

挑战中考数学

压轴题

(第五版)

马学斌 舒耀俐 彭翕成 编著

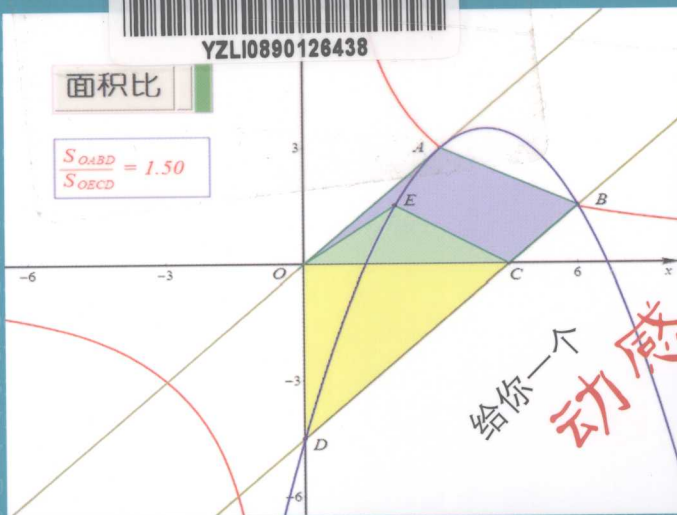
华东师范大学出版社



YZLI0890126438

面积比

$$\frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OED}} = 1.50$$



给你一个动感体验

中考数学 压轴题

马学斌 舒耀俐 彭翕成 编著

华东师范大学出版社



YZLI0890126438

图书在版编目(CIP)数据

挑战中考数学压轴题/马学斌,舒耀俐,彭翥成编著. —上海:
华东师范大学出版社,2007.2
ISBN 978-7-5617-5803-8

I.挑... II.①马...②舒...③彭... III.数学课—初中—
习题—升学参考资料 IV.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 204890 号

本书出版得到

863 探索导向类项目:知识浓缩与融合关键技术研究(编号:2008AA01Z127)的资助

挑战中考数学压轴题

编 著 马学斌 舒耀俐 彭翥成
策划编辑 倪明(数学工作室)
项目编辑 孔令志
审读编辑 王珍珍 高 丽
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克



出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路3663号 邮编200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者 江苏昆山亭林彩印厂有限公司
开 本 787 × 1092 16开
印 张 18
字 数 417千字
版 次 2011年8月第五版
印 次 2012年2月第四次
印 数 319 301-335 300
书 号 ISBN 978-7-5617-5803-8/G · 3366
定 价 39.20元(含光盘)

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

第三版序

——让计算机帮你学数学

把数学变得更容易一些,这是我从上个世纪70年代就开始思考的问题。我认为:解决问题的根本就是改造数学本身,为教育的目的改良数学,这也是“教育数学”的来由。“教育数学”的提出,虽然得到很多专家的支持,也取得了不小的成果,但离正式进入中学课堂,还有一段很长的路要走。

治不了本,能治标也好。譬如找一个水平较高的老师,买一本质量可靠的教辅资料……这都是有利于数学学习的。在计算机迅速普及、信息技术高速发展的今天,计算机的辅助作用也不容忽视。

面前的这本《挑战中考数学压轴题》就齐集了上面的三个因素。

本书的写作以及几何画板课件是由马学斌和舒耀俐两位老师完成的。这两位老师长期从事初中教学,教学经验丰富,对压轴题做了很深入的研究。正因为如此,两位老师常被邀请到全国各地讲学,分享成功经验。

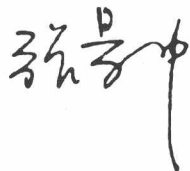
今年本书有一个新亮点,就是增加了配套的超级画板课件。这是由我的助手彭翥成同志完成的。他对数学的认识,对教育的领悟,对技术的掌握,已经远远超出他的年纪。

书中的两套课件,大家可以对照参考使用。本书每年都不断更新,在师生中的口碑极好,已经逐步形成品牌,并持续畅销。

中考数学,题目相对容易,大多数同学的分数都比较高,所谓的区分度很大程度上取决于最后的压轴题。对于基础较好的同学而言,与其把时间浪费在那些简单重复的基础题上,还不如集中精力攻克压轴题。

