水波动力学基础

SHUIBO DONGLIXUE JICHU

吴云岗　陶明德　编著

復旦大學出版社

水波动力学基础

SHUIBO DONGLIXUE JICHU

吴云岗　陶明德　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

水波动力学基础/吴云岗,陶明德编著.—上海:复旦大学出版社,2011.11
ISBN 978-7-309-08552-5

Ⅰ.水…　Ⅱ.①吴…②陶…　Ⅲ.水波-波动力学　Ⅳ.0353.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 220793 号

水波动力学基础
吴云岗　陶明德　编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海申松立信印刷有限责任公司

开本 787×960　1/16　印张 19　字数 344 千
2011 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-08552-5/O·481
定价:35.00 元

前 言

波动现象是自然界最普遍的现象之一，水波的研究一直是科学和工程研究领域中的重要课题。尽管波动问题所涉及的领域不同，但是描述波动现象的方法却是相同的。

由于水波千姿百态，用肉眼就能观察到，因此很早就引起了人们的注意，可以说是人们最为熟悉的一种波。具有敏锐观察力的 da Vinci 就观察过由物体撞击水面而造成的水波，虽然他并未理解其机理，但他认为波动是可以叠加的。Newton 等科学家也都曾注意过水波。现在认为开始真正研究水波的应该是 Lagrange，也许是他独立地推导出了小振幅波理论的线性控制方程(1786)。实际上，Laplace 在早些时候就研究过一个初值问题(1776)：在液体表面上给定一个初值扰动，液体随后将如何运动？他从流体力学中的 Lagrange 方式而不是现在常用的 Euler 描述得到了流体质点的速度。随后，Cauchy 和 Poisson 详细讨论了一般的线性水波方程的初值问题。到后来，研究的科学家越来越多，有 Airy，Stokes，Kelvin，Rayleigh，Lamb，Boussinesq，Poincaré 等学者，水波的研究也越来越兴盛，它已经形成了一门相对比较成熟的理论学科体系。

在复旦大学出版社范仁梅同志的建议和支持下，我们决定在作者原有教材《水波引论》的基础上重新改编出版，希望本书既能作为本科或研究生在水波领域教学方面的教学参考书，又能作为从事波动研究有关科技工作者的入门教材。经同行建议，改名称为《水波动力学基础》。水波的研究已经经历了几个世纪，内容非常丰富，本书仅涉及水波动力学的初步知识，没有涉及海洋工程或随机波浪等理论，目的主要是为了使读者了解产生水波的机理和能够解释一些有关的波动现象，其次是使读者初步掌握水波的数学处理方法，希望本书能对读者有所裨益。

感谢复旦大学对于本书给予的出版基金资助！

作 者

2011 年 4 月

目　　录

·水·波·动·力·学·基·础·

第一章　绪论 ………… 1

§1-1　概述 ………… 1

§1-2　水波的物理要素 ………… 1

§1-3　水波的基本方程 ………… 3

第二章　小振幅波理论 ………… 7

§2-1　水波问题的摄动展开 ………… 7

§2-2　行波和驻波 ………… 9

§2-3　容器中的驻波 ………… 15

§2-4　能量通量和群速度 ………… 19

§2-5　毛细波 ………… 21

§2-6　不定常运动 ………… 25

2-6-1　问题的一般公式 ………… 25

2-6-2　解的积分表达式 ………… 26

2-6-3　Kelvin 驻相法 ………… 29

2-6-4　关于结果的讨论 ………… 32

§2-7　群速度的物理意义 ………… 34

§2-8　水波的缓慢调制 ………… 38

§2-9　水波的绕射 ………… 42

§2-10　水波的折射 ………… 48

§2-11　毛细射流的稳定性 ………… 55

第三章　浅水中的长波 ………… 58

§3-1　基本方程 ………… 58

§3-2　Boussinesq 方程 ………… 61

§3-3 特征线法 …… 63
§3-4 孤立波 …… 68
§3-5 滚浪的形成 …… 71
§3-6 单斜波 …… 73
§3-7 变截面水道中的长波 …… 76
§3-8 静振 …… 80
§3-9 潮汐 …… 83
3-9-1 引潮力 …… 84
3-9-2 平衡理论 …… 87
3-9-3 动力理论 …… 88

