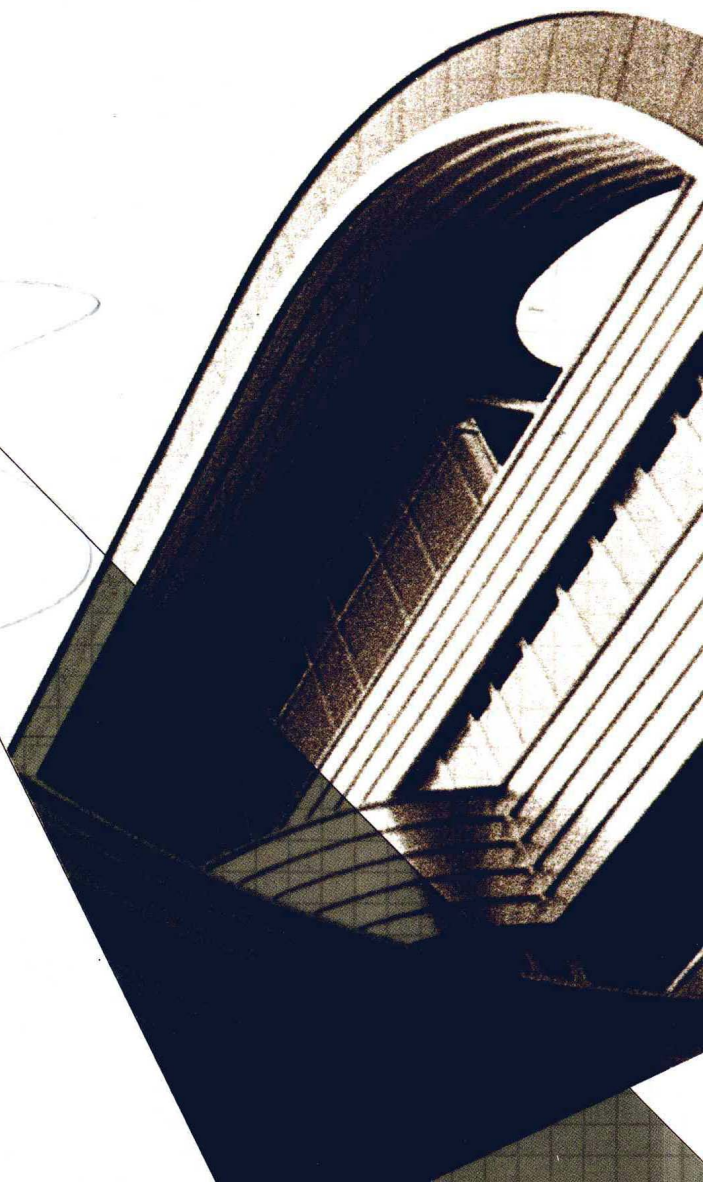
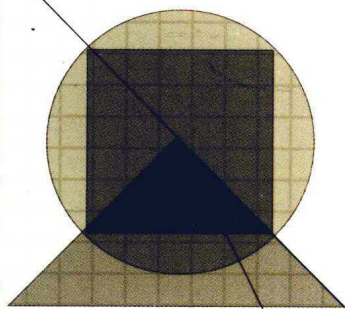


高等学校教材

微积分

主编 郭运瑞

Calculus



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

微 积 分

Weijifen

主编 郭运瑞
副主编 刘娟 白春阳 刘利敏



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是编者根据多年的教学实践经验,参照高等学校数学与统计学教学指导委员会发布的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写而成的。

全书内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,多元函数微分法及其应用,重积分,微分方程,无穷级数等。全书借鉴国内外同类优秀教材,取长补短;加强数学概念的直观理解,内容简明扼要;贯彻培养能力、启迪思维、挖掘潜能的原则,鼓励学生自己动手解决问题;应用计算机技术,引入 Mathematica 内容,加强数学实验教学。

