信号与线性系统学习指南

曾黄麟　主编

科学出版社

信号与线性系统学习指南

曾黄麟 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是为双语教材《信号与线性系统》编写的配套学习指导书。本书根据教学大纲内容的要求，对信号基础知识，系统的基本概念，线性位移不变连续系统的时域分析，线性位移不变离散系统的时域分析，连续时间信号与系统的频域分析，离散傅里叶级数、离散时间傅里叶变换与 DFT，拉普拉斯变换及复频域分析，z 变换与 z 域分析，系统的状态变量分析 9 个方面的重点、难点进行了分析、总结和归纳，并给出了大量的例题和习题来加深对概念的理解和提高解题的技巧。

本书可作为电子信息、通信工程、自动化、计算机科学与技术、系统工程等专业专科生、本科生和其他专业研究生的学习指导教材，特别是对于这些专业学生考研复习具有重要的指导意义，也可作为相关专业、相关领域研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统学习指南/曾黄麟主编. —北京：科学出版社，2011.2

ISBN 978-7-03-030118-5

Ⅰ.①信… Ⅱ.①曾… Ⅲ.①信号理论-高等学校-教学参考资料②线性系统-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 013981 号

责任编辑：匡 敏 潘斯斯 张丽花/责任校对：张凤琴
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011 年 2 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数：1—4 000 字数：480 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“信号与线性系统”课程是电子信息、通信工程、自动化、计算机科学与技术、系统工程等专业的一门重要技术基础课，主要研究信号与线性系统分析的基本概念、原理、方法与工程应用，在教学计划中起着承前启后的作用。一方面它以工程数学和电路分析理论为基础，另一方面它本身又是后续的专业课的基础，也是学生将来从事专业技术工作的重要理论基础。它将为学生的素质培养起到重要的作用。因此，我国把它作为电子信息、通信类等专业硕士学位研究生入学考试的必考科目之一。

根据教育部组织实施的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，依据教学大纲的要求，我们编写了《信号与线性系统》双语教材，并通过四川省精品课程、国家精品课程建设项目，为《信号与线性系统》一书建立了学习网站，帮助电子信息、通信工程、自动化、计算机科学与技术、系统工程等专业专科生、本科生和其他专业的研究生学习。

为了使学生对基本概念有较清晰的“理解”，对学习的重点、难点有较清楚的“认识”，对分析方法运用有较熟练的“掌握”，对解题技巧有一定的“启示”，我们编写了这本《信号与线性系统学习指南》。

本书具有如下特点：

1. 根据教学大纲内容的要求，对信号基础知识，系统的基本概念，线性时不变连续系统的时域分析，线性时不变离散系统的时域分析，连续时间信号与系统的频域分析，离散傅里叶级数、离散时间傅里叶变换与DFT，拉普拉斯变换及复频域分析，z变换与z域分析，系统的状态变量分析9个方面的重点、难点进行了分析、总结和归纳。

2. 根据我们二十多年的教学经验，结合收集的几十个学校考研的试题及国外近年来在信号与系统课程方面的改革经验，给出了大量的例题、习题来加深对概念的理解和提高解题的技巧。

本书主要是以四川省精品课程、曾黄麟教授编写的《信号与线性系统》为基本框架，参考国内外高校近年来普遍使用的教材，经过认真整理完成的。本书各章的高级问题借鉴了许多兄弟院校的成果，全书的理论概要、例题、基本问题及测试题由曾黄麟教授编写整理，各章基本问题的参考答案由王晶老师编写整理，各章图表由刘勇老师编写整理。在编写过程中，四川理工学院给予了许多支持和帮助，兄弟院校的老师提出了许多宝贵意见，对我们在内容安排和与相关课程的衔接上都有很大帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中一定有不妥之处，敬请读者赐教。

编　者

2011年1月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　信号基础知识

学习重点

(1) 主要掌握信号的基本知识，包括信号的定义和信号的分类。

(2) 掌握一些基本信号的性质，特别是连续时间单位阶跃信号 $u(t)$ 及连续时间单位冲激信号 $\delta(t)$。

(3) 掌握信号的基本运算与波形变换方法。

1.1　信号的定义及其分类

基本要求

(1) 了解信号及其描述。

(2) 理解信号的分类。

理论概要

信号是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象。信号是随时间而变化的，在数学上可以用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示。

