第 1 章

绪 论

◇ 教学目标:

本章阐述有限元法的基本思想和发展过程,介绍有限元法的特点、应用及基本步骤,并通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论。本章应掌握有限元法的基本原理和基本步骤,熟悉有限元法在工程设计和科学研究中所处的地位。

◇ 教学重点和难点:

- 有限元法的基本思想
- 有限元分析的基本步骤
- 弹性力学基本理论

1.1 有限元法的产生

随着现代工业、生产技术的发展,不断要求设计高质量、高水平的大型、复杂和精密的机械及工程结构。为此目的,人们必须预先通过有效的计算手段,确切地预测即将诞生的机械和工程结构在未来工作时所发生的应力、应变和位移状况。但是传统的一些方法往往难以完成对工程实际问题的有效分析。弹性力学的经典理论,由于求解偏微分方程边值问题的困难,只能解决结构形状和承受载荷较简单的问题。对于几何形状复杂、不规则边界、有裂缝或厚度突变,以及几何非线性、材料非线性等问题,试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的,甚至是不可能的。因此,需要寻求一种简单而又精确的数值分析方法,有限元法正是适应这种要求而产生和发展起来的一种十分有效的数值计算方法。

有限元法自问世以来,在其理论和应用研究方面都得到了快速、持续不断的发展。目前,有限元法已经成为工程设计和科研领域的一项重要分析技术和手段。

1.1.1 有限元法的发展过程

有限元法离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数,首次将截面分成若干三角形区域,在各个三角形区域设定一个线性的翘曲函数,求得扭转问题的近似解。其实质就是有限元法分片近似、整体逼近的基本思想。与此同时,一些应用数学家和工程师由于各种原因也涉及过有限元的概念,但由于受到当时计算能力的限制,这些工作并没有引起人们的注意,被认为没有多大应用价值,直到电子计算机出现并得到应用之后,这一思想才引起关注。

有限元法第一次成功的尝试是 1956 年波音公司的 Turner, Clough 等人在分析飞机结构时,将分片近似、整体逼近的思想和结构力学的矩阵位移法应用于弹性力学的平面问题,采用直接

刚度法，按照弹性力学的基本原理建立了分片小区域（三角形单元）上的特性方程，首次采用计算机求解，给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。1960年 Clough 在题为“平面应力分析的有限元法”的论文中首次使用“有限元法”一词。此后这一名称得到了广泛承认，这一方法也被大量工程师开始应用于处理结构分析、流体和热传导等复杂问题中。

20世纪60~70年代，是有限元法迅速发展的时期，除力学界外，大量数学家也参与了这一工作。1967年，O. C. Zienkiewicz 和 Y. K. Cheung（张佑启）出版了第一本有关有限元分析的专著《连续体和结构的有限元法》，此书是有限元法的名著，后更名为《有限单元法》。1972年，J. T. Oden 出版了第一本处理非线性连续介质问题的专著《非线性连续体的有限元法》。从此，有限元法就以坚实的理论基础和完美的计算格式屹立于数值计算方法之林，被认为是一种完美无缺和无所不能的方法。

近几十年来，有限元法得到迅速发展，已出现多种新型单元和求解方法。自动网格划分和自适应分析技术的采用，也大大加强了有限元法的解题能力。由于有限元法的通用性及其在科学研究和工程分析中的作用和重要地位，众多著名公司更是投入巨资来研发有限元分析软件，推动了有限元分析软件的巨大发展，使有限元法的工程应用得到迅速普及。目前在市场上得到认可的国际知名有限元分析通用软件有 ANSYS、NASTRAN、MARC、ADINA、ABAQUS、ALGOR、COSMOS 等，还有一些适用于特殊行业的专用软件，如 DEFORM、AUTOFORM、LS-DYNA 等。

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展也做出了许多贡献。近几十年来，我国在有限元应用及软件开发方面也做了大量的工作，取得了一定的成绩，只是和国外的成熟产品相比还存在较大的差距。

经过半个世纪的发展，有限元法已经相当成熟，作为一种通用的数值计算方法，已经渗透到许多科研和工程应用领域。基于其良好的理论基础、通用性和实用性，可以预计，随着现代力学、计算数学、计算机技术、CAD 技术等的发展，有限元法必将得到进一步的发展和完善，并在国民经济建设和科学技术领域发挥更大的作用。