本书可作为高等本科院校经管类、农学类、文科类专业的微积分教材,也可作为学生自学和考研的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/郭运瑞主编. —北京:高等教育出版社,2011.7

ISBN 978-7-04-032282-8

I. ①微… II. ①郭… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 083685 号

策划编辑 李晓鹏

责任编辑 李 茜

封面设计 赵 阳

版式设计 马敬茹

插图绘制 黄建英

责任校对 金 辉

责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 中国农业出版社印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 31
字 数 580 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011 年 7 月第 1 版
印 次 2011 年 7 月第 1 次印刷
定 价 44.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32282-00

前 言

本书是根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要,参照高等学校数学与统计学教学指导委员会发布的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》,参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写而成的,是编者多年教学实践经验的总结,是河南省教育科学规划重点项目“高等教育的基础课教材与教学研究”、省级教学改革项目“大学数学分层次教学的研究与改革实践”、省级精品课程的系列研究成果之一。

随着我国高等教育“大众化”阶段的到来,尤其是2004年高中施行新课改以来,高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况。现阶段大学数学教育正面临着生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列的问题。针对这些问题,编者对大学数学分层次教学进行了多年的研究与改革实践,并取得了丰硕的成果,主编出版过多部不同层次的高等数学教材。结合当前的高等数学教学实际,根据多年的教学经验,依据21世纪科技人才对数学素质的要求,在对当前的教学对象和以往教材内容深入细致地探讨之后,力求使本书突出以下主要特点:

1. 在教学的层次安排上采取夹叙夹议的方式,将初等数学的内容融会在微积分课程的教学之中,以便更好地与中学数学相衔接,更有利于教师针对教学对象,结合本课程教学大纲和教学基本要求,因材施教,因人施教。

2. 充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力,将数学建模的思想和方法渗透到教学内容中,并结合具体问题进行数学建模训练,使学生的数学素质得以充分的发展和提高。特别是将 Mathematica 数学实验融于各章中讲授,不但极大地提高了学生利用计算机求解数学模型的能力,而且提高了学生学数学、用数学的积极性。

3. 突出强调数学概念与实际问题的联系,对每一重要概念都介绍其应用背景,每一重要结果都举出应用实例,应用的范围也不仅仅局限在几何、经济方面,还扩大到了生物、信息科学、生命科学与化学等学科领域,拓宽了教学内容的适应面。

4. 精选内容、科学编排,使教材内容深入浅出,难易适度,通俗易懂,并适当反映近年来“微积分”在教学和科研实践中的最新成果。在每章后面还增加了数学文化方面的内容,增强了教材的可读性。

全书内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应

用,不定积分,定积分,定积分的应用,多元函数微分法及其应用,重积分,微分方程,无穷级数等内容。每章后都有 Mathematica 数学实验、数学文化阅读材料,书末附有初等数学常用公式,几种常用曲线及其方程,积分表、Mathematica 软件包的常用系统函数。全书每节后都配有精选的习题,既有基本题又有应用广泛的综合应用题,书后附习题参考答案。教师在教学中可对学生进行分层次练习和测试,以利于加强学生的课后学习和对优秀学生的提高训练与考研训练,从而对全方位提升学生的综合素质和创新能力等起到积极的作用。本书可作为高等学校经管类、农学类、文科类专业的教材使用,也可作为学生自学和考研的参考书。