当信号满足条件：$t<0$ 时，$f(t)=0$ 时，称为物理可实现信号，即在时刻小于零的一侧全为零，信号完全由时刻大于零的一侧确定，称为因信号；当信号满足条件：$t\geqslant 0$ 时，$f(t)=0$，即在时刻大于零的一侧全为零，信号完全由时刻小于零的一侧确定，称为反因信号。

信号的分类如下。

(1) 按时间函数的确定性划分，信号可分为确定信号与随机信号两类。确定信号是指一个可以用明确的数学关系式描述的信号，即可以表示为一个或几个自变量的确定的时间函数的信号。随机信号是指不能预知它随时间变化的规律，不是时间的确定函数，即不可预知或不能用数学关系式描述其幅值、相位变化，通常只知道它取某一些数值的概率的信号。

对于确定信号，它可以进一步分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

周期信号是指经过一定时间可以重复出现的信号；非周期信号在时间上不具有周而复始的特性，往往具有瞬变性，也可以看作为一个周期 T 趋于无穷大时的周期信号；准周期信号是由有限个周期信号合成，但各周期信号的频率相互间不是公倍关系，其合成信号不满足周期条件。

(2) 按照时间函数取值的连续性，信号可划分为连续时间信号与离散时间信号，简称连续信号与离散信号。连续信号是指在所讨论的时间间隔内，除有限个第一类间断点外，对于任意时刻值都可给出确定的函数值，此类信号称为连续信号或模拟信号；离散信号是指在所讨论的时间区间，只在某些不连续规定的时刻给出函数值，而在其他时刻没有给出函数值，是由一组按时间顺序的观测值组成的，所以也称为时间序列或简称为序列。

(3) 信号按时间函数的可积性，可以划分为能量信号、功率信号和非功率非能量信号。

信号平方的无穷积分简称为信号能量 E,即

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

信号的平均功率定义为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

若信号 $f(t)$的能量有界,即 $0<E<\infty$,此时 $P=0$,则称此信号为能量信号;若信号$f(t)$的功率有界,即 $0<P<\infty$,此时 $E=\infty$,则称此信号为功率信号。

典型例题

【例 1.1-1】 分析下列信号。

(1) $u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$;　　(2) $u(-t)=\begin{cases}0, & t\geqslant 0\\ 1, & t<0\end{cases}$;

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nt}$,$n$ 是自然数;

(4) $f(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)-2\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$;(5) $f(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\pi/8)}$;

(6)$f(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n/8-\pi)}$;(7) $f(t)=\cos3t+\cos7t+\cos11t$;

(8) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}$,a 是实数;(9) 汽车奔驰时所产生的振动信号。

解 (1) 因信号,连续阶跃函数;

(2) 反因信号,连续反向阶跃函数;

(3) 因 $T=\frac{2\pi}{\omega}=n$,n 是自然数,连续的周期复指数函数;

(4) 因 $T=\frac{2\pi}{\omega}=8,16,4$,合成信号 $T=16$,故为连续的周期正弦函数;

(5) 令 $\Omega=\frac{\pi}{8}$,$T=\frac{2\pi}{\Omega}=16$,是有理数,故为离散的周期复指数函数;

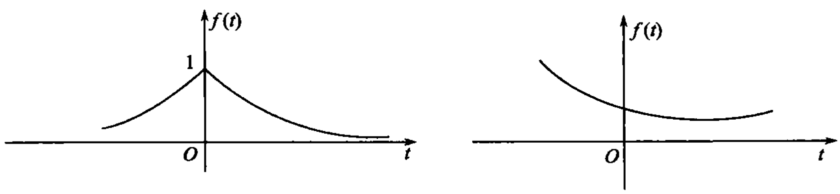
(6) 令 $\Omega=\frac{1}{8}$,$T=\frac{2\pi}{\Omega}=16\pi$,是无理数,故为离散的非周期序列;

