福建教育学院 梦山丛书

FUJIAN INSTITUTE OF EDUCATION

高等数学

黄勇 主编

厦门　　社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

福建教育学院 梦山丛书

高等数学

黄勇 主编

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/黄勇主编. —厦门:厦门大学出版社,2007.1
(福建教育学院梦山丛书)
ISBN 7-5615-2668-7

Ⅰ.高… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第118904号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
福建省金盾彩色印刷有限公司印刷
(地址:福州市福飞路江厝路5号 邮编:350013)
2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
开本:787×960 1/16 印张:12.25 插页:2
字数:213千字
定价:18.00元

《福建教育学院梦山丛书》编委会

总 序

福建教育学院座落在福州市风景秀丽的大梦山下、西子湖畔。山湖的钟灵之气赋予了学院毓秀之神。五十个日月轮回，五十载花开花落，美丽的山湖见证着学院的培训历程，陪伴着学院研究的征途。为了党的教育事业，为了学院的培训研究，多少无悔的青春在这里闪光，多少年轻的血液在这里流淌，多少智慧的灵感在这里孕育。如今，辛勤耕耘的教育学院人，到了初尝收获的季节了，出版集培训与研究于一体的《梦山丛书》，是全院教职工的愿望，是全体培训学员的期盼。

入选这批《梦山丛书》的教材、著作是老师与学员们共同探索学科理论、探索基础教育培训的结晶。她的问世，推进着学院精品课程的建设，武装了《教育管理学》、《实用计算机基础》、《常微分方程》、《计算机辅助化学教学》、《社会主义精神文明建设概论》、《学校发展与管理》、《马克思主义基本原理》等院级精品课程，形成了具有师范性成人性独特的学科培训教材；她的问世，提升着学院师训干训的层次与水平，《校长培训案例集》、《八闽校长办学方略精粹》、《校长培训与校长专业化发展》、《中学思想道德建设研究》、《求索综合实践活动常态之路》、《视频案例设计与制作》、《计算机实用技术技巧操作》、《英文写作课堂教学综合实践》等教材，支撑着国家级、省级骨干教师与省级学科带头人的培训，支撑着全省完中校长、骨干校长的培训；她的问世，强化了学院学术群的建设，《中国农地使用权流转研究》、《马克思主义哲学方法论》、《常微分方程精品课堂》、《性健康教育概论》、《教育管理学》、《生态旅游》、《高等数学》、

《社会主义精神文明建设论》等著作教材，汇集了学院学科群体的力量，展露了学科学术的优势。有的著作、教材还是国家、省“十五”科研项目。这一切都让我们深感欣慰。

但是，研究是认识向着未知领域的扩展，在这个意义上，研究的领域是无限的，而我们的认识是有限的。因此，我们的研究只能是阶段性局部性的认识，是有待检验、有待发展的研究。

《梦山丛书》是我们一个阶段研究的记录，更是我们深化研究、扩展研究的行动宣言。我们坚信，继她之后，老师们会有更多更新更可喜的成果问世，这，也就是《梦山丛书》出版的最大愿望。

《梦山丛书》编委会

2006 年 9 月

前 言

高等数学是理工学、经济学等专业的基础课、工具课和语言课，对培养人的抽象思维能力、逻辑思维能力、辩证思维能力方面具有不可替代的作用.它不仅关系到大学生后继课程的学习，也影响到人才培养的质量，进而影响到大学生毕业后能否可持续发展.

高职高专高等数学教学面临着诸多困难，主要表现在教学内容多，教学时数少，而学生生源素质总体不高，学习积极性不强等.面对这样一个局面，具有科学体系的高等数学教材的编写和教学改革已迫在眉睫.

本书的编写注重切合学生实际，注重与高职学生的特点相结合，体现人文特性和终极关怀.教材的绪论部分介绍数学学科的特点以及数学对社会、对人的发展的价值，让学生对数学有个整体的认识，从而形成正确的数学观，明确数学学习的目的，提高学习数学的主动性和积极性.

在编写过程中注意突出基础性与减少技巧性相结合，科学知识与数学思想相结合.遵循必需、够用，强化能力，立足应用的原则.各章节内容的编排上力求低起点，多台阶，由浅入深，一层层向前推进.每个例题必要时在解答前加上分析，解答后加上点拨，以突出本例题的思想方法，强调其教育、教学功能.同时也注重系统性与历史性相结合，做到可读性强.淡化数学知识的传授，注重思想方法的渗透和能力的培养.强调从实际引入问题，力求条理清楚，再现数学发现、发明的真实历史.突出强调用了哪些数学思想方法以及这些方法在其中的作用，尽量以数学定理思想方法的直观解释代替数学证明，从而改变他们的数学观，学会用数学的思想方法观察问题、发现问题、提出问题、分析问题进而解决问题.