本书由郭运瑞主编,刘娟、白春阳、刘利敏副主编。陆博、李巧萍、杨小飞、宋林森、原冠秀、赵营峰、焦红伟参加了编写工作。

由于编者学识水平所限,书中难免有错误和不妥之处,敬请同行专家和读者不吝指教。

编 者
2011 年 2 月

目 录

绪论	1
§ 0.1 微积分概论	1
一、微积分的发展过程	1
二、微积分研究的两个基本问题及方法	2
三、微积分与初等数学的比较	6
四、学习微积分的方法	7
* § 0.2 初识符号计算系统 Mathematica	8
一、Mathematica 的启动和运行	9
二、Mathematica 的输入及运算	11
三、Mathematica 的联机帮助系统	14
习题 0.2	16
阅读材料 微积分成果优先权的争论	16
第一章 函数 极限与连续	18
§ 1.1 函数的概念	18
一、集合、区间与邻域	18
二、函数的概念	19
三、函数的几种特性	21
习题 1.1	22
§ 1.2 初等函数	23
一、反函数	23
二、复合函数	25
三、初等函数	25
* 四、双曲函数与反双曲函数	26
习题 1.2	28
§ 1.3 数列的极限	29
一、数列极限的概念	29
二、收敛数列的性质	33
三、数列极限的四则运算法则	35
四、数列极限存在准则	39

习题 1.3	41
§ 1.4 函数的极限	43
一、自变量趋于无穷大时函数的极限	43
二、自变量趋于有限值时函数的极限	45
三、函数极限的性质	48
习题 1.4	49
§ 1.5 无穷小量与无穷大量	50
一、无穷小量	50
二、无穷大量	51
三、无穷小量的运算定理	52
习题 1.5	54
§ 1.6 函数极限的运算法则	55
习题 1.6	58
§ 1.7 夹逼准则 两个重要极限	59
习题 1.7	62
§ 1.8 无穷小量的比较	63
习题 1.8	66
§ 1.9 函数的连续性	66
一、函数的连续性	66
二、连续函数的运算法则	69
三、初等函数的连续性	70
四、函数的间断点	70
习题 1.9	72
§ 1.10 闭区间上连续函数的性质	73
习题 1.10	75
* § 1.11 用 Mathematica 进行函数运算	75
一、Mathematica 中的数、运算符、变量与表达式	75
二、常用函数	78
三、自定义函数	79
四、表	80
习题 1.11	81
* § 1.12 用 Mathematica 考察函数的连续性	82
一、函数求极限	82
二、函数的间断点	83

阅读材料 消失了的量的幽灵——第二次数学危机	86
第二章 导数与微分	88
§ 2.1 导数的概念	88
一、导数概念的引入	88
二、导数的定义	89
三、求导函数举例	91
四、导数的几何意义	93
五、函数的可导性与连续性的关系	94
习题 2.1	95
§ 2.2 求导法则	96
一、函数的和、差、积、商的求导法则	96
二、复合函数的求导法则	98
三、反函数的导数	100
* 四、双曲函数与反双曲函数的导数	102
五、初等函数的求导公式小结	102
习题 2.2	103
§ 2.3 高阶导数	105
习题 2.3	108
§ 2.4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	109
一、隐函数的导数	109
二、由参数方程所确定的函数的导数	110
三、求导举例	112
习题 2.4	114
§ 2.5 微分	115
一、微分的概念	115
二、微分的几何意义	116
三、微分的运算法则	117
习题 2.5	119
§ 2.6 导数与微分的简单应用	119
一、导数的应用	120
二、微分在近似计算中的应用	122
习题 2.6	123
* § 2.7 用 Mathematica 进行求导运算	124
一、初等函数求导数	124

二、隐函数方程和参数方程确定的函数求导数	125
习题 2.7	126
阅读材料 牛顿、莱布尼茨	127
第三章 微分中值定理与导数的应用	129
§ 3.1 微分中值定理	129
一、罗尔(Rolle)中值定理	129
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理	131
三、柯西(Cauchy)中值定理	134
习题 3.1	135
§ 3.2 洛必达(L'Hospital)法则	135
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	135
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	137
三、其他类型的未定式	138
习题 3.2	140
§ 3.3 泰勒定理及其应用	141
一、泰勒定理	141
二、几个常用的麦克劳林公式	144
三、泰勒公式的应用	146
习题 3.3	148
§ 3.4 函数的单调性与极值	148
一、函数单调性的判定	148
二、函数的极值	151
三、函数的最大值和最小值	155
习题 3.4	158
§ 3.5 曲线的凹凸性与拐点	159
一、曲线的凹凸性	159
二、曲线的拐点	160
习题 3.5	162
§ 3.6 函数图形的描绘	162
一、曲线的渐近线	163
二、依据函数特性作图	164
习题 3.6	168
§ 3.7 导数在经济中的应用——边际分析与弹性分析	168