(7) 各周期信号的频率相互间不是公倍关系,其合成信号不满足周期条件,故为连续的准周期正弦函数;

(8) 连续的非周期指数函数;

(9) 随机信号。

【例 1.1-2】 如图 1.1-1 所示信号,判断其是否为能量信号与功率信号。



(a) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2|t|}$　　(b) $f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}$

图 1.1-1　例 1.1-1 题图

解　图 1.1-1(a)的信号　$f_1(t)=\mathrm{e}^{-2|t|}$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(\mathrm{e}^{-2|t|})^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$P=0$$

所以，该信号为能量信号。

对于图 1.1-1(b)所示信号 $f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}$，则有

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(\mathrm{e}^{-2t})^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-4T}-\mathrm{e}^{4T}}{4}\right]=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}-\mathrm{e}^{-4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{4T}}{2}=\infty$$

所以，该信号既非能量信号又非功率信号。

【例 1.1-3】　已知信号 $f(t)=2\mathrm{e}^{-t}-6\mathrm{e}^{-2t}(t>0)$是一个能量信号，求其能量。

解　$E=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}(2\mathrm{e}^{-t}-6\mathrm{e}^{-2t})^2\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}(4\mathrm{e}^{-2t}-24\mathrm{e}^{-3t}+36\mathrm{e}^{-4t})\mathrm{d}t=3$

1.2　基本信号

基本要求

熟练掌握几种基本的连续时间和离散时间信号的性质。

理论概要

下面列出几种基本的连续时间信号和离散时间信号。

(1) 连续时间正弦型信号

$$f(t)=A\sin(\omega_0t+\varphi)=A\cos\left(\omega_0t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\tag{1.2.1}$$

式中，A 为振幅，ω_0 为角频率(弧度/秒)，φ 为初始角(弧度)。正弦信号是周期信号，周期为 $T(T=2\pi/\omega_0)$。

(2) 离散正弦型序列是正弦时间函数或余弦时间函数经取样后得来的，可表示为

$$f[k]=A\sin(\Omega_0k+\varphi)\tag{1.2.2}$$

正弦型信号具有非常实用的一些性质：

① 两个频率相同的正弦信号相加，即使其振幅与相位各不相同，但相加后结果仍然是原频率的正弦信号。

② 若一个正弦信号的频率是另一个正弦信号频率的整数倍，则合成信号是一个非正弦周期信号，其周期等于基波的周期。

③ 正弦信号对时间的微分或积分仍然是同频率的正弦信号。

余弦信号与正弦信号均可用欧拉公式展开为复指数信号

$$\cos\omega t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\tag{1.2.3}$$

$$\sin\omega t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}\tag{1.2.4}$$

(3) 连续时间复指数信号可表示为

$$f(t) = Ae^{st}, s = a + j\omega \tag{1.2.5}$$

s 称为复频率。又可表示为 $f(t)=Ae^{at}\cos\omega t+jAe^{at}\sin\omega t$。

离散时间复指数序列可表示为

$$f[k] = e^{j\omega_0 t}\big|_{t=kT_0} = e^{j\omega_0 kT_0} = e^{j\Omega_0 k},\quad \Omega_0 = \omega_0 T_0 \tag{1.2.6}$$

注意：比较正弦型信号、复指数信号与正弦型序列、复指数序列的表达式可见，虽然它们都可以是周期信号，但对连续时间信号来说，ω 取值可以在 $-\infty<\omega<\infty$ 区间，其周期为 $T_0=2\pi/\omega_0$。

而对离散时间信号来说，如同正弦序列，若复指数序列是一个以 N 为周期的周期序列，则有 $e^{j\Omega_0 k}=e^{j\Omega_0(k+N)}$，所以，$\Omega_0 N=2\pi m$，$m$ 为整数，即 $2\pi/\Omega_0=N/m$，为有理数，其周期为 $N=m(2\pi/\Omega_0)$。由于 $e^{j\Omega_0 k}=e^{j(\Omega_0\pm k2\pi)n}$，$n$ 为正整数，表示在数字频率上相差 2π 整数倍的所有离散时间复指数序列(正弦序列)都是一样的。也就是说，离散域的频率 Ω 的有效取值是在 $0\leqslant\Omega\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 的任一间隔为 2π 的范围。