第四章 非线性水波 …… 91
§4-1 深水中的 Gerstner 波 …… 91
§4-2 深水中的 Stokes 波 …… 96
§4-3 漂移速度 …… 100
§4-4 幂级数求解 …… 107
§4-5 Boussinesq 方程和 KdV 方程 …… 110
§4-6 Stokes 展开 …… 113
§4-7 椭圆余弦波 …… 117
§4-8 破坝问题 …… 120
§4-9 加速平板问题 …… 126
§4-10 变分方法 …… 131
附录 (4.4.6)式的证明 …… 136

第五章 流动中的波 …… 138
§5-1 一个简单的模型 …… 138
§5-2 波动的守恒量 …… 140
5-2-1 质量守恒 …… 142
5-2-2 动量守恒 …… 144
5-2-3 能量守恒 …… 146
5-2-4 一个例子 …… 147
§5-3 在非均匀流动中的波动解 …… 149
5-3-1 幂级数求解法 …… 149
5-3-2 渐近级数求解法 …… 153

5－3－3 两个精确解 …… 160
§5－4 流动对激浪破碎的影响 …… 164
§5－5 在非均匀流动中水波的缓慢调制 …… 168
§5－6 在非均匀流动中的弱非线性波 …… 173
附录 (5.3.49)式的证明 …… 179

第六章 **内波** …… 182
§6－1 界面的稳定性 …… 182
§6－2 管中两层叠加流体的不稳定性 …… 186
§6－3 界面上的波 …… 189
§6－4 圆截面水槽中的内波 …… 193
§6－5 波运动的微分方程式 …… 196
§6－6 波运动的特征值问题 …… 199
§6－7 分层流体的稳定性问题 …… 201
§6－8 一些定性结果 …… 204
§6－9 分层流体对坝上动压力的影响 …… 209

第七章 **旋转流体中的波** …… 215
§7－1 Coriolis 力和地转流动 …… 215
§7－2 惯性波 …… 218
§7－3 Rossby 波 …… 220
§7－4 定常螺旋运动中的惯性波 …… 223
§7－5 旋转流动中的水跃 …… 227
§7－6 旋转流体中的长波方程 …… 230
§7－7 小振幅波运动 …… 234
§7－8 Poincaré 波和 Kelvin 波 …… 238
§7－9 河道和海洋中的 Rossby 波 …… 242
§7－10 大洋中的波动 …… 246
§7－11 问题 V 的特征值曲线 …… 249
§7－12 问题 H 的特征值曲线 …… 252
§7－13 地转效应对河口潮汐的影响 …… 255

第八章 **近岸带的波浪** …… 259
§8－1 浅化作用 …… 259

§8－2　波在斜坡上的爬高 …………………………………………………… 263
§8－3　边缘波 ………………………………………………………………… 267
§8－4　破波和辐射应力 ……………………………………………………… 270
§8－5　增水和减水 …………………………………………………………… 277
§8－6　沿岸流 ………………………………………………………………… 282
§8－7　离岸流 ………………………………………………………………… 289

参考文献 ………………………………………………………………………… 295

第一章 绪　论

·水·波·动·力·学·基·础·

§1-1 概　述

波动是物质运动的重要形式，广泛存在于自然界。波动中被传递的物理量的扰动或振动有多种形式，例如，弦线中的波、空气或固体中的声波、水波、电磁波，等等。

我们知道，物体产生振动需要恢复力，要产生水波也必须有使水质点因受扰动而离开平衡位置后再回到原位置的力。在水波理论中，由于扰动导致流体惯性和恢复力之间的相互平衡引起了自由表面波。当这个恢复力主要是重力时，它所造成的波称为**重力波**；当这个力主要是表面张力时，它所造成的波就称为涟漪，或者称为**毛细波**；在某些场合，必须同时考虑重力和表面张力。另外，这种恢复力也可以是旋转系统中的 Coriolis 力，相应的波称为**惯性波**，也可以是宇宙中太阳和月亮的引力，等等。外力可以改变波动参数的值，但是各种波动现象还是有许多相同之处的。

§1-2 水波的物理要素

在进入水波的数学描述之前，我们先来回顾一下波动的基本的物理概念，水波的详细描述将见于后面各章。

直观上讲，波是以可识别的传播速度从介质的一部分传到另一部分的某种可识别的信号，这种信号可以是扰动的任何特征。受扰动物理量变化时具有时间周期性，在空间传递时又具有空间周期性，因此，受扰动物理量既是时间 t，又是空间位置 x 的周期函数。

