走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2011）

顾问　裘宗沪

2011年IMO中国国家集训队教练组　编

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

华东师范大学出版社

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2011）

2011年IMO中国国家集训队教练组 编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦(2011)/2011年IMO中国国家集训队教练组编. —上海:华东师范大学出版社,2011.9

ISBN 978-7-5617-8825-7

Ⅰ.①走… Ⅱ.①2… Ⅲ.①数学课—中学—竞赛题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第156204号

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦(2011)

编　　者　2011年IMO中国国家集训队教练组
策划编辑　倪　明(数学工作室)
项目编辑　孔令志
审读编辑　孔令志　徐惟简
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　5.25
插　　页　4
字　　数　116千字
版　　次　2011年9月第一版
印　　次　2011年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8825-7/G·5235
定　　价　18.00元

出 版 人　朱杰人

前　　言

本书以 2011 年国家集训队的测试选拔题为主体，搜集了 2010 年 8 月至 2011 年 7 月间国内主要的数学竞赛及 2011 年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了 2011 年美国和俄罗斯数学奥林匹克的试题与解答，2011 年罗马尼亚大师杯数学竞赛的试题与解答，这些试题大都是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有 2010 年全国高中数学联赛（中国数学会普及工作委员会主办）、2011 年中国数学奥林匹克（CMO）（中国数学奥林匹克委员会主办），以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第 9 届中国女子数学奥林匹克（CGMO）和第 10 届中国西部数学奥林匹克（CWMO）等.

在 2011 年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导. 另外在国家集训队集训期间，除了国家集训队教练组外，美国国家队领队冯祖鸣先生、南开大学丁龙云教授、天津师范大学李建泉教授、集美大学王志雄教授为学生做了专题讲座，提供了一些测验题. 在国家队集训期间，除了国家队教练组外，潘承彪教授、丁龙云教授、萧振纲教授

为学生做了精彩的报告，裘宗沪教授对学生进行了赛前指导，再次对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作. 本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2010 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理，2011 年中国数学奥林匹克由陈永高整理，2010 年第 9 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2010 年第 10 届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理，2010 年第 7 届中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理，2011 年国家集训队测试题由熊斌整理，2011 年中国国家队选拔考试题由瞿振华整理，2011 年第 52 届国际数学奥林匹克由熊斌和冯志刚整理. 2011 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固整理，2011 年美国数学奥林匹克由张思汇整理，2011 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克由冯志刚整理.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝施教.

2011 年 IMO 中国国家集训队教练组
2011 年 7 月

目　录

2010 年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2010 年全国高中数学联赛由福建省数学会承办. 竞赛活动于 2010 年 10 月 17 日(星期日)举行.

为使这项活动不断完善、更加科学合理，2010 年对一试、加试的分值搭配再做微调(考试时间、题型结构均不变)：

一试考试时间为 8:00—9:20，共 80 分钟，包括 8 道填空题(每题 8 分)和 3 道解答题(分别为 16 分、20 分、20 分)，满分 120 分.

加试考试时间为 9:40—12:10，共 150 分钟，包括 4 道解答题，涉及平面几何、代数、数论、组合四个方面. 前两题每题 40 分，后两题每题 50 分，满分 180 分.

竞赛确定了“2010 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”，31 个赛区共有 1237 名同学获得赛区一等奖. 竞赛确定了“2011 年全国中学生数学冬令营营员名单”，有 201 名同学取得了参加 2011 年长春冬令营的资格.

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是________.

解 易知 $f(x)$的定义域是$[5, 8]$,且 $f(x)$在$[5, 8]$上是增函数,从而可知 $f(x)$的值域为$[-3, \sqrt{3}]$.

2 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为-3,则实数 a 的取值范围是________.

解 令 $\sin x=t$,则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$,即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $-at^3+(a-3)t\geqslant -3$,即

$$-at(t^2-1)-3(t-1)\geqslant 0,$$
$$(t-1)(-at(t+1)-3)\geqslant 0$$

及 $t-1\leqslant 0$ 知 $-at(t+1)-3\leqslant 0$,即

$$a(t^2+t)\geqslant -3. \qquad ①$$

当 $t=0, -1$ 时,① 式总成立;

对 $0<t\leqslant 1$,有 $0<t^2+t\leqslant 2$;

对 $-1<t<0$,有 $-\frac{1}{4}\leqslant t^2+t<0$.