由此可知，将正弦型信号与复指数信号从连续域变换到离散域，相当于把无限的频率范围映射到有限的频率范围，即数字频率 Ω 仅在 $0\leqslant\Omega\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 范围内取值，而且意味着 $\Omega=\pm\pi$(或 π 的奇数倍)是序列在频率域的最高频率；$\Omega=0$ 及 2π(或 π 的偶数倍)是序列在频率域的最低频率。

复指数信号具有的性质如下。

复指数信号可分解为实部和虚部两部分，它们分别代表余弦和正弦振荡信号，且其波形是随 s 的不同而不同。当 $s=0$ 时，信号为直流信号；当 $\omega=0$ 时，信号变成为一个单调增长或衰减的实指数信号；当 $a=0$ 时，信号实部是一个等幅余弦信号，虚部是一个等幅正弦信号。在通常情况下，复指数信号的实部是一个增幅($a>0$)或减幅($a<0$)的余弦信号。

(4) 连续时间单位阶跃信号表示为 $u(t)$，其定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

离散时间单位阶跃序列表示为 $u[n]$，其定义为

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geqslant 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

(5) 连续时间单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其工程定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{1.2.9}$$

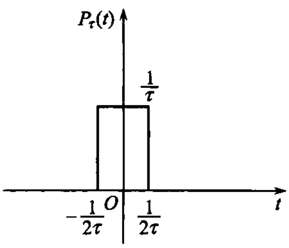


图 1.2-1　连续时间信号矩形脉冲 $p_\tau(t)$

直观地看，这一函数可以设想为一列窄脉冲的极限。图 1.2-1 是一矩形脉冲 $p_\tau(t)$，宽度为 τ，高度为 $1/\tau$，其面积为 1，若此脉冲宽度继续缩小至极限情况，即当 $\tau\to0$，$1/\tau\to\infty$，这时高度无限增大，但面积始终保持为 1。故单位冲激信号也可表达为

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to0} p_\tau(t)$$

从这个观点出发,还可把单位冲激信号表达为

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\left|\frac{t}{\tau}\right|}=\delta(t)\quad 或 \quad \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}=\delta(t)\quad 或 \quad \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\mathrm{Sa}(kt)=\delta(t)$$

其中,$\mathrm{Sa}(kt)=\dfrac{\sin(kt)}{kt}$称为取样函数。

单位冲激信号具有下列一些重要性质。

(1) $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$。

(3) $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$。

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$。

(5) $\delta(t)=\delta(-t)$,　$\delta(at)=\dfrac{1}{a}\delta(t)$。

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a}f(\dfrac{t_0}{a})$。

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-f'(0)$。

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0)$ 。

单位冲激和单位阶跃之间的关系如下。

单位冲激信号的积分为单位阶跃信号

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.10}$$

单位阶跃信号的导数为单位冲激信号

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.11}$$

离散时间单位序列 $\delta[k]$,其定义为

$$\delta[k]=\begin{cases}1,k=0\\0,k\neq 0\end{cases} \tag{1.2.12}$$

在离散域 $\delta[k]$与 $u[k]$之间存在类似的差分与累加的关系,即

$$\delta[k]=u[k]-u[k-1],u[k]=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta[n] \tag{1.2.13}$$

典型例题

【例 1.2-1】 画出波形离散时间实指数序列 $f[k]=a^k,a\in R,a>1$, $a=1,a<1$ 时的几种不同的实指数序列。

解 如果 $a>1$,它是单调增长的实指数序列;如果 $a=1$,它是常数序列;如果 $a<1$,它是单调衰减的实指数序列,分别如图 1.2-2(a)、(b)和(c)所示。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