我对中考压轴题分类是很模糊的,一直认为大致是分为“几何图形的运动问题和带参数的函数问题”两大类吧。但这本书分得更细致,四大类,19小类,这更有利于大家学习。

本书题目很多,可以有选择性地做。你很快就会发现全国各地的压轴题大同小异,这说明出题人在相互借鉴。我想这种相互借鉴还会延续下去。



2009年8月6日

技术让思想更完美

这是一本供初中毕业生复习迎考,研究压轴题,挑战满分的书;

这是一本供初中数学教师通过继续教育学习,研究现代教育技术与中学数学课程整合的参考书;

这是一本用“几何画板”、“超级画板”动态研究中考数学压轴题的书;

这是一本以中考数学压轴题为载体学习“几何画板”、“超级画板”的书;

这是一本初中数学课件资源的素材库.

中考数学压轴题的灵魂是数形结合,数形结合的精髓是函数,函数的核心是运动变化.这本书的最大时尚就在于让读者在图形运动变化的过程中体验、把握、认知数学的美和压轴题的精髓.

全书共分四部分.第一部分为函数图象中点的存在性问题,这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合条件的点.

第二部分为图形运动中的函数关系问题,这部分压轴题的主要特征是在图形运动变化的过程中,探求两个变量之间的函数关系,并根据实际情况探求函数的定义域,进而在一般情形下探求符合条件的特殊性.探求符合条件的特殊性通常和分类讨论思想紧密地联系在一起.

第三部分为图形运动中的计算说理问题,这部分压轴题的主要特征是先给出一个图形进行研究,然后研究图形的位置发生变化后结论是否发生变化,进而进行证明.解决这部分压轴题的关键是抓住图形运动过程中的数据特征和不变关系,通过计算进行说理.

第四部分为图形的平移、翻折与旋转,这部分题目的主要特征是在图形的平移、折叠、旋转等运动变化中寻找不变的量,把握规律,探求关系.另一个主要特征是把图形的对称性与分类讨论思想结合在一起,也就是平常所说的一题多解.

本书收集的压轴题选自2011年上海市和北京市各区县的中考数学模拟题和2010年、2011年全国各地部分省市的中考题.每道压轴题由5个板块组成,首先介绍题目和出处;【动感体验】是这本书的特色,先打开这道题对应的光盘文件,在认真阅读理解题意的基础上,按照提示拖动屏幕上的主动点,在图形运动的过程中把握规律,理解内涵,探求关系;【思路点拨】也是这本书的一个亮点,它通过解读这道压轴题所考查的数学思想和数学方法,挑出解答这道压轴题的突破口,指出这道题目的难点;【满分解答】是比较规范、简练地对这道题目进行解答;【考点伸展】是我们在动态研究压轴题的过程中,对一些题目进行了深入的探讨,对这些题目提出的一点回顾与思考,压轴题作为命题组智慧的浓缩,我们不可能提出有突破性的反思,只是想借用“几何画板”、“超级画板”把智慧延伸一下.更多压轴题的考点伸展我们只是追求形式上的对称,提出了一些常规性的问题.

由于全国各地数学教材版本不同,数学词语的表现有所差别,本书中统一用“连结”、“图

象”等数学词语。

尽管我们对几何画板的研究水平有限,但我们一直在迈着实践的步子,在此非常感谢全国几何画板的领路人、北京师范大学潘懋德教授和南京师范大学附中特级教师陶维林老师多年来对我们的鼓励和帮助。

这本书多年来受到读者的欢迎并持续畅销.在这个版本中,我们极大地丰富了光盘中的内容,每道题目有三个相同文件名的课件,一个是几何画板课件,一个是超级画板课件,还有一个是视频演示课件.本书的文本和几何画板课件由马学斌老师和舒耀俐老师完成,超级画板课件由张景中院士的助手彭翕成老师制作,视频演示课件由马学斌老师制作。