本书主要内容包括绪论、基础知识、极限与连续、微分学及其应用、积分学

及其应用、无穷级数、微分方程等.其中第一章由何秀萍编写,第四章由李君编写,第六章由陈柳娟编写.本书在编写过程中也得到了许多专家的指导,提出了很多宝贵的意见和建议,特此表示感谢.由于本人水平有限,希望读者对书中不足之处予以批评指正.

黄　勇

2006年7月5日

目 录

绪 论

高等数学是高职高专各专业必修的一门重要基础课.它的内容主要包括函数微分学、积分学,微分方程,级数等,其核心内容是函数的微积分.

一、数学史简介

1.初等数学阶段

17 世纪以前的数学称为初等数学阶段,研究的对象是常数或常量,研究的形是孤立的、规则的几何形体,而且数和形往往是相互独立的.研究常量间代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数和初等几何,统称为初等数学.

2.近代数学阶段

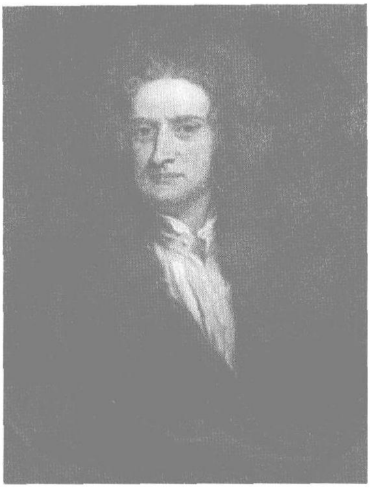
1637 至 19 世纪末的数学,称为高等数学阶段或初等微积分阶段,其核心内容为微积分.

(1)解析几何学建立:1637 年,法国数学家笛卡尔(Descartes)建立解析几何学,这阶段研究的数是变数,形是不规则的几何形体,而且数和形紧密联系起来了.

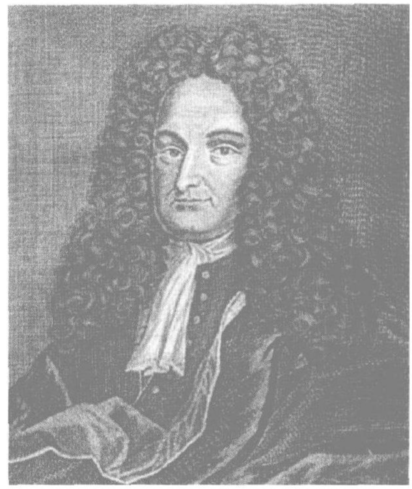
(2)微积分的创立:由于 17 世纪工业革命的直接推动,英国科学家牛顿(Newton)和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)各自独立地创立了微积分.此后,形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支,它们统称为高等数学,也称为初等微积分.

这阶段数学研究对象是函数,主要的工具是极限,一种由近似到精确的思想,用数学方法作出具体刻画.它第一次出现是英国数学家华利斯在 17 世纪作为曲线面积体而引入的.

虽然微积分是由牛顿和莱布尼茨创立,并成功地将它应用于天文、力学与物理、几何中去,但他们并没有建立函数极限的严格定义,从而给人一种高深



牛顿



莱布尼茨

莫测、把握不定的感觉，有时也不能自圆其说. 经过许多数学家近两个世纪的努力，19 世纪末、20 世纪初康托尔(Cantor)的集合论的建立，才有了函数的集合论定义，在实数理论的基础上才建立了严格的极限理论.

3. 现代数学阶段

1874 年，德国数学家康托尔创立集合论，为微积分奠定了坚实的基础，进而形成了内容丰富的以抽象代数、拓扑学与泛函分析为三大基础的现代数学. 1874 年以后的数学，称为现代数学阶段.

二、微积分研究的两个基本问题

1. 求变速直线运动的瞬时速度问题

设一质点在坐标轴上作非匀速运动，时刻 t 质点的坐标为 s，s 是 t 的函数 $s=f(t)$，求动点在时刻 t_0 的速度.