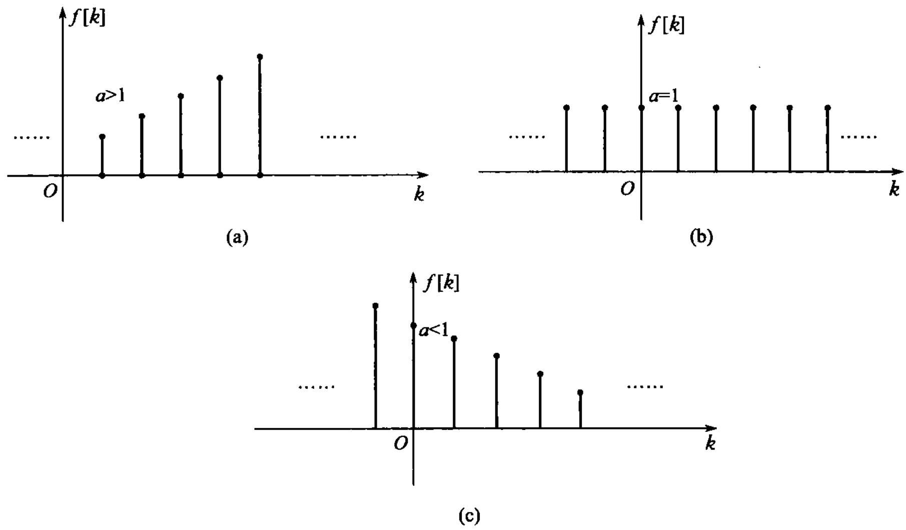


图 1.2-2　例 1.2-1 题图

【例 1.2-2】　设 $x(t)$是复指数信号：$x(t)=e^{j\Omega_0 t}$，其角频率为 Ω_0，基本周期为 $T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0}$。如果离散时间序列 $x[k]$是通过对 $x(t)$以取样间隔 T_s 进行均匀取样的结果，即

$$x[k]=x(kT_s)=e^{j\Omega_0 kT_s}=e^{j\omega_0 k}$$

试求出使 $x[k]$为周期信号的条件。

解　因为 $\omega_0=\Omega_0 T_s$，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\Omega_0 T_s}=\frac{2\pi}{2\pi f_0 T_s}=\frac{T_0}{T_s}$，而$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}$，所以取样间隔比率$\frac{T_0}{T_s}$和 $x(t)$的基本周期 T_0 均为有理数时，$x[k]$是一个周期信号。

【例 1.2-3】　求信号 $x[k]=e^{j0.2k\pi}+e^{-j0.3k\pi}$的周期。

解　$\omega_0=0.2\pi$ 时，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{0.2\pi}=10$，$N_1=10$。

$\omega_0=0.3\pi$ 时，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{0.3\pi}=\frac{20}{3}$，$N_2=20$。

二者的公共周期为 20，故 $x[k]$的周期为 20。

【例 1.2-4】　画出下列信号的波形。

(1) $f(t)=\delta(t^2-4)$；　　(2) $f(t)=\delta(\sin\pi t)$。

解　一般对于奇异函数的问题，首先是求出奇异函数发生的位置，然后再画出奇异函数的波形。

(1) 令 $t^2-4=0$，求出 $t=2$ 和 $t=-2$，故

$$f(t)=\delta(t^2-4)=\delta(t+2)+\delta(t-2)$$

其波形如图 1.2-3 所示。

(2)令 $\sin\pi t=0$，求出 $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，故

$$f(t)=\delta(\sin\pi t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t+i)$$

其波形如图 1.2-4 所示。

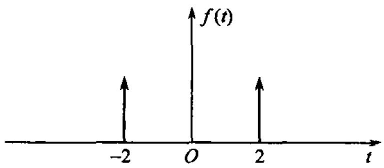


图 1.2-3　例 1.2-4(1)题图

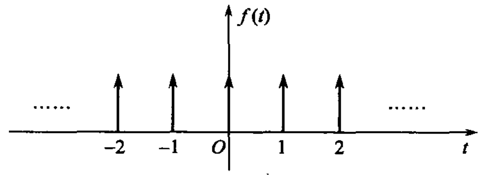


图 1.2-4　例 1.2-4(2)题图

【例 1.2-5】 计算下列奇异函数的积分。

(1) $y(t)=\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+2\delta(t-2)]\mathrm{d}t$;