大家在使用本书的过程中有什么问题和建议请随时与我们联系(wnmaxuebin@163.com),以便我们学习和修改。

作者

2011年6月

目 录

第一部分 函数图象中点的存在性问题

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题	2
例 1 2010 年义乌市中考第 24 题	2
例 2 2011 年上海市宝山区中考模拟第 25 题	4
例 3 2011 年上海市静安区中考模拟第 25 题	6
例 4 2011 年上海市青浦区中考模拟第 24 题	8
例 5 2011 年上海市徐汇区中考模拟第 24 题	10
例 6 2011 年上海市杨浦区中考模拟第 24 题	12
例 7 2011 年上海市闸北区中考模拟第 25 题	14
§ 1.2 因动点产生的等腰三角形问题	16
例 8 2010 年南通市中考第 27 题	16
例 9 2010 年台州市中考第 24 题	18
例 10 2011 年上海市虹口区中考模拟第 25 题	20
例 11 2011 年上海市黄浦区中考模拟第 25 题	22
例 12 2011 年上海市金山区中考模拟第 25 题	24
例 13 2011 年湖州市中考第 24 题	26
例 14 2011 年盐城市中考第 28 题	28
§ 1.3 因动点产生的直角三角形问题	31
例 15 2010 年北京市中考第 24 题	31
例 16 2011 年上海市奉贤区中考模拟第 24 题	33
例 17 2011 年北京市通州区中考模拟第 25 题	35
例 18 2011 年沈阳市中考第 25 题	36
例 19 2011 年温州市中考第 24 题	38
例 20 2011 年浙江省中考第 23 题	40
§ 1.4 因动点产生的平行四边形问题	41
例 21 2010 年河南省中考第 23 题	41
例 22 2010 年山西省中考第 26 题	44
例 23 2011 年上海市金山区中考模拟第 24 题	46
例 24 2011 年上海市普陀区中考模拟第 24 题	48
例 25 2011 年上海市青浦区中考模拟第 25 题	50
例 26 2011 年成都市中考第 28 题	52

例 27	2011 年江西省中考第 24 题	54
例 28	2011 年上海市中考第 24 题	56
例 29	2011 年无锡市中考第 27 题	58
§ 1.5	因动点产生的梯形问题	60
例 30	2010 年杭州市中考第 24 题	60
例 31	2011 年北京市海淀区中考模拟第 24 题	62
例 32	2011 年义乌市中考第 24 题	63
§ 1.6	因动点产生的面积问题	65
例 33	2010 年广州市中考第 25 题	65
例 34	2010 年湖州市中考第 24 题	67
例 35	2010 年扬州市中考第 28 题	69
例 36	2011 年上海市闵行区中考模拟第 24 题	71
例 37	2011 年上海市松江区中考模拟第 24 题	73
例 38	2011 年南通市中考第 28 题	75
§ 1.7	因动点产生的相切问题	77
例 39	2010 年福州市中考第 22 题	77
例 40	2010 年泰州市中考第 28 题	79
例 41	2010 年盐城市中考第 28 题	81
例 42	2011 年上海市奉贤区中考模拟第 25 题	83
例 43	2011 年上海市虹口区中考模拟第 24 题	85
例 44	2011 年上海市卢湾区中考模拟第 25 题	87
例 45	2011 年上海市徐汇区中考模拟第 25 题	89
§ 1.8	因动点产生的线段和差问题	91
例 46	2010 年聊城市中考第 25 题	91
例 47	2010 年南通市中考第 28 题	92
例 48	2010 年中山市中考第 22 题	93
例 49	2011 年北京市房山区中考模拟第 25 题	95
例 50	2011 年北京市丰台区中考模拟第 25 题	97
例 51	2011 年北京市海淀区中考模拟第 25 题	98
例 52	2011 年北京市平谷区中考模拟第 25 题	100
例 53	2011 年福州市中考第 22 题	101
例 54	2011 年菏泽市中考第 21 题	102
例 55	2011 年衢州市中考第 24 题	103
例 56	2011 年嘉兴市中考第 24 题	104

第二部分 图形运动中的函数关系问题

§ 2.1	由比例线段产生的函数关系问题	108
例 1	2010 年上海市中考第 25 题	108
例 2	2011 年上海市部分学校抽样模拟第 25 题	110