1.1.2 有限元法的基本思想

有限元法是一种基于变分法而发展起来的求解微分方程的数值计算方法，该方法以计算机为手段，采用分片近似，进而逼近整体的研究思想求解物理问题。

首先，将物体或求解域离散为有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域（单元），原始边界条件也被转化为节点上的边界条件，此过程常称为离散化。其次，在每个单元内，选择一种简单近似函数来分片逼近未知的单元内位移分布规律，即分片近似，并按弹性理论中的能量原理（或用变分原理）建立单元节点力和节点位移之间的关系。最后，把所有单元的这种关系式集合起来，就得到一组以节点位移为未知量的代数方程组，解这些方程组就可以求出物体上有限个节点的位移。这是有限元法的创意和精华所在。

图 1-1 所示是用有限元法对直齿圆柱齿轮的轮齿进行变形和应力分析，其中图 1-1(a)

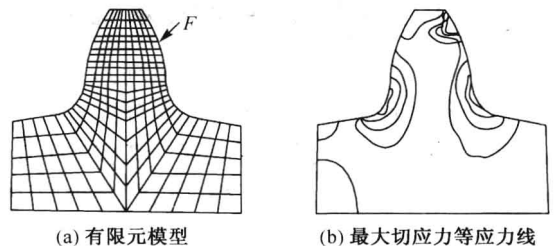


图 1-1 对直齿圆柱齿轮的轮齿进行变形和应力分析

所示为有限元模型，图 1-1(b)所示是最大切应力等应力线。在图 1-1(a)中采用 8 节点四边形等参数单元把轮齿划分成网格，这些网格称为单元。网格间相互连接的点称为节点。网格与网格

的交界线称为边界。显然，图中的节点数是有限的，单元数目也是有限的，这就是“有限元”一词的由来。

在整个有限元分析过程中，离散化是分析的基础。有限元法的离散对单元形状和大小没有规则划分的限制，单元可以为不同形状，且不同单元可以相互连接组合。所以，有限元法可以模型化任何复杂几何形状的物体或求解区域，离散精度高。

分片近似是有限元法的核心，有限元法是应用局部的近似解来建立整个求解域的解的一种方法，针对一个单元来选择近似函数，积分计算也是在单元内完成，由于单元形状简单，一般采用低阶多项式函数就能较好地逼近真实函数在该单元上的解，此过程可认为是里兹法的一种局部化应用。而整个求解域内的解可以看成所有单元近似解的组合。对于整个求解域，只要单元上的近似函数满足收敛性要求，随着单元尺寸的不断缩小，有限元法提供的近似解将收敛于问题的精确解。

矩阵表示和计算机求解是有限元法的关键。因为有限元方程是以节点值和其导数值为未知变量的，节点数目多，形成的线性方程组维数很高，一般工程问题都有成千上万，复杂问题可达百万或更多。所以，有限元方程必须借助矩阵进行表示，只有利用计算机才能求解。

1.1.3 有限元法的特点

有限元法经过几十年的发展，已成为一种通用的数值计算方法。它具有鲜明的特点，具体表现在以下方面。

(1) 理论基础简明，物理概念清晰。有限元法的基本思想就是几何离散和分片插值，概念清晰，容易理解。用离散单元的组合体来逼近原始结构，体现了几何上的近似；而用近似函数逼近未知变量在单元内的真实解，体现了数学上的近似；利用与原问题的等效的变分原理（如最小势能原理）建立有限元基本方程（刚度方程），又体现了其明确的物理背景。

(2) 计算方法通用，应用范围广。它不仅能成功地处理如应力分析中的非均匀材料、各向异性材料、非线性应力应变关系及复杂边界条件等难题，而且随着其理论基础和方法的逐步完善，还能成功地用来求解如热传导、流体力学及电磁场等领域的许多问题。理论上讲，只要是用微分方程表示的物理问题，都可以用有限元法进行求解。

(3) 可以处理任意复杂边界的结构。由于有限元法的单元不限于均匀规则单元，单元形状有一定的任意性，单元大小可以不同，且单元边界可以是曲线或曲面，不同形状单元可进行组合，所以，有限元法可以处理任意复杂边界的结构。同时，有限元法的单元可以通过增加插值函数的阶次来提高有限元解的精度。因此，理论上讲，有限元法可通过选择单元插值函数的阶次和单元数目来控制计算精度。