(2) $y(t)=\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+2\delta(t-2)+2\delta(t+5)]\mathrm{d}t$;

(3) $y(t)=\int_{-2\pi}^{2\pi}(t+1)\delta(\cos t)\mathrm{d}t$;

(4) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)(t^2+\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin\pi t}{t-1})\mathrm{d}t$;

(5) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-5t}\delta''(t)\mathrm{d}t$ 。

解　(1) $y(t)=\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+2\delta(t-2)]\mathrm{d}t$

$$=(t^2+3t+2)\mid_{t=0}+2(t^2+3t+2)\mid_{t=2}=26$$

(2) $y(t)=\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+2\delta(t-2)+2\delta(t+5)]\mathrm{d}t$

$$=(t^2+3t+2)\mid_{t=0}+2(t^2+3t+2)\mid_{t=2}+0=26$$

(3) $y(t)=\int_{-2\pi}^{2\pi}(t+1)\delta(\cos t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\left[\delta\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)+\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\left(1-\frac{3\pi}{2}\right)+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=4$$

(4) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)\left(t^2+\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin\pi t}{t-1}\right)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)t^2\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)\ \frac{e^{-t}\sin\pi t}{t-1}\mathrm{d}t$$

$$=t^2\mid_{t=1}+\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin\pi t}{t-1}\mid_{t=1}=1+\lim_{t\to1}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin\pi t}{t-1}=1+\lim_{t\to1}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-t}\sin\pi t)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-1)}$$

$$=1-\frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

(5) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-5t}\delta''(t)\mathrm{d}t=(-1)^2(\mathrm{e}^{-5t})''\mid_{t=0}=25$

【例 1.2-6】 在电路系统分析中,用奇异函数信号源表达电容端口电压与电容电流的关系。

解 电容是储能元件,在分析系统的响应时常常需要考虑它们的初始状态,因在 $t \geqslant 0$ 任意时刻,电容端口电压与电容电流的关系是

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果选初始时刻为 $t=0$,那么在 $t \geqslant 0$ 的任意时刻,上式可写为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= u_C(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

或写为

$$u_C(t) = u_C(0)u(t) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中,$u(t)$是单位阶跃函数。

上式表明,具有初始电压 $u_C(0)$的电容,在 $t \geqslant 0$ 的时间范围内,可以用初始电压为零的电容与电压源 $u_C(0)u(t)$相串表示。

若将上式求导数, 移项后,并乘以 C,可得

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} - Cu_C(0)\delta(t)$$

上式表明,在 $t \geqslant 0$ 的任意时刻,电容电流由两部分组成,其第一项是流经电容的电流,第二项是反映电路中电容上的初始储能强度为$-Cu_C(0)$的冲激电流源。

【例 1.2-7】 在电路系统分析中,用奇异函数信号源表达电感电流与电压的关系。

解 电感是储能元件,在分析系统的响应时常常需要考虑它们的初始状态,在 $t \geqslant 0$ 任意时刻,电感电流与电压的关系是

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果选初始时刻为 $t=0$,那么在 $t \geqslant 0$ 的任意时刻,上式可写为

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

或写为

$$i_L(t) = i_L(0)u(t) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中,$u(t)$是单位阶跃函数。

上式表明,具有初始电流 $i_L(0)$的电感,在 $t \geqslant 0$ 的时间范围内,可以用初始电流为零的电感与电流源 $i_L(0)u(t)$相并联表示。

将上式求导数, 移项后,并乘以 L,可得

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}-Li_L(0)\delta(t)$$

上式表明，在 $t\geqslant0$ 的任意时刻，电感电压由两部分组成，其第一项是自感引起的电压，第二项是反映电路中电感中的初始储能强度为 $-Li_L(0)\delta(t)$ 的冲激电压源。