例 3	2011 年上海市浦东新区中考模拟第 25 题	112
例 4	2011 年上海市普陀区中考模拟第 25 题	114
例 5	2011 年上海市松江区中考模拟第 25 题	116
例 6	2011 年上海市中考第 25 题	118
§ 2.2	由面积公式产生的函数关系问题	120
例 7	2010 年嘉兴市中考第 24 题	120
例 8	2010 年江西省中考第 24 题	122
例 9	2010 年南京市中考第 28 题	124
例 10	2010 年温州市中考第 24 题	126
例 11	2010 年重庆市中考第 26 题	128
例 12	2011 年淮安市中考第 28 题	130
例 13	2011 年乐山市中考第 26 题	132
例 14	2011 年聊城市中考第 25 题	135
例 15	2011 年山西省中考第 26 题	137
例 16	2011 年重庆市中考第 26 题	139

第三部分 图形运动中的计算说理问题

§ 3.1	代数计算及通过代数计算进行说理问题	142
例 1	2010 年黄冈市中考第 25 题	142
例 2	2010 年大连市中考第 26 题	144
例 3	2011 年上海市宝山区中考模拟第 24 题	146
例 4	2011 年上海市浦东新区中考模拟第 24 题	148
例 5	2011 年河北省中考第 26 题	150
例 6	2011 年黄冈市中考第 24 题	152
例 7	2011 年武汉市中考第 25 题	154
§ 3.2	几何证明及通过几何计算进行说理问题	156
例 8	2010 年河北省中考第 25 题	156
例 9	2010 年宁波市中考第 26 题	158
例 10	2010 年苏州市中考第 28 题	160
例 11	2011 年上海市长宁区中考模拟第 25 题	162
例 12	2011 年上海市卢湾区中考模拟第 24 题	164
例 13	2011 年上海市闵行区中考模拟第 25 题	166
例 14	2011 年上海市杨浦区中考模拟第 25 题	168
例 15	2011 年北京市中考第 24 题	170
例 16	2011 年北京市中考第 25 题	172
例 17	2011 年宁波市中考第 26 题	175
例 18	2011 年陕西省中考第 25 题	177
例 19	2011 年扬州市中考第 28 题	179
例 20	2011 年浙江省中考第 24 题	181

第四部分 图形的平移、翻折与旋转

§ 4.1 图形的平移	184
例 1 2010 年兰州市中考第 28 题	184
例 2 2010 年青岛市中考第 24 题	185
例 3 2010 年烟台市中考第 25 题	186
例 4 2011 年上海市崇明县中考模拟第 24 题	187
例 5 2011 年北京市东城区中考模拟第 25 题	187
例 6 2011 年北京市丰台区中考模拟第 24 题	188
例 7 2011 年北京市密云县中考模拟第 25 题	189
例 8 2011 年北京市西城区中考模拟第 24 题	190
例 9 2011 年北京市西城区中考模拟第 25 题	191
例 10 2011 年北京市延庆县中考模拟第 24 题	192
例 11 2011 年陕西省中考第 24 题	193
例 12 2011 年温州市中考第 22 题	194
§ 4.2 图形的翻折	196
例 13 2010 年河南省中考第 22 题	196
例 14 2010 年金华市中考第 24 题	197
例 15 2010 年芜湖市中考第 24 题	198
例 16 2010 年湛江市中考第 28 题	199
例 17 2011 年北京市石景山区中考模拟第 25 题	200
例 18 2011 年南通市中考第 27 题	201
例 19 2011 年威海市中考第 24 题	202
§ 4.3 图形的旋转	204
例 20 2010 年常州市中考第 28 题	204
例 21 2010 年山西省中考第 25 题	205
例 22 2010 年台州市中考第 23 题	205
例 23 2010 年义乌市中考第 23 题	206
例 24 2011 年北京市昌平区中考模拟第 24 题	207
例 25 2011 年北京市昌平区中考模拟第 25 题	208
例 26 2011 年北京市东城区中考模拟第 24 题	209
例 27 2011 年北京市石景山区中考模拟第 24 题	210
例 28 2011 年安徽省中考第 22 题	211
例 29 2011 年义乌市中考第 23 题	212
§ 4.4 三角形	214
例 30 2010 年广州市中考第 24 题	214
例 31 2010 年湖州市中考第 25 题	215
例 32 2010 年淮安市中考第 28 题	216
例 33 2010 年宜宾市中考第 24 题	217