(4) 计算格式规范，易于程序化。该方法在具体推导运算中，广泛采用了矩阵方法。矩阵代数能把繁冗的分析和运算用矩阵符号表示成非常紧凑简明的数学形式，因而最适合于电子计算机存储，便于实现程序设计的自动化。

总之，有限元法已被公认为应力分析的有效工具，受到普遍的重视和广泛应用。

有限元法从选择基本未知量的角度来看，可分为 3 类：位移法、力法和混合法。以节点位移为基本未知量的求解方法称为位移法；以节点力为基本未知量的求解方法称为力法；一部分以节点位移，另一部分以节点力作为基本未知量的求解方法称为混合法。由于位移法通用性较强，计算机程序处理简单、方便，因此得到广泛的应用。本书只讨论最为普遍的位移法。

1.2 有限元法的基本步骤

将有限元分析的基本步骤归纳为 3 大步骤：结构离散化、单元分析和整体分析。分别介绍如下。

1. 结构离散化

结构离散化是有限元法分析的基础，是进行有限元分析的第一步。所谓结构离散化，就是用假想的线或面将连续物体分割成由有限个单元组成的集合体，且单元之间仅在节点处连接，单元之间的作用仅由节点传递。如图 1-2 所示为连续体的离散，将平面连续体离散为三角形单元的集合。

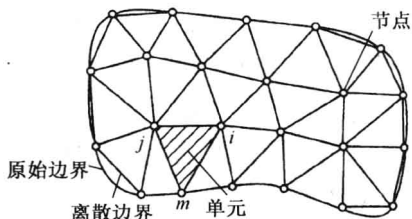


图 1-2 连续体的离散

单元和节点是有限元法中两个重要的概念。从理论上讲，单元形状是任意的，没有形状的限制，但在实际计算中，常用的单元形状都是一些简单的形状，如一维的线单元，二维的三角形单元、矩形单元、四边形单元，三维的四面体单元、五面体单元、六面体单元等。可见，不管单元取什么样的形状，在一般情况下，单元的离散边界总不可能与求解区域的真实边界完全吻合，这就带来了有限元法的一个基本近似性——几何近似。在一个具体的机械结构中，确定单元的类型和数目，以及哪些部位的单元可以取得大一些，哪些部位单元应该取得小一些，需要由经验来做出判断。单元划分越细则描述变形情况越精确，即越接近实际变形，但计算量越大。

所以有限元法中分析的结构已不是原有的物体或结构，而是同样材料的众多单元以一定方式连接成的离散物体。这样，用有限元分析计算所获得的结果只是近似的。如果划分单元数目足够多而又合理，则所获得的计算结果就越逼近实际情况。

2. 单元分析

单元分析包括以下 3 方面内容。

1) 选择位移函数

连续体被离散成单元后，每个单元上的物理量（如位移、应变等）的变化规律，可以用较简单的函数来近似表达。这种用于描述单元内位移的简单函数称为位移函数，又称位移模式。通常的方法是以节点位移为未知量，通过插值来表示单元内任意一点的位移。根据数学理论，定义某一个闭区域内的函数总可用一个多项式来逼近，且多项式的数学运算比较容易，所以，位移函数常常取为多项式。多项式项数越多，则逼近真实位移的精度越高，项数的多少由单元的自由度数决定。

由于所采用的函数是一种近似的试函数，一般不能精确地反映单元中真实的位移分布，这就带来了有限元法的另一种基本近似性。

采用位移法时，物体或结构离散化之后，就可把单元中的一些物理量如位移、应变和应力等由节点位移来表示。

2) 建立单元平衡方程

在选择了单元类型和相应的位移函数后，即可按弹性力学的几何方程、物理方程导出单元应变与应力的表达式，最后利用虚位移原理或最小势能原理建立单元的平衡方程，即单元节点力与节点位移间的关系。此方程也称为刚度方程，其系数矩阵称为单元刚度矩阵。

$$k^e \delta^e = F^e \quad (1-1)$$

式中, 角标 e 为单元编号; δ^e 为单元的节点位移向量; F^e 为单元的节点力向量; k^e 为单元刚度矩阵。

根据单元的材料性质、形状、尺寸、节点数目、位置等, 找出单元节点力和节点位移的关系式, 这是单元分析中的关键一步。

3) 计算等效节点力

物体离散化后, 假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元。但是, 对于实际的连续体, 力是从单元的公共边界传递到另一个单元中去的。因而, 这种作用在单元边界的表面力、体积力或集中力都需要等效地移到节点上去, 也就是用等效节点力来代替所有作用在单元上的力。