假设某个向右传播的波可表示为 $\varphi = a\cos(kx-\omega t)$。在这个表达式中 a 是振

幅，$\theta=kx-\omega t$ 代表波的**相位**，k 代表**波数**，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$（λ 即**波长**），其含义为单位距离通过的波的数量，方向沿着波的传播方向，ω 代表**圆频率**，$\omega=2\pi f$（f 为**频率**），函数 $\omega=\omega(k)$ 由不同的具体的物理问题来确定。

对于单色波（单一频率波），假设某参考点在波的某个位置跟随波以同样的速度一起运动，这时相位等于常数（如这个位置在波峰上跟随一起运动，对于余弦波这个常数必为 2π 的某个整数倍数，即要保证参考点在波峰上，$kx-\omega t$ 必为某个 2π 的倍数）：$kx-\omega t=$ 常数，定义这个波速为 $c_0=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\omega}{k}$，称为**相速度**。

如果不是只有一个单色波，对于一列包含不同波数的波，形成波群或波包，每个 k 对应的波动模式将以不同的速度 $\dfrac{\omega(k)}{k}$ 传播，此时发生了**色散**。直观上看，一个波群的各个波的成分由于其频率不同，其传播速度也不同，而导致整个波群分解，这种现象即称为**色散现象**，具有这种现象的波称为**色散波**。当 $\omega'(k)$ 不是常数，而 $\omega''(k)\neq 0$ 时，就称波是色散的。对于各种色散波动理论，ω 和 k 存在函数关系 $\omega=\omega(k)$，称为**色散关系**。例如，在深水波和浅水波中的色散关系分别为 $\omega^2=gk$ 和 $\omega^2=ghk^2$（h 为水深）。水波是一种色散波，波速依赖于 k 也意味着波速随波长的不同而变化。在非均匀介质中，波速还与波的传播方向有关。

把两个波幅相同、但波数和频率稍有不同的行波叠加在一起，组成了一列波包：

$$\eta=a\sin(kx-\omega t)+a\sin[(k+\delta k)x-(\omega+\delta\omega)t], \tag{1.2.1}$$

其中 $\dfrac{\delta k}{k}\ll 1$，$\dfrac{\delta\omega}{\omega}\ll 1$。(1.2.1)式可化为

$$\eta\approx 2a\cos\frac{1}{2}(x\delta k-t\delta\omega)\sin(kx-\omega t), \tag{1.2.2}$$

其中，$A_g=2a\cos\dfrac{1}{2}(x\delta k-t\delta\omega)$ 可看做波包振幅，这是一个调幅波。从(1.2.2)式可以看出，行波 $a\sin(kx-\omega t)$ 的幅值由于因子 A_g 而缓慢变化，这种情况称为原行波（基波）$a\sin(kx-\omega t)$ 被调制了（见图 1-1），称 A_g 为调制波（携带和传递信息的是波包的振幅），并以速度

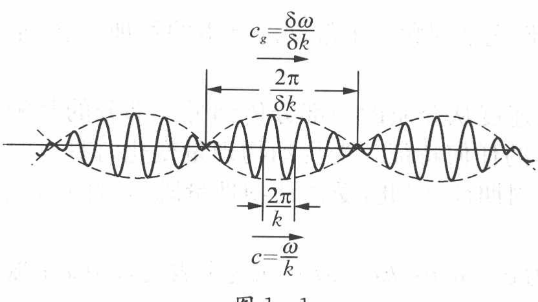

图 1-1

$$c_g=\frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{1.2.3}$$

向前移动，其中 c_g 就称为**群速度**。群速度在水波（线性色散波）中是一个非常重要的概念。如果把 $\delta\omega$ 和 δk 看成为 $\mathrm{d}\omega$ 和 $\mathrm{d}k$，则

$$c_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}。\tag{1.2.4}$$

因为 $c=\dfrac{\omega}{k}$，故 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(kc)=k\mathrm{d}c+c\mathrm{d}k$。又因为 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，故 $\mathrm{d}k=-2\pi\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$。因此(1.2.4)式也可以写为

$$c_g=c-\lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda}。\tag{1.2.5}$$

水的可压缩性很小，出现于波峰中的水必须由邻近波谷中的水来补充。也就是说，水波中的每个质点都处于纵向运动和横向运动的某种合成运动之中，在小振幅波理论中将清楚地表明这一点。因此，水波将不是通常意义下的纵波或者横波。