从而可知 $-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 12$.

3 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部(不含边界)整点(纵横坐标均为整数的点)的个数是________.

解 由对称性知,只要先考虑 x 轴上方的情况,设 $y=k(k=1, 2, \cdots, 99)$ 与双曲线右半支于 A_k,交直线 $x=100$ 于 B_k,则线段 A_kB_k 内部的整点的个数为 $99-k$, 从而在 x 轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{99}(99-k)=99\times 49=4851.$$

又 x 轴上有 98 个整点,所以所求整点的个数为 $2\times 4851+98=9800$.

4 已知$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,其中$a_1=3$, $b_1=1$, $a_2=b_2$, $3a_5=b_3$,且存在常数 α、β使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$,则 $\alpha+\beta=$ ________.

解 设$\{a_n\}$的公差为 d,$\{b_n\}$的公比为 q,则

$$3+d=q, \quad ①$$

$$3(3+4d)=q^2. \quad ②$$

①式代入②式得 $9+12d=d^2+6d+9$,求得 $d=6$, $q=9$.

从而有 $3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$对一切正整数$n$ 都成立,即 $6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数 n 都成立.

从而 $\log_\alpha 9=6$, $-3=-\log_\alpha 9+\beta$, 求得 $\alpha=\sqrt[3]{3}$, $\beta=3$, $\alpha+$

$\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^{x}-2\ (a>0,\ a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 ________.

解 令 $a^x=y$，则原函数化为 $g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$ 在 $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$上是递增的.

当 $0<a<1$ 时，$y\in[a,\ a^{-1}]$，

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以

$$g(y)_{\min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4};$$

当 $a>1$ 时，$y\in[a^{-1},\ a]$，

$$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2,$$

所以

$$g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\frac{1}{4}.$$

综上 $f(x)$在 $x\in[-1,\ 1]$上的最小值为$-\frac{1}{4}$.

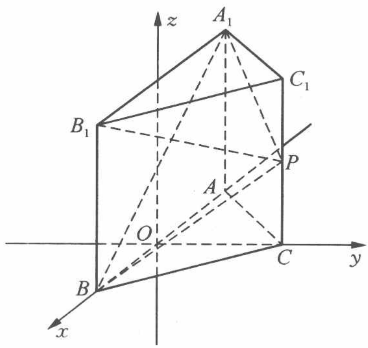
6 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 ________.

解 同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

$$\frac{7}{12}+\left(\frac{5}{12}\right)^2\times\frac{7}{12}+\left(\frac{5}{12}\right)^4\times\frac{7}{12}+\cdots=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{12}{17}.$$

7 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=$ ________.

解法一 如图①，以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0)$，$B_1(1,0,2)$，$A_1(-1,0,2)$，$P(0,\sqrt{3},1)$，从而，$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1)$.



（第 7 题图①）

设分别与平面 BA_1P、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0.\end{cases}$$

由此可设 $\vec{m}=(1, 0, 1)$，$\vec{n}=(0, 1, \sqrt{3})$，所以

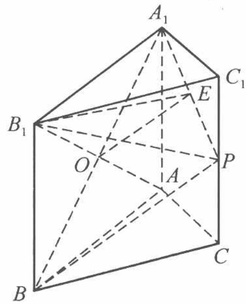
$$|\vec{m}\cdot\vec{n}|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot|\cos\alpha|,$$

即

$$\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2|\cos\alpha| \Rightarrow |\cos\alpha|=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

解法二 如图②，$PC=PC_1$，$PA_1=PB$.



(第 7 题图②)

设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，则 $OA_1=OB$，$OA=OB_1$，$A_1B\perp AB_1$.

因为 $PA=PB_1$，所以 $PO\perp AB_1$，从而 $AB_1\perp$ 平面 PA_1B.

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE\perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B-A_1P-B_1$ 的平面角. 设 $AA_1=2$，则易求得 $PB=PA_1=\sqrt{5}$，$A_1O=B_1O=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{3}$.

在直角 $\triangle PA_1O$ 中，$A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE$，所以 $OE=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}$，所以

$$B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\frac{6}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\frac{B_1O}{B_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

8 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解(x, y, z)的个数是________.

解 首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $\mathrm{C}_{2009}^{2}=2009\times1004$.