一、边际与边际分析	168
二、弹性与弹性分析	173
习题 3.7	180
* § 3.8 方程的近似解	182
一、二分法	182
二、切线法	183
习题 3.8	185
* § 3.9 用 Mathematica 做导数应用题	185
习题 3.9	187
阅读材料 法国大数学家——柯西、拉格朗日、罗尔	188
第四章 不定积分	191
§ 4.1 不定积分的概念与性质	191
一、原函数与不定积分的概念	191
二、不定积分的性质	193
三、基本积分公式	194
习题 4.1	195
§ 4.2 换元积分法	195
一、第一类换元积分法	196
二、第二类换元积分法	201
习题 4.2	204
§ 4.3 分部积分法	206
习题 4.3	209
§ 4.4 几种特殊类型函数的积分	210
一、有理函数的积分	211
二、三角函数有理式的积分	215
三、简单无理函数的积分	217
四、积分表的使用	218
习题 4.4	219
阅读材料 西方数学的传入与中西合璧	220
第五章 定积分	222
§ 5.1 定积分的概念与性质	222
一、定积分的实际背景	222
二、定积分的概念	224
三、定积分的几何意义	225

四、定积分的基本性质	226
习题 5.1	229
§ 5.2 微积分基本公式	230
一、积分上限函数及其导数	230
二、牛顿 - 莱布尼茨公式	232
习题 5.2	234
§ 5.3 定积分的换元积分法	235
习题 5.3	238
§ 5.4 定积分的分部积分法	239
习题 5.4	241
* § 5.5 定积分的近似计算	241
一、梯形法	241
二、抛物线法	242
习题 5.5	244
§ 5.6 反常积分	245
一、无穷限反常积分	245
二、无界函数的反常积分	247
* 三、伽玛(Gamma)函数	249
习题 5.6	250
* § 5.7 用 Mathematica 计算一元函数的积分	251
一、定积分的近似计算	251
二、不定积分与定积分的计算	253
习题 5.7	253
阅读材料 微积分中的哲学思想	253
第六章 定积分的应用	256
§ 6.1 定积分的微元法	256
§ 6.2 定积分的几何应用	257
一、平面图形的面积	257
二、体积	261
习题 6.2	264
§ 6.3 定积分在经济管理中的应用	265
一、已知总产量的变化率求总产量	265
二、已知边际函数求总量函数	265
习题 6.3	267

§ 6.4 用 Mathematica 做导数在几何上的应用题	268
一、求平面图形的面积	268
二、求平面曲线的弧长	268
三、求旋转体的体积	269
阅读材料 数学王子——高斯	270
第七章 多元函数的微分法及其应用	272
§ 7.1 空间直角坐标系	272
一、空间点的直角坐标	272
二、空间两点间的距离	273
习题 7.1	274
§ 7.2 曲面及其方程	275
一、曲面及其方程	275
二、柱面	276
习题 7.2	278
§ 7.3 多元函数的基本概念	279
一、多元函数及其定义域	279
二、二元函数的几何表示	282
习题 7.3	282
§ 7.4 二元函数的极限与连续	283
一、二元函数的极限	283
二、二元函数的连续性	285
习题 7.4	285
§ 7.5 二元函数的偏导数与全微分	286
一、偏导数	286
二、高阶偏导数	288
三、偏导数在经济分析中的应用	289
四、全微分及其应用	291
习题 7.5	294
§ 7.6 多元复合函数与隐函数的求导法则	295
一、多元复合函数的求导法则	295
二、一阶全微分形式不变性	297
三、隐函数的求导法则	298
习题 7.6	299
§ 7.7 多元函数的极值与最大(小)值	300