例 34	2011 年北京市朝阳区中考模拟第 25 题	218
例 35	2011 年北京市大兴区中考模拟第 24 题	219
例 36	2011 年北京市大兴区中考模拟第 25 题	220
例 37	2011 年北京市平谷区中考模拟第 24 题	221
例 38	2011 年北京市顺义区中考模拟第 24 题	222
例 39	2011 年北京市延庆县中考模拟第 25 题	222
例 40	2011 年安徽省中考第 23 题	224
例 41	2011 年大连市中考第 25 题	225
例 42	2011 年广州市中考第 24 题	226
例 43	2011 年广州市中考第 25 题	226
例 44	2011 年南通市中考第 26 题	228
例 45	2011 年衢州市中考第 23 题	229
例 46	2011 年绍兴市中考第 23 题	230
例 47	2011 年泰州市中考第 27 题	231
例 48	2011 年盐城市中考第 27 题	231
§ 4.5	四边形	233
例 49	2010 年北京市中考第 25 题	233
例 50	2010 年上海市中考第 24 题	234
例 51	2010 年昆明市中考第 24 题	234
例 52	2010 年陕西省中考第 24 题	235
例 53	2010 年陕西省中考第 25 题	236
例 54	2010 年宿迁市中考第 28 题	237
例 55	2011 年上海市黄浦区中考模拟第 24 题	238
例 56	2011 年北京市房山区中考模拟第 24 题	238
例 57	2011 年北京市密云县中考模拟第 24 题	240
例 58	2011 年北京市顺义区中考模拟第 25 题	241
例 59	2011 年北京市通州区中考模拟第 24 题	242
例 60	2011 年滨州市中考第 24 题	243
例 61	2011 年东莞市中考第 22 题	243
例 62	2011 年福州市中考第 21 题	244
例 63	2011 年嘉兴市中考第 23 题	246
例 64	2011 年临沂市中考第 25 题	247
例 65	2011 年沈阳市中考第 24 题	248
例 66	2011 年泰州市中考第 28 题	249
§ 4.6	圆	251
例 67	2010 年常州市中考第 27 题	251
例 68	2010 年成都市中考第 28 题	251
例 69	2010 年河北省中考第 24 题	253
例 70	2010 年无锡市中考第 27 题	254

例 71	2011 年上海市崇明县中考模拟第 25 题	254
例 72	2011 年上海市闸北区中考模拟第 23 题	256
例 73	2011 年南京市中考第 26 题	257
例 74	2011 年镇江市中考第 27 题	257
§ 4.7	函数的图象及性质	259
例 75	2010 年长沙市中考第 26 题	259
例 76	2010 年福州市中考第 21 题	260
例 77	2010 年金华市中考第 23 题	261
例 78	2010 年连云港市中考第 28 题	262
例 79	2010 年眉山市中考第 26 题	263
例 80	2010 年绍兴市中考第 24 题	264
例 81	2010 年苏州市中考第 29 题	265
例 82	2010 年徐州市中考第 28 题	266
例 83	2010 年天津市中考第 26 题	267
例 84	2010 年沈阳市中考第 25 题	268
例 85	2010 年长春市中考第 26 题	269
例 86	2011 年上海市闸北区中考模拟第 24 题	270
例 87	2011 年北京市朝阳区中考模拟第 24 题	271
例 88	2011 年大连市中考第 24 题	272
例 89	2011 年杭州市中考第 23 题	272
例 90	2011 年南京市中考第 28 题	273

第一部分

函数图象中点的存在性问题

这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合几何条件的点.

简单一点的题目,就是用待定系数法直接求函数的解析式.

复杂一点的题目,先根据图形给定的数量关系,运用数形结合的思想,求得点的坐标,进而用待定系数法求函数的解析式.

还有一种常见题型,解析式中有待定字母,这个字母可以和根与系数的关系联系起来求解,或者根据题意列出方程组求解.

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题

例 1 2010 年义乌市中考第 24 题

如图 1, 已知梯形 $OABC$, 抛物线分别过点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ 、 $B(6, 3)$.