§1-3 水波的基本方程

现在我们来建立水波的数学控制方程。如图 1-2 所示，假定在初始时流体处于静止状态，并充满了空间 R_0：$-h(x,z)\leqslant y\leqslant 0$，$-\infty<x,z<\infty$。当 $t=0$ 时，在自由面上的某一区域 D 中产生了一个扰动，要求确定 $t>0$ 以后流体的运动，同时还要确定静止水面产生了波动以后自由面的形状 $y=\eta(x,z,t)$，这样最后的求解区域实际上变成了

$$R:-h(x,z)\leqslant y\leqslant\eta(x,z,t),$$
$$-\infty<x,z<\infty。$$

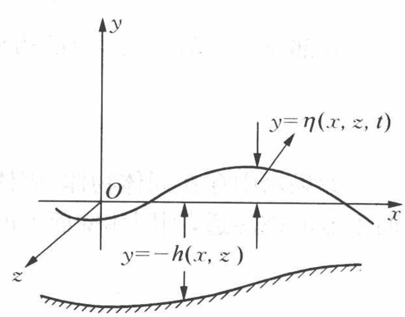

图 1-2

这里暂且假定水体为不可压缩的无黏流体，设流体的速度矢量为 $\mathbf{V}$（大小为 V），其分量为 u，v，w，可得 Euler 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-g, \tag{1.3.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

或者简记为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0, \tag{1.3.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g}, \tag{1.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{g}=\nabla(-gy)$。再假定流体正压，作用在流体上的体力是有势的，而且流体从静止开始运动，那么根据 Helmholtz 定理可知流体的运动是无旋的。由于无旋，则有 $\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$，因此，无旋运动存在着速度势 φ，使得 $\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}\,\varphi$。由流体不可压缩知 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}=0$。所以，最后有 $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi=0$，亦即

$$\nabla^2\varphi=0 \quad (\text{在 } R \text{ 中})。 \tag{1.3.5}$$

这是一个 Laplace 方程，在直角坐标系中为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0。 \tag{1.3.6}$$

底部 $y=-h(x, z)$ 上的边界条件是：速度的法向分量为零，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}=0。 \tag{1.3.7}$$

如果水中存在固体物体，固体壁面 S 也将成为流体的一个边界，假设固体壁面不能够被渗透，则固体壁面上的运动学边界条件为

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S=v_n。 \tag{1.3.8}$$

也就是说，紧贴在固体表面上任意一点的流体质点在该点上的法向速度等于物体表面上任意一点的法向速度，在这种情形下流体既没有流入物体的内部，也没有脱离物体表面，保证了壁面的不可渗透性质。

自由面上的表面条件则包括运动学条件和动力学条件。

自由面上的运动学条件是：**自由面上的流体质点永远在自由面上**。下面我们用 Lagrange 方法来推导这个条件。设 $F(x, y, z, t)=0$ 为自由面方程，自由面上某质点 P 的坐标为

$$x=f(a, b, c, t),$$
$$y=g(a, b, c, t),$$

$$z = h(a,\ b,\ c,\ t),$$

其中 $a,\ b,\ c$ 为 $t=0$ 时该质点的直角坐标，我们来考察质点 P 的运动。根据运动学条件可知点 P 的坐标恒满足自由面方程，即

$$F(f(a,\ b,\ c,\ t)),(g(a,\ b,\ c,\ t),\ h(a,\ b,\ c,\ t),\ t)\equiv 0,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0,$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial t}=0。\tag{1.3.9}$$

(1.3.9)式就是自由面上的运动学条件。为进一步来了解(1.3.9)式的含义，我们来考察二维的情况。在二维情况中，因为 $y=\eta(x,\ t)$，所以 $F=\eta(x,\ t)-y$，上式简化为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}。\tag{1.3.10}$$

如图 1－3 所示，质点 P 在垂直方向上的速度 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ 应该包括两个部分：一部分是因为点 P 在自由面上，故随着自由面的升降而获得速度 $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}$；另一部分是因为点 P 只能沿着自由面运动，故水平方向的速度 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ 必须使点 P 获得一个垂直方向的速度 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$。这两个部分分别为(1.3.10)式右边的前后两项。