一、多元函数的极值	300
二、有界闭区域上的最大值与最小值	303
三、条件极值	306
习题 7.7	308
* § 7.8 最小二乘法	309
一、最小二乘原理	309
二、多变量的数据拟合	312
三、非线性曲线的数据拟合	313
习题 7.8	315
* § 7.9 Mathematica 在多元函数微分学中的应用	315
一、二元函数作图	315
二、二次曲面的图形	316
三、相交曲面的作图	317
四、动画制作	318
五、求多元函数的偏导数与全微分	319
六、多元函数的极值	320
习题 7.9	321
阅读材料 形与数统一——解析几何的创立	321
第八章 重积分	323
§ 8.1 二重积分的概念与性质	323
一、引例	323
二、二重积分的概念	325
三、二重积分的性质	326
习题 8.1	328
§ 8.2 利用直角坐标计算二重积分	329
一、X-型积分区域	329
二、Y-型积分区域	330
三、其他型积分区域	331
习题 8.2	334
§ 8.3 利用极坐标计算二重积分	335
习题 8.3	341
§ 8.4 二重积分的应用举例	341
一、二重积分在经济管理中的应用	342
* 二、二重积分在农业上的应用	344

习题 8.4	347
* § 8.5 用 Mathematica 计算重积分	347
习题 8.5	348
阅读材料 最多产的数学家——欧拉	349
第九章 微分方程	351
§ 9.1 微分方程的基本概念	351
习题 9.1	353
§ 9.2 可分离变量的微分方程	353
一、可分离变量的微分方程	353
二、齐次微分方程	357
习题 9.2	358
§ 9.3 一阶线性微分方程	359
一、线性方程	359
二、伯努利 (Bernoulli) 方程	363
习题 9.3	364
§ 9.4 几种特殊类型的二阶微分方程	365
一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	365
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	366
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	367
习题 9.4	370
§ 9.5 二阶常系数齐次线性微分方程	370
习题 9.5	374
§ 9.6 二阶常系数非齐次线性微分方程	374
一、 $f(x)=P_n(x)$ 型	376
二、 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 型	377
* 三、 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos \beta x+B\sin \beta x)$ 型	379
习题 9.6	383
§ 9.7 微分方程在经济和农业等方面的应用	383
习题 9.7	387
* § 9.8 用 Mathematica 解常微分方程	387
习题 9.8	388
阅读材料 星光闪耀的数学家族——伯努利家族	388
第十章 无穷级数	391
§ 10.1 常数项级数的概念和性质	391

一、常数项级数的基本概念	391
二、无穷级数的基本性质	394
习题 10.1	397
§ 10.2 常数项级数的审敛法	398
一、正项级数及其审敛法	398
二、交错级数及其审敛法	404
三、绝对收敛与条件收敛	405
习题 10.2	406
§ 10.3 幂级数	407
一、函数项级数的一般概念	407
二、幂级数及其收敛性	408
三、幂级数的运算与和函数的性质	411
习题 10.3	414
§ 10.4 函数展开成幂级数	414
一、泰勒级数	415
二、函数展开成幂级数	415
* 三、函数的幂级数展开式的应用	418
习题 10.4	422
* § 10.5 用 Mathematica 进行级数运算	422
一、数项级数	422
二、求幂级数的收敛域	423
三、函数的幂级数展开	424
习题 10.5	425
阅读材料 趣味级数——调和级数	425
附录 A 初等数学常用公式	428
附录 B 几种常用的曲线	432
附录 C 符号计算系统 Mathematica 的常用系统函数	435
附录 D 积分表	447
习题参考答案	456
参考文献	478

绪 论

为了使大家在学习微积分之前,对微积分的发展过程及思想方法有一个初步的了解,并对 Mathematica 系统有一个初步的认识,本章将对微积分的基本思想方法及 Mathematica 系统进行简单介绍.