(1) 直接写出抛物线的对称轴、解析式及顶点 M 的坐标;

(2) 将图 1 中梯形 $OABC$ 的上下底边所在的直线 OA 、 CB 以相同的速度同时向上平移, 分别交抛物线于点 O_1 、 A_1 、 C_1 、 B_1 , 得到如图 2 的梯形 $O_1A_1B_1C_1$. 设梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积为 S , A_1 、 B_1 的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) . 用含 S 的代数式表示 $x_2 - x_1$, 并求出当 $S = 36$ 时点 A_1 的坐标;

(3) 在图 1 中, 设点 D 的坐标为 $(1, 3)$, 动点 P 从点 B 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿着线段 BC 运动, 动点 Q 从点 D 出发, 以与点 P 相同的速度沿着线段 DM 运动. P 、 Q 两点同时出发, 当点 Q 到达点 M 时, P 、 Q 两点同时停止运动. 设 P 、 Q 两点的运动时间为 t , 是否存在某一时刻 t , 使得直线 PQ 、直线 AB 、 x 轴围成的三角形与直线 PQ 、直线 AB 、抛物线的对称轴围成的三角形相似? 若存在, 请求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

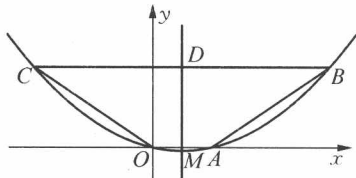


图 1

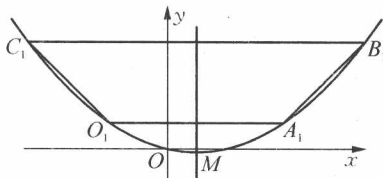


图 2



动感体验

请打开几何画板文件名“10义乌 24”, 拖动点 I 上下运动, 观察图形和图象, 可以体验到, $x_2 - x_1$ 随 S 的增大而减小. 双击按钮“第(3)题”, 拖动点 Q 在 DM 上运动, 可以体验到, 如果 $\angle GAF = \angle GQE$, 那么 $\triangle GAF$ 与 $\triangle GQE$ 相似.

请打开超级画板文件名“10义乌 24”, 可拖动点 I , 或者点动画“ $S = 36$ ”, 发现 $A_1(6, 3)$. 点击动画“相似”, 此时相似看得不甚清楚, 因为三角形有遮挡.



思路点拨

1. 第(2)题用含 S 的代数式表示 $x_2 - x_1$, 我们反其道而行之, 用 x_1, x_2 表示 S . 再注意平移过程中梯形的高保持不变, 即 $y_2 - y_1 = 3$. 通过代数变形就可以了.

2. 第(3)题最大的障碍在于画示意图, 在没有计算结果的情况下, 无法画出准确的位置

关系,因此本题的策略是先假设,再说理计算,后验证.

3. 第(3)题的示意图,不变的关系是:直线 AB 与 x 轴的夹角不变,直线 AB 与抛物线的对称轴的夹角不变.变化的是直线 PQ 的斜率,因此假设直线 PQ 与 AB 的交点 G 在 x 轴的下方,或者假设交点 G 在 x 轴的上方.



满分解答

(1) 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 解析式为 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$, 顶点为 $M(1, -\frac{1}{8})$.

(2) 梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积 $S = \frac{2(x_1 - 1 + x_2 - 1) \times 3}{2} = 3(x_1 + x_2) - 6$, 由此得到

$$x_1 + x_2 = \frac{S}{3} + 2.$$

由于 $y_2 - y_1 = 3$, 所以 $y_2 - y_1 = \frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 = 3$, 整理得

$$(x_2 - x_1) \left[\frac{1}{8}(x_2 + x_1) - \frac{1}{4} \right] = 3.$$

因此 $x_2 - x_1 = \frac{72}{S}$.

当 $S = 36$ 时, $\begin{cases} x_2 + x_1 = 14, \\ x_2 - x_1 = 2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 8. \end{cases}$ 此时点 A_1 的坐标为 $(6, 3)$.

(3) 设直线 AB 与 PQ 交于点 G , 直线 AB 与抛物线的对称轴交于点 E , 直线 PQ 与 x 轴交于点 F , 那么要探求相似的 $\triangle GAF$ 与 $\triangle GQE$, 有一个公共角 $\angle G$.

在 $\triangle GEQ$ 中, $\angle GEQ$ 是直线 AB 与抛物线对称轴的夹角, 为定值.

在 $\triangle GAF$ 中, $\angle GAF$ 是直线 AB 与 x 轴的夹角, 也为定值, 而且 $\angle GEQ \neq \angle GAF$.

因此只存在 $\angle GQE = \angle GAF$ 的可能, $\triangle GQE \sim \triangle GAF$.