1.3　信号的基本运算与波形变换

基本要求

(1) 熟练掌握信号的下列基本运算。

① 信号的相加与相乘；

② 连续时间信号微分和离散时间序列差分运算；

③ 连续时间信号积分和离散时间序列累加运算；

④ 取模(或取绝对值)运算。

(2) 熟练掌握下列自变量变换导致的信号变换。

① 信号的时移；

② 信号的折叠；

③ 信号的尺度变换；

④ 连续时间信号的时域压扩和幅度放缩；

⑤ 离散时间信号的尺度变换：抽取和内插零。

(3) 正确理解信号的下列分解。

① 信号的交直流分解；

② 信号的奇偶分解；

③ 信号分解为实部和虚部；

④ 信号分解成矩形脉冲序列之和及冲激信号的积分；

⑤ 信号的正交分解。

理论概要

1. 信号的基本运算

1) 信号相加(相乘)的信号运算

两个连续时间信号相加(相乘)的信号运算，称为信号的相加(相乘)运算。连续时间信号相加(相乘)运算可分别表示为

$$y(t)=f_1(t)+f_2(t) \tag{1.3.1}$$

$$y(t)=f_1(t)\cdot f_2(t) \tag{1.3.2}$$

两个(或多个)离散时间信号(序列)相加(或相减)所构成的新信号(序列)，其运算分别表示如下

$$y[k]=f_1[k]+f_2[k] \tag{1.3.3}$$

$$y[k]=f_1[k]\cdot f_2[k] \tag{1.3.4}$$

2）连续时间信号微分和离散时间序列差分运算

连续时间信号微分：连续时间信号 $f(t)$ 的微分是指 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 或记作 $f'(t)$，它表示信号随时间变化的变化率。

离散时间序列差分：离散时间序列 $f[k]$ 的一阶差分，表示 $f[k]$ 在该时刻的变化率，运算定义为

$$y[k]=\Delta f[k]=f[k]-f[k-1] \tag{1.3.5}$$

定义 $f(t)$ 的高阶微分和 $f[k]$ 的高阶差分运算：$f(t)$ 的 n 阶微分或 $f[k]$ 的 n 阶差分为

$$y(t)=f^{(n)}(t)=\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \tag{1.3.6}$$

$$y[k]=\Delta^n f[k]=\Delta^{n-1}f[k]-\Delta^{n-1}f[k-1],n\geqslant 1 \tag{1.3.7}$$

3）连续时间信号积分和离散时间序列累加运算

连续时间信号 $f(t)$ 的积分表达为 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 或记作为 $f^{(-1)}(t)$，它是指在任意时刻 t 的值为从 $-\infty$ 到 t 区间，$f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

离散时间序列 $f[k]$ 的一次累加运算定义为

$$y[k]=\sum_{n=-\infty}^{k}f[n] \tag{1.3.8}$$

它是与连续时间信号积分运算相对偶的运算。

4）取模（或取绝对值）运算

将一个复信号或复序列所有信号的值的模（幅度），作为一个新信号对应时刻信号值的过程称为取模运算。对连续时间或离散时间信号的取模运算可分别表示为

$$y(t)=|f(t)|=\sqrt{f(t)f^*(t)} \tag{1.3.9}$$

$$y[k]=|f[k]|=\sqrt{f[k]f^*[k]} \tag{1.3.10}$$

其中，上标“ * ”表示取共轭运算。

在信号与系统分析中，往往需要对自变量进行变换，这种变换或操作称为波形变换。

2. 自变量变换导致的信号变换

1）信号的时移

对于连续时间信号将信号 $f(t)$ 沿时间 t 轴上平移 $\pm\tau$（τ 为大于 0 的常数），则得时移信号 $f(t\pm\tau)$，即就是将 $f(t)$ 表达式中的所有自变量 t 用 $t\pm\tau$ 替代。时移信号 $f(t-\tau)$ 是将原序列沿正 t 轴方向（右）移动 τ 个单位，而 $f(t+\tau)$ 是将原序列向负 t 轴方向（左）移位 τ 个单位。

对于离散时间信号（序列）$f[k]$，若整常数 $m>0$，时移信号 $f[k-m]$ 是将原序列沿正 k 轴方向（右）移动 m 个单位，而 $f[k+m]$ 是将原序列向负 n 轴方向（左）移位 m 个单位。