§ 0.1 微积分概论

微积分是高等院校各专业必修的一门重要基础课,它的内容主要包括一元函数微积分学,多元函数微积分学,微分方程,无穷级数等内容,其核心内容是微积分.微积分产生的历史背景如何?微积分研究的对象与方法是什么?它同初等数学有什么联系和区别?所有这些问题无疑是大家开始学习这门课程所关心的,本节将对这些问题做下面的简单介绍.

一、微积分的发展过程

现实世界中的万事万物,无一不在一定的空间中运动变化,在运动变化过程中都存在一定的数量关系,数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学.简略地说,就是研究数和形的科学.时至今日,虽然数学的内容非常丰富,数学的表述形式非常抽象,数学的应用非常广泛,但是,关于数学的上述说法大体上还是正确的,只是随着人们对事物认识的逐渐深化,作为数学研究对象的“数”和“形”,在数学发展的不同阶段,表现形式不相同罢了!

17 世纪以前的数学,研究的数是常数或常量(即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变、可以看作一个固定数值的量),研究的形是孤立的、不变的规则几何形体.研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数和初等几何,统称为初等数学.因此,有人把这个阶段称为初等数学阶段.

1637 年,法国数学家笛卡儿(Descartes)引入了坐标,建立了解析几何.解析几何的建立,沟通了数学中两个基本研究对象“数”与“形”之间的联系,用代数运算去处理几何问题,为处理一般变量间的依赖关系提供了几何模型,使数学的发展进入一个新阶段.在这个阶段中,研究的“数”是变数或变量(即在某一运动

变化过程中不断进行变化,可以取不同数值的量),研究的“形”是不规则的几何形体,如曲线、曲面、曲边形和曲面体等,而且“数”和“形”开始紧密地联系起来.由于17世纪工业革命的直接推动,英国科学家牛顿(Newton)和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)在许多数学家工作的基础上创立了微积分,他们破天荒地为变量建立了一种新型的行之有效的运算规则,去描述因变量在一个短暂瞬间相对于自变量的变化率,以及在自变量的某个变化过程中因变量作用的整体积累,前者称为微商,后者称为积分,统称为微积分.此后,数学的发展出现了一日千里之势,形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支,在此基础上,还出现了一些其他分支.相对初等数学,它们被称为高等数学.因此,有人把这一阶段(1637年到19世纪末)称为高等数学阶段.

在20世纪40年代,计算数学的发展促进了计算机的发展;反过来,计算机及相应数学软件包的迅速发展又加快了数学的发展.计算机及相应软件包的使用,使得传统的微积分内容与计算机及数学软件包的联系日益密切,过去只能由数学专业人员才能完成的一些繁琐的数学计算与推理,现在也可以由一般工程技术人员借助计算机与数学软件包方便地完成.因此,训练学生熟练地使用数学软件包已成为微积分教学内容的一部分.

二、微积分研究的两个基本问题及方法

从研究常量到研究变量,从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体,是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点.在上述两个阶段中,不但研究的对象不同,而且研究的方法也不同,初等数学主要采用形式逻辑的方法,静止地、孤立地研究问题,而微积分则不然,它是用运动的、变化的观点去研究问题.下面,我们以“速度问题”和“面积问题”这两个经典问题为例,介绍微积分的基本思想方法.

1. 变速直线运动的瞬时速度

运动有两种:一种是匀速运动,快慢始终保持不变;一种是变速运动,时而快时而慢.客观实际中的运动常常是变速的.例如,汽车的行驶,飞机的飞行,物体的降落和抛射等,都是变速运动.

匀速运动的速度我们早已会求,有公式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} = \frac{s}{t}. \quad (1)$$

现在我们要着重研究的是如何求变速运动的速度.

例1 求自由落体的运动速度.

实践告诉我们,从空中掉下来的物体越落越快,速度是变的.假如物体在初始时刻是静止的,并且忽略空气阻力的作用,则在时间 t 内下落的路程 s 由下列