这时 $\angle GAF = \angle GQE = \angle PQD$.

由于 $\tan \angle GAF = \frac{3}{4}$, $\tan \angle PQD = \frac{DP}{QD} = \frac{5-t}{t}$, 所以 $\frac{3}{4} = \frac{5-t}{t}$. 解得 $t = \frac{20}{7}$.

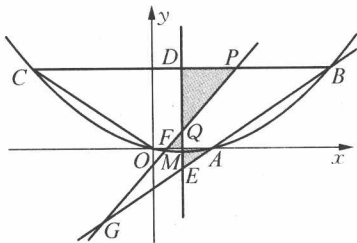


图 3

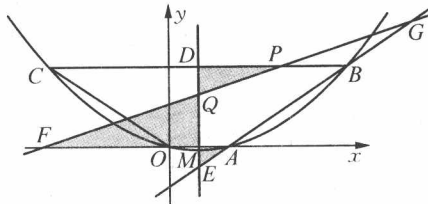


图 4



考点伸展

第(3)题是否存在点 G 在 x 轴上方的情况? 如图 4, 假如存在, 说理过程相同, 求得的 t 的值也是相同的. 事实上, 图 3 和图 4 都是假设存在的示意图, 实际的图形更接近图 3.

例 2 2011 年上海市宝山区中考模拟第 25 题

如图 1, 已知 $\odot O$ 的半径长为 1, PQ 是 $\odot O$ 的直径, 点 M 是 PQ 延长线上一点, 以点 M 为圆心作圆, 与 $\odot O$ 交于 A 、 B 两点, 连结 PA 并延长, 交 $\odot M$ 于另外一点 C .

(1) 若 AB 恰好是 $\odot O$ 的直径, 设 $OM = x$, $AC = y$, 试在图 2 中画出符合要求的大致图形, 并求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 连结 OA 、 MA 、 MC , 若 $OA \perp MA$, 且 $\triangle OMA$ 与 $\triangle PMC$ 相似, 求 OM 的长度和 $\odot M$ 的半径长;

(3) 是否存在 $\odot M$, 使得 AB 、 AC 恰好是一个正五边形的两条边? 若存在, 试求 OM 的长度和 $\odot M$ 的半径长; 若不存在, 试说明理由.

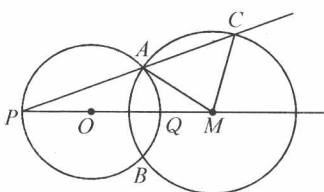


图 1

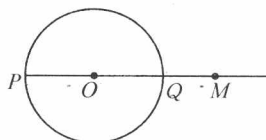
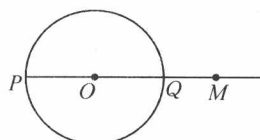


图 2



备用图



动感体验

请打开几何画板文件名“11 宝山 25”, 双击按钮“A、O、B 共线”, 再拖动点 M 运动, 从图象中可以看到 y 是 x 的一次函数; 双击按钮“第(2)题”, 拖动点 M 运动, 可以体验到 $\triangle PMC$ 保持直角三角形, 双击按钮“ $\angle P = \angle AMO$ ”, 可以准确显示两个三角形相似; 双击按钮“第(3)题”, 先拖动点 A , 使得点 C 落在射线 PA 上, 再双击按钮“ $\odot M$ 过点 C ”, 可以体验到, $\odot O$ 与 $\odot M$ 关于 AB 对称.

请打开超级画板文件名“11 宝山 25”, 双击按钮“A、O、B 共线”, 再拖动点 M 运动, 从图象中可以看到 y 是 x 的一次函数; 双击按钮“转向第(2)问”, 点击按钮“ $\angle AOQ = 60^\circ$ ”和“ $OM = 2$ ”, 得到满足题意的图形; 双击按钮“转向第(3)问”, 点击按钮“ $\angle APB = 36^\circ$ ”和“ $OM = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ”, 得到满足题意的图形.