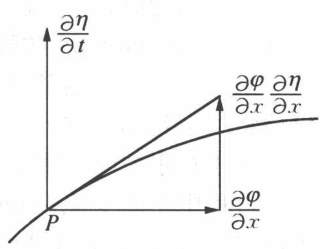

图 1－3

自由面上的动力学条件是：**自由面上的压力为常数(大气压)**。由

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\right)=\nabla\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}\right)=(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}),$$

Euler 方程可化为 Lamb 方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g}。\tag{1.3.11}$$

根据无旋条件 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$ 代入 Lamb 方程，并且考虑 $\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}\,\varphi$，可化为

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+gy\right)=\boldsymbol{0}。\tag{1.3.12}$$

沿着流线积分后可得到 Lagrange 积分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+gy=c(t),\tag{1.3.13}$$

其中 $c(t)$ 为时间 t 的某个待定函数，对于不同流线，该函数是不同的。若流动是定常的，则

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{p}{\rho}+gy=c,\tag{1.3.14}$$

c 为某个常数，适用于整个流场。在波动中，在自由面上，压力为常数，则有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+g\eta=0,\tag{1.3.15}$$

其中常数 $c(t)$ 已经吸收到 φ 中去了。

在有些问题中，在无穷远处，即当 $x\to\pm\infty$，$z\to\pm\infty$ 时，还要求 φ 和 η 保持有限值，或者它们的函数值及其导数值都要趋于零，这要视问题的性质而定。由于自由表面的存在，问题的性质与无限流场的情况有很大的差别。这时流场的某处一受到扰动，在自由面上就会有波动，波动向外传播直致无限远处，所以在处理外域问题时，除上述边界条件外，还需要给出无限远处的边界条件，这就是通常说的 **Sommerfeld 散射条件**（见§2-9）。

水波问题的初始条件要求在初始时给定自由面的形状和速度场，初始条件以后将根据具体问题另行给出。

由于在水波问题中还有一个自由面（空气与水的界面）问题，而且自由面在波动过程中不断变化，因此，自由面这一边界不能预先给定，其位置是一个未知函数，只有在问题解决以后才能给定，这就是所谓的不定边界问题。除此之外，在自由面边界上通常还带有非线性边界条件，这些正是处理水波问题的困难所在。因此，我们在归结水波问题时就要做些假定和简化，在求解问题时还需要做进一步的假定和简化。从数学上讲，由于处理一般非线性问题是很困难的，因此，在使用水波问题的精确关系式来求解具体波动方面，以前在很长一段时间内几乎没有取得什么进展。但近年来，在浅水中有限振幅波的研究方面却取得了一系列成果。在解的存在性方面，虽然人们仅证明了在均匀水深时二维有限振幅周期行波的存在性以及在均匀水深条件下二维孤立波的存在性，但这并不妨碍我们去求解各种各样的水波问题。

第二章　小振幅波理论

前面说过，水波问题通常是带有非线性边界条件的不定边界问题，在解具体的某个问题时要根据特定条件需要加以简化。在水波问题中，一般采取数学物理方程中的摄动方法，把水波问题的解按照某个小参数用渐近级数展开，一阶近似的解即为**小振幅波（Airy 波）**。比如，这个小参数可设为波高与波长之比，小振幅波的振幅和速度都是小量，其压力由静水压力和动压力组成。本章除了讨论简谐变化的周期解外，还考察了自由面受到初始扰动后而产生的不定常运动；最后，我们还讨论了水波绕射和折射等现象，实际上，在任何波动中都会产生这些现象。

§2－1　水波问题的摄动展开

由第一章可知水波的控制方程为

$$\nabla^2\varphi = 0;\tag{2.1.1}$$

自由面运动学和动力学边界条件为

$$\eta = u\frac{\partial\eta}{\partial x} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\quad (y = \eta(x,\ z,\ t)),\tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\eta = 0\quad (y = \eta(x,\ z,\ t));\tag{2.1.3}$$

底部边界条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\quad (y = -h(x,\ z))。\tag{2.1.4}$$

(2.1.2)式、(2.1.3)式关于未知函数都是非线性的，而且都在不定边界 $y = \eta(x,\ z,\ t)$ 上成立，这就使求解十分困难。为此，我们采用一种近似处理的方法——小振幅波理论来讨论水波问题。在用这种方法处理问题时，要把 φ 和 η 分别展开成某一小参数 ε 的渐近级数

$$\varphi = \varepsilon\varphi^{(1)}(x, y, z, t) + \varepsilon^2\varphi^{(2)}(x, y, z, t) + \cdots, \tag{2.1.5}$$