3. 整体分析

整体分析的基本任务包括建立整体平衡方程, 形成整体刚度矩阵和节点载荷向量, 完成整体方程求解。

1) 整体平衡方程建立

有限元法的分析过程是先分后合, 即先进行单元分析, 在建立了单元平衡方程以后, 再进行整体分析。也就是把各个单元平衡方程集成起来, 形成求解区域的平衡方程, 此方程为有限元位移法基本方程。集成所遵循的原则是各相邻单元在共同节点处具有相同的位移。

形成整体平衡方程为

$$K\delta = F \quad (1-2)$$

式中, K 为整体结构的刚度矩阵; δ 为整体节点位移向量; F 为整体载荷向量。

2) 方程求解

在引入边界条件之前, 整体平衡方程是奇异的, 这意味着整体方程是不可解的。从物理上讲, 当物体的几何位置没有被约束时, 受力处于平衡状态的物体也会产生刚体位移, 因而, 不可能有唯一的位移解。只有在整体平衡方程中引入必要的边界约束条件, 整体平衡方程才能求解。方程求解包括边界条件引入和数值计算, 一旦利用适当的数值方法求出未知的节点位移以后, 即可按弹性力学的应力、应变公式计算出各个单元的应变、应力等物理量。

1.3 有限元法的应用

1.3.1 有限元法的应用领域

有限元法虽起源于结构分析, 但由于众多学者的不断努力, 加之计算机技术的突飞猛进, 有限元法的应用领域已得到迅速扩展, 由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题, 由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题; 分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等; 从固体力学扩展到流体力学、热传导与热应力问题、电磁场问题及多场耦合等众多科学研究和工程分析。有限元法不仅涉及稳态场问题, 还涵盖材料非线性、几何非线性、时间维问题和断裂力学等。有限元法的工程应用如表 1-1 所示。

表 1-1 有限元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构力学和航天工程学	梁、板、壳结构的分析；复杂或混杂结构的分析；二维与三维应力分析	结构的稳定性；结构的固有频率和振型；线性黏弹性阻尼	应力波的传播；结构对于非周期载荷的动态响应；耦合热弹性力学与热黏弹性力学
土力学、基础工程学	二维与三维应力分析；填筑和开挖问题；边坡稳定性问题；土壤与结构的相互作用；坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析；流体在土壤和岩石中的渗流	土壤与结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非正常渗流；在可变形多孔介质中的流动-固结；应力波在土壤和岩石中的传播；土壤与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
流体动力学、水利工程学和水源学	流体的势流；流体的黏性流动；蓄水层和多孔介质中的定常渗流；水工结构和大坝的分析	湖泊和港湾的波动（固有频率和振型）；刚性或柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究（扩展问题）；沉积物的推移；流体的非正常流动；波的传播；多孔介质和蓄水层中非正常渗流
核子工程学	反应堆安全壳结构的分析；反应堆和反应堆安全壳结构的稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析；反应堆结构的热黏弹性分析；反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场分析		二维和三维时变、高频电磁场分析
生物力学工程问题	人体的脊柱、头骨、骨关节、牙移植等应力分析		响应分析

1.3.2 有限元法在产品开发中的应用

基于功能完善的有限元分析软件和高性能的计算机硬件，对设计的结构进行详细的力学分析，以获得尽可能真实的结构受力信息，就可以在设计阶段对可能出现的各种问题进行安全评判和设计参数修改。据有关资料，一个新产品的问题有 60% 以上可以在设计阶段消除，甚至有的结构在施工过程也需要进行精细的设计，要做到这一点，就需要类似有限元分析这样的分析手段。