思路点拨

1. 这三道题目强烈地考验大家的画图能力, 图形画好了, 思路就显示出来了.
2. 第(1)题先画直径 AB 与 PQ 互相垂直平分, 等腰直角三角形一目了然.
3. 第(2)题根据 $\angle OAM = 90^\circ$ 画出点 M , 再画 $\odot M$, $\triangle PMC$ 就是直角三角形, 如果 $\triangle OMA$ 与 $\triangle PMC$ 相似, $\text{Rt}\triangle OAM$ 的两个锐角的关系就很显然.
4. 第(3)题没有图不直观, 画图更难办. 倒行逆施: 先画好正五边形 $ACDEB$ 、外接圆 M 以及对称轴 MD , 延长 CA 与对称轴 MD 的交点不就是点 P ? 看看图形的对称性吧, 思路豁然开朗.



满分解答

(1) 画图:画直径 AB 垂直 PQ ;以 M 为圆心,过点 A 画圆交射线 PA 于点 C .

如图 3,过点 M 作 $MH \perp AC$,垂足为 H ,那么 $AH = CH = \frac{1}{2}y$.

因为 AB 与 PQ 互相垂直平分,所以 $\triangle PAO$ 、 $\triangle PMH$ 都是等腰直角三角形.

由于 $PO = 1$, $OM = x$,所以 $PA = \sqrt{2}$, $PH = \sqrt{2} + \frac{1}{2}y$,
 $PM = 1 + x$.

由 $PM = \sqrt{2}PH$,得 $1 + x = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2}y)$.

整理,得 y 关于 x 的函数解析式为 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$.

(2) 如图 4,因为 $OA \perp MA$,所以 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余.

又因为 $\angle 1 = \angle C$, $\angle 2 = \angle P$,所以 $\angle C$ 与 $\angle P$ 互余,
 $\triangle CMP$ 为直角三角形.

因为 $\angle 3 = 2\angle P$,所以 $\triangle OMA$ 与 $\triangle PMC$ 相似,只存在
 $\angle 4 = \angle P$ 的情况.

在 $\text{Rt}\triangle OAM$ 中, $\angle 3 = 2\angle 4$,所以 $\angle 4 = 30^\circ$.

从而 $OM = 2OA = 2$, $\odot M$ 的半径 $AM = \sqrt{3}$.

(3) 如图 5,假设存在 $\odot M$,使得 AB 、 AC 恰好是正五边形
 $ACDEB$ 的两条边,那么正五边形 $ACDEB$ 的对称轴是直线 PQ ,
 $\angle ADB = 36^\circ$.

由于正五边形 $ACDEB$ 的外角等于 72° ,所以 $\triangle PAB$ 的顶角
 $\angle APB = 36^\circ$.

因此点 P 与点 D 关于直线 AB 是对称的.所以 $\odot M$ 与是
 $\odot O$ 等圆,半径为 1.

如图 6,设 $\odot M$ 与 OM 交于点 G ,那么 $\triangle MAG$ 与 $\triangle AQG$
都是顶角为 36° 的等腰三角形.

因此 $AG = AQ = QM$, $\triangle MAG \sim \triangle AQG$.

设 $AQ = m$,那么 $m^2 = 1 - m$.解得 $m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

所以 $OM = OQ + QM = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

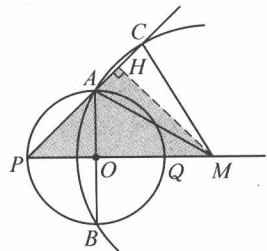


图 3

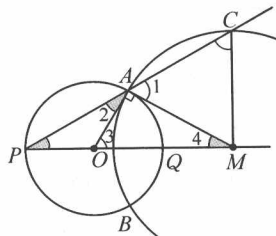


图 4

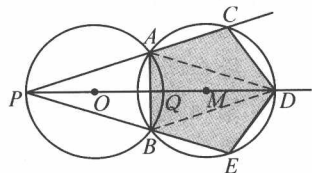


图 5

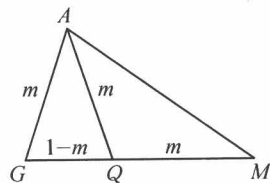


图 6



考点伸展

第(3)题求 OM 的长,关键是求 QM 的长. 36° 的等腰三角形,不由得让人联想起黄金三角形、黄金分割、黄金分割数.

如图 6,由 $\triangle MAG \sim \triangle AQG$,得 $\frac{MA}{AG} = \frac{AQ}{GQ}$.通过解方程 $m^2 = 1 - m$,得 $m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

因此点 Q 就是 MG 的一个黄金分割点.