和

$$\eta = \varepsilon\varphi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2\varphi^{(2)}(x, z, t) + \cdots。 \tag{2.1.6}$$

将(2.1.5)式代入(2.1.1)式和(2.1.4)式后，比较等式两边 ε^k 的系数，得

$$\nabla^2\varphi^{(k)} = 0, \tag{2.1.7}$$

和

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n} = 0。 \tag{2.1.8}$$

再将(2.1.5)式和(2.1.6)式代入(2.1.3)式，并把 $\varphi^{(k)}(x, y, z, t)$ 及其偏导数都在 $y = 0$ 处展开，则有

$$\begin{aligned}&\varphi^{(k)}(x, y, z, t)\big|_{y=\eta(x, z, t)}\\ &= \varphi^{(k)}(x, 0, z, t) + \frac{\partial\varphi^{(k)}(x, 0, z, t)}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{(k)}(x, 0, z, t)}{\partial y^2}\eta^2 + \cdots,\end{aligned}$$

相应地，偏导数也有类似的展开式。然后，再比较等式两边 ε^k 的系数，得

$$\varepsilon^1: g\eta^{(1)} + \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t} = 0, \tag{2.1.9a}$$

$$\varepsilon^2: g\eta^{(2)} + \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\right)\right] - \eta^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial t\partial y}, \tag{2.1.9b}$$

……

$$\varepsilon^n: g\eta^{(n)} + \frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial t} = F^{(n-1)}。 \tag{2.1.9c}$$

注意在 $y = 0$ 上已成立(2.1.9)式了，其中记号 $F^{(n-1)}$ 表示 $\eta^{(n)}$ 和 $\varphi^{(k)}(k \leqslant n-1)$ 的某一函数组合。最后，将(2.1.5)式和(2.1.6)式代入(2.1.2)式，按照推导(2.1.9)式的方法，可得

$$\varepsilon^1: \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}, \tag{2.1.10a}$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial z} + \eta^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial y^2}, \tag{2.1.10b}$$

……

$$\varepsilon^n: \frac{\partial\eta^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial y} + G^{(n-1)}。 \tag{2.1.10c}$$

注意在 $y = 0$ 上已成立(2.1.10)式，其中记号 $G^{(n-1)}$ 也表示 $\eta^{(n)}$ 和 $\varphi^{(k)}(k \leqslant n-1)$ 的某一函数组合。由此可见，上述处理方法是将速度势在水平的静止位置附近

展开的方法，利用得到的这些式子，原则上可逐次计算级数(2.1.5)和(2.1.6)中的各项。当然，我们要假定这些级数是收敛的。

下面我们来考察一种近似方法，即**小振幅波理论**。如果级数(2.1.5)和(2.1.6)只取一阶项，就是说 $\varphi=\varepsilon\varphi^{(1)}$ 和 $\eta=\varepsilon\eta^{(1)}$。这时，方程(2.1.7)和底部条件(2.1.8)化为

$$\nabla^2\varphi=0\quad(-h(x,z)<y<0),\tag{2.1.11}$$

和

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\quad(y=-h(x,z));\tag{2.1.12}$$

自由面上的边界条件(2.1.9a)和(2.1.10a)就分别化为

$$g\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\quad(y=0),\tag{2.1.13}$$

和

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\quad(y=0)。\tag{2.1.14}$$

把上述两个条件在消去 η 后组合起来就可以得到 Cauchy - Poisson 条件

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0。\tag{2.1.15}$$

用上面的几个式子确定了速度势 φ 后，就可以求得一阶近似下的压力 p。假定自由面处的压力为零，根据 Bernoulli 方程可知水中某点的压力为

$$\frac{p}{\rho}=-gy-\frac{\partial\varphi}{\partial t}。\tag{2.1.16}$$

由此可见，(2.1.16)式右边的第一项表示流体的静压力，而第二项则表示由波动引起的动压力。

由于将自由面上的边界条件取为一阶近似，因此问题得到了很大的简化。这样做不仅使问题变为线性问题，同时也使不定边界问题转化为固定边界问题。因此，从数学观点来看，小振幅波理论只是位势理论中典型的边值问题，处理起来当然就非常简单了。

§2－2　行波和驻波

为简单起见，这里我们只考虑二维的情形。假定各物理量沿 z 轴是不变的，而且底部是水平直线(见图 2－1)。那么，速度势 φ 满足