考虑比值 $\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$，这个比值可认为是动点在时间间隔 $t=t_0$ 内的平均速度. 如果时间间隔选较短，这个比值在实践中也可用来说明动点在时刻 t_0 的速度. 但这样做是不精确的，更确切地应当这样：令 $t-t_0\to 0$(即时间间隔无限地趋近于 0)，取比值 $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 的极限，如果这个极限存在，设为 v，即 $v=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$，这时就把这个极限值 v 称为动点在时刻 t_0 的速度.

上述计算过程简单来说就是局部以匀速代替变速，以平均速度代替瞬时速度，然后通过取极限，从瞬时速度的近似值过渡到它的精确值.这类问题是微积分中微分问题的典型代表，微分学的基本概念——导数就是从这类问题中抽象出来的，这一问题我们将在第三章中详细讨论.

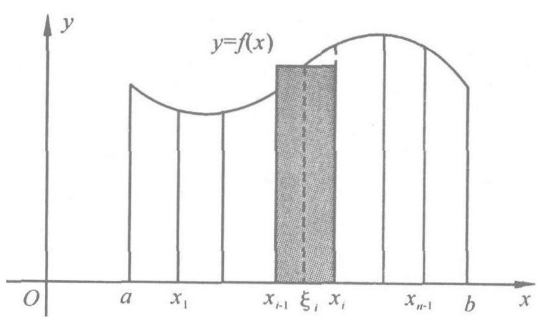
2.曲边梯形的面积

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，由直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧称为曲边.

下面求曲边梯形的面积的近似值.

将曲边梯形分割成一些小的曲边梯形，每个小曲边梯形都用一个等宽的小矩形代替，每个小曲边梯形的面积都近似地等于小矩形的面积，则所有小矩形面积的和就是曲边梯形面积的近似值.具体方法是在区间 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$，它们的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，$\cdots$，$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$，经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形.在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底、$f_i(\xi_i)$ 为高的窄矩形近似替代第 i 个窄曲边梯形（$i=1,2,\cdots,n$），把这样得到的 n 个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A\approx f_1(\xi_1)\Delta x_1+f_2(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f_n(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$



显然，分点越多、每个小曲边梯形越窄，所求得的曲边梯形面积 A 的近似值就越接近曲边梯形面积 A 的精确值.因此，要求曲边梯形面积 A 的精确值，只需无限地增加分点，使每个小曲边梯形的宽度趋于零，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，于是，上述增加分点，使每个小曲边梯形的宽度趋于零，相当于

令 $\lambda \to 0$. 所以曲边梯形的面积为

$$A=\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

以上的计算过程,简单来说就是分割,局部以直代曲,求和取得近似值,取极限的精确值. 以上的求解方法是微积分学中积分问题的典型代表,积分学的基本概念——定积分就是从这类问题中抽象出来的,我们将在第四章中详细讨论.

第一章　基础知识

本章第一部分引入一些具有广泛用途的向量基本知识，建立空间直角坐标系，以向量为工具介绍空间曲面与曲线，讨论平面与直线. 第二部分将在中学数学已有的函数知识基础上进一步理解函数概念，介绍初等函数的主要性质，为微积分的学习打下基础.

§1.1　向量代数与空间解析几何

在自然科学和工程技术中，我们经常会遇到一种既有大小又有方向的量即向量，所遇到的图形经常为空间几何图形.

§1.1.1　向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫作向量.

在数学上，我们通常用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.

我们把以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 向量可用粗体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 或$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$.

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量. 因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量的大小叫作向量的模.向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

特别地,模等于1的向量叫作单位向量.模等于0的向量叫作零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$,规定它的方向可以看作是任意的.

二、向量的运算

1.向量的加法

在力学中经常会碰到求两个力的合力的情形,也就是要求两个向量的和.

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.上述作出两向量之和的方法叫作向量加法的三角形法则.(图1-1)

另外,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,也可以平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.上述作出两向量之和的方法叫作向量加法的平行四边形法则.(图1-2)

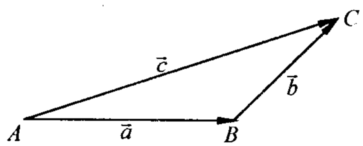


图 1-1

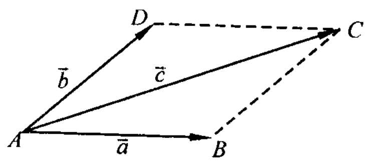


图 1-2

下面我们给出向量的加法的运算规律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

若设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,则与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为$-\boldsymbol{a}$.

规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

2.向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

向量与数的乘法的运算规律如下:

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.