把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解分为三类:

(1) x、y、z 均相等的正整数解的个数显然为 1;

(2) x、y、z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数,易知为 1003;

(3) 设 x、y、z 两两均不相等的正整数解为 k. 易知

$$1+3\times1003+6k=2009\times1004,$$

所以

$$\begin{aligned}6k&=2009\times1004-3\times1003-1\\&=2006\times1005-2009+3\times2-1\\&=2006\times1005-2004,\end{aligned}$$

即

$$k=1003\times335-334=335\,671.$$

从而满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解的个数为

$$1+1003+335\,671=336\,675.$$

二、解答题(本题满分 56 分)

9 (16 分) 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f'(x)|\leqslant 1$，试求 a 的最大值.

解法一 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，由

$$\begin{cases} f'(0)=c, \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a+b+c, \\ f'(1)=3a+2b+c \end{cases}$$

得

$$3a=2f'(0)+2f'(1)-4f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

所以

$$\begin{aligned} 3|a| &= \left|2f'(0)+2f'(1)-4f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 2|f'(0)|+2|f'(1)|+4\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 8, \end{aligned}$$

所以 $a\leqslant\frac{8}{3}$. 又易知当 $f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$($m$ 为常数) 满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.

解法二 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. 设 $g(x)=f'(x)+1$，则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant g(x)\leqslant 2$.

设 $z=2x-1$，则 $x=\frac{z+1}{2}$，$-1\leqslant z\leqslant 1$.

$$h(z)=g\left(\frac{z+1}{2}\right)=\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a+2b}{2}z+\frac{3a}{4}+b+c+1.$$

容易知道当$-1\leqslant z\leqslant 1$时,$0\leqslant h(z)\leqslant 2$, $0\leqslant h(-z)\leqslant 2$. 从而当$-1\leqslant z\leqslant 1$时,$0\leqslant \frac{h(z)+h(-z)}{2}\leqslant 2$,即

$$0\leqslant \frac{3a}{4}z^2+\frac{3a}{4}+b+c+1\leqslant 2,$$

从而$\frac{3a}{4}+b+c+1\geqslant 0$, $\frac{3a}{4}z^2\leqslant 2$,由$0\leqslant z^2\leqslant 1$知$a\leqslant \frac{8}{3}$.

又易知当$f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$($m$为常数)满足题设条件,所以$a$最大值为$\frac{8}{3}$.

10 (20分)已知抛物线$y^2=6x$上的两个动点$A(x_1, y_1)$和$B(x_2, y_2)$,其中$x_1\neq x_2$且$x_1+x_2=4$.线段AB的垂直平分线与x轴交于点C,求$\triangle ABC$面积的最大值.

解法一 设线段AB的中点为$M(x_0, y_0)$,则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2$, $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$,

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}.$$

线段AB的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2). \qquad ①$$

易知$x=5$，$y=0$是①的一个解，所以线段AB的垂直平分线与x轴的交点C为定点，且点C坐标为$(5,0)$.

由①知直线AB的方程为$y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)$，即

$$x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2. \qquad ②$$

②代入$y^2=6x$得$y^2=2y_0(y-y_0)+12$，即

$$y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0. \qquad ③$$

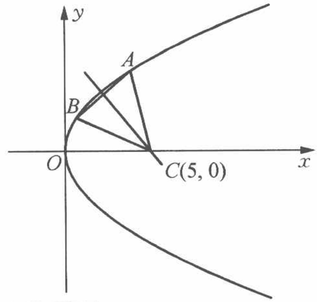
依题意，y_1、y_2是方程③的两个实根，且$y_1\neq y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

所以$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{\left[1+\left(\frac{y_0}{3}\right)^2\right](y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)[4y_0^2-4(2y_0^2-12)]}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}.\end{aligned}$$

定点 $C(5, 0)$ 到线段 AB 的距离



$$h=|CM|$$
$$=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}$$
$$=\sqrt{9+y_0^2}.$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3}\right)^3}$$
$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}.$$

当且仅当 $9+y_0^2=24-2y_0^2$，即 $y_0=\pm\sqrt{5}$，$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3}, \sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$，$B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3}, \sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$ 或 $A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3}, -(\sqrt{5}+\sqrt{7})\right)$，$B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3}, -\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$ 时等号成立.

所以，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.

解法二 同解法一，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5, 0)$.

设 $x_1=t_1^2$，$x_2=t_2^2$，$t_1>t_2$，$t_1^2+t_2^2=4$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$ 的绝对值，