例如，北京奥运场馆的鸟巢由纵横交错的钢铁枝蔓组成，它是鸟巢设计中最华彩的部分，是世界上跨度最大的钢结构建筑，也是鸟巢建设中最艰难的，如图 1-3 所示。看似轻灵的枝蔓总重达 42 000t，其中顶盖以及周边悬空部位重量为 14 000t，产生的重力难以想象。在鸟巢建设过程中，采用了 78 根临时搭建的支撑塔架支撑着 14 000t 钢铁的枝蔓，也就是产生了 78 个受力区域。在钢结构焊接完成后，需要将其缓慢而又平稳地卸去，让鸟巢由被外力支撑的状态变成完全靠自身结构支撑。因而支撑塔架的卸载对整个钢结构本身来说其实是加载。如何卸载？需要进行非常详细的数值分析，以确定出最佳的卸载方案。2006 年 9 月 17 日鸟巢成功地完成了整体钢结构施工的最后卸载。

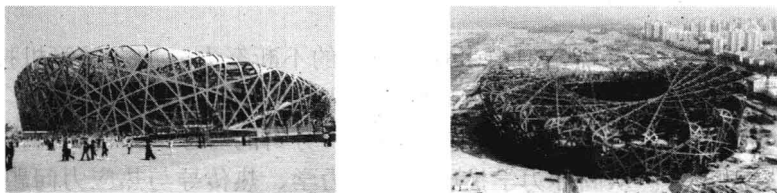


图 1-3 北京奥运场馆鸟巢的钢铁枝蔓结构

有限元法的出现和发展，促进了产品设计与制造发生根本性的改变，使产品开发正朝着数字化设计、分析、优化及数字化制造与控制的综合化方向发展。

在现代产品开发过程中, CAD/CAE/CAM 已成为基本工具, 作为 CAE 工具重要组成之一的有限元法, 更是成为产品开发必不可少的工具。CAD 工具用于产品结构设计, 形成产品的数字化模型。有限元法则用于产品性能的分析与仿真, 帮助设计人员了解产品的物理性能和破坏的可能原因, 分析结构参数对产品性能的影响, 对产品性能进行全面预测和优化, 帮助工艺人员对产品的制造工艺及试验方案进行分析设计。实际上, 当前有限元法在产品开发中的作用, 已从传统的零部件分析、校核设计模式发展为与计算机辅助设计、优化设计、数字化制造融为一体的综合设计。有限元法已成为提高产品设计质量的有效工具。图 1-4 给出新产品开发与有限元法的关系。可以预见, 随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展, 有限元法作为一个具有坚实理论基础和广泛应用效力的通用数值分析工具, 必将在产品开发中发挥更大的作用。

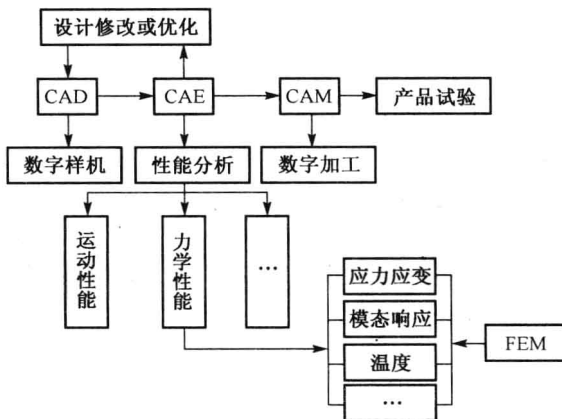


图 1-4 新产品开发与有限元法的关系

1.4 弹性力学基本知识

有限元法起源于弹性力学问题的求解, 本节将通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论。首先介绍弹性力学问题的基本方程; 然后介绍弹性力学问题的能量原理, 它是有限元法近似求解的基本原理。

弹性力学是研究弹性体在约束和外载荷 (或温度) 作用下应力和变形分布规律的一门学科。其基本描述就是从静力学、几何学和物理学 3 方面进行分析, 建立描述弹性体变形状态、应力状态的弹性力学的基本方程。基本方程主要由几何方程、物理方程和平衡微分方程组成。

1.4.1 弹性力学的基本假设

在建立弹性力学基本方程的过程中, 如果考虑的因素过多, 会导致所建立的方程过于复杂, 无法求解。因此, 为了突出处理问题的实质, 使问题简单化、抽象化, 弹性力学中采用了如下 5 点基本假设。

(1) 假设物体是连续的。即认为在整个物体内部都被组成该物体的介质所充满, 没有任何空隙。这样, 物体中的应力、应变、位移等物理量才可能是连续的, 才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

(2) 假设物体是均匀的。即认为整个物体在各点都具有相同的物理性质。这样, 物体各