2）信号的折叠

信号的折叠也称为翻转，对于连续时间或离散时间信号就是将信号 $f(t)$ 或 $f[k]$ 以纵坐标轴为轴翻转 180°（折叠），即得折叠信号 $f(-t)$ 或 $f[-k]$，也就是将信号的表达式及其定

义域中的所有自变量 t(或 k)用 $-t$(或 $-k$)替代。

从波形看，$f[-(t+\tau)]=f(-t-\tau)$(或 $f[-k-m]$)的波形是先折叠为 $f(-t)$(或 $f[-k]$)的波形后，再向左移动得 $f[-(t+\tau)]=f(-t-\tau)$(或 $f[-k-m]$)；或者是将波形先右移动为 $f(t-\tau)$或 $f[k-n]$，再沿纵坐标折叠为 $f[-(t+\tau)]=f(-t-\tau)$(或 $f[-k-m]$)。

$f[-(t-\tau)]=f-(t+\tau)$(或 $f[-k+m]$)的波形是先折叠为 $f(-t)$(或 $f[-k]$)的波形后，再向右移动得 $f[-(t-\tau)]=f(-t+\tau)$(或 $f[-k+m]$)；或者是将波形先左移动为 $f(t+\tau)$或 $f[k+m]$，再沿纵坐标折叠为 $f[-(t-\tau)]=f(-t+\tau)$(或 $f[-k+m]$)。

3) 信号的时间尺度变换

连续时间信号的时域压扩：把信号 $f(t)$及定义域中自变量 t 用 at 替代，成为 $f(at)$。其中，a 是常数，称为尺度变换系数。若 $a>1$ 时，则 $f(at)$的波形是把 $f(t)$的波形以原点($t=0$)为基准，沿时间轴压缩至原来的$\frac{1}{a}$；若 $0<a<1$ 时，则 $f(at)$的波形是把 $f(t)$的波形以原点($t=0$)为基准，沿时间轴扩展至原来的$\frac{1}{a}$；若 $a<0$ 时，则 $f(at)$的波形是将 $f(t)$的波形折叠并沿时间轴压缩或扩展至原来的$\frac{1}{a}$。

离散时间信号的尺度变换：由于离散时间信号在时间上的离散性，分为抽取和内插。当离散时间变量 k 变成 Mk(M 为正整数)，即离散时域尺度放大为原来的 M 倍，表示为 $f[k]\to f[Mk]$，整数 $M>0$，通常把 $f[k]\to f[Mk]$的离散时间信号变换取名为 $M:1$ 抽取。当离散时间变量 k 变成$\frac{k}{M}=l$(整数 $M>0$，l 为整数)时，离散时间尺度变换表达为 $f[k]\to f_{(M)}[k]$，即 $f_{(M)}[k]=\begin{cases} f[k/M], & k=lM \\ 0, & k\neq lM \end{cases}$，$l=0,\pm1,\pm2,\cdots$。由 $f[k]\to f_{(M)}[k]$的离散时间信号变换称为内插 $M-1$ 个零的操作(或变换)，简称内插零。

3. 信号的幅度放缩

信号的幅度变换就是把信号 $f(t)$(或 $f[k]$)乘以常数 a(幅度变换系数)，若 $a>1$，则信号 $f(t)$(或 $f[k]$)按比例把幅度放大至原来的 a 倍；若 $a<1$，则信号 $f(t)$(或 $f[k]$)按比例把幅度缩小至原来的 a。

下面介绍信号分解的几种方法。

1) 信号的交直流分解

连续信号 $f(t)$可以分解为直流分量 $f_D(t)$和交流分量 $f_A(t)$之和，即

$$f(t)=f_D(t)+f_A(t) \tag{1.3.11}$$

信号的直流分量 $f_D(t)$是指信号的平均值，即 $f_D(t)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}f(t)\mathrm{d}t$。将原信号去掉直流分量，剩下的是信号的交流分量 $f_A(t)$。

2) 信号的奇偶分解

任何信号 $f(t)$都可以分解为偶分量 $f_{ev}(t)$和奇分量 $f_{od}(t)$之和。即

$$f(t)=f_{ev}(t)+f_{od}(t) \tag{1.3.12}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com