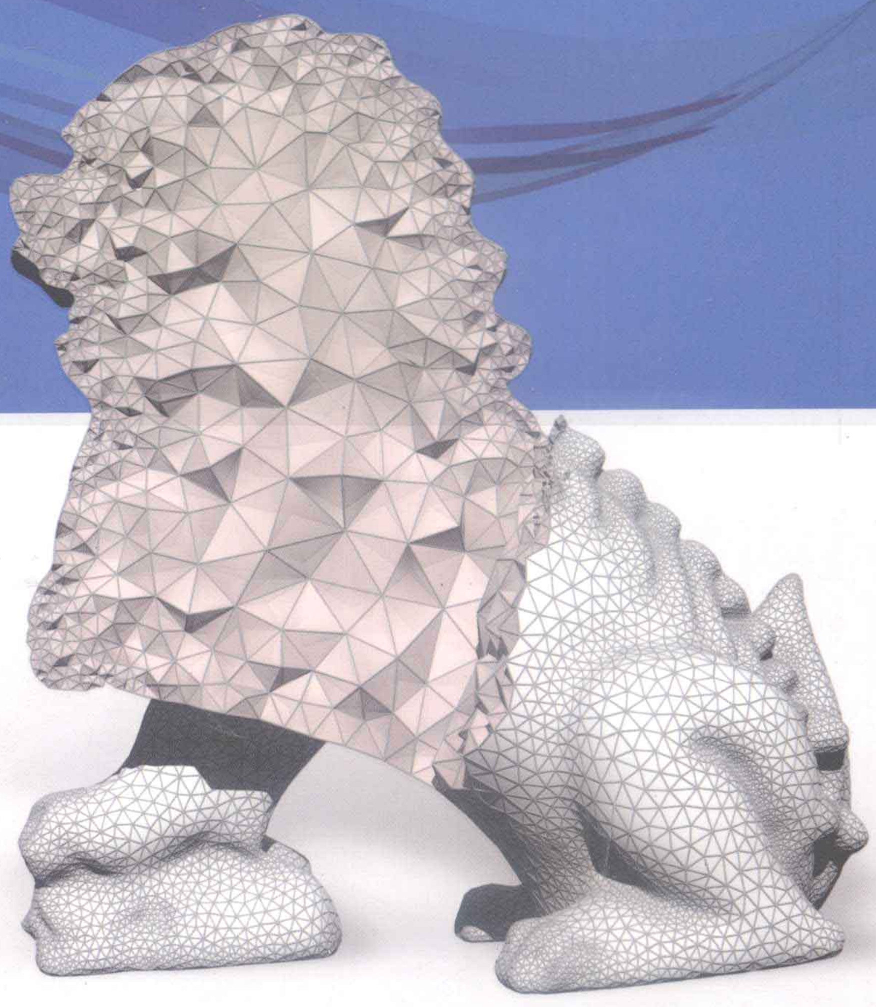
中创软件丛书

计算几何及应用

汪嘉业　王文平　屠长河　杨承磊　编著

Computational Geometry and Its Applications



科学出版社

中创软件丛书

计算几何及应用

汪嘉业　王文平　屠长河　杨承磊　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了计算几何的基本问题、基础理论和算法。本书前12章分别介绍了凸包、Voronoi图、三角剖分、多边形剖分、几何搜索、相交计算、排列、可见性计算、路径规划等基本计算几何问题和算法，第13、14章则分别探讨了若干随机和并行的计算几何算法，最后一章给出了关于计算几何的几个实际研究和应用中的例子。本书在注重介绍计算几何基础理论的同时，也注意介绍简洁、实用和易编程的算法，力求易读、易懂，并使读者能够应用这些理论和算法。为便于消化和理解书中内容，每章末附有习题，以及大量参考文献。

本书可作为高等院校计算机及应用数学等学科的本科生、研究生学习计算几何的教材，也可作为从事计算几何研究或应用的其他科技工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

计算几何及应用/汪嘉业等编著. —北京：科学出版社，2011

(中创软件丛书)

ISBN 978-7-03-032257-9

Ⅰ.①计… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①计算几何 ②计算机算法 Ⅳ.①O18 ②TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第178457号

责任编辑：鞠丽娜/责任校对：耿 耘

责任印制：吕春珉/封面设计：三函设计

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2011年9月第一次印刷 印张：19 1/2

印数：1—3 000 字数：442 000

定价：46.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换(骏杰))

销售部电话：010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8002

前　　言

在20世纪70年代，“计算几何”这个名词曾经被不同学术领域如模式识别、自由曲线曲面设计以及离散几何问题的算法设计与分析等使用过。1978年，M. I. Shamos在其博士论文“Computational Geometry”中归纳和提出了一百多个离散几何问题及其算法。此后，计算几何被公认为是“离散几何问题的算法设计与分析”这一学术领域的名称。经过近30多年的快速发展，其研究内容不断扩大，涉及了凸包、Voronoi图、三角剖分、多边形剖分、几何搜索、求交、可见性计算、路径规划、碰撞检测等众多内容。

计算几何所研究的这些基本问题大都是欧几里德几何问题。它们之所以到现在才被提出来并研究其算法，是因为它们涉及了大量的计算，所以只有在使用计算机的时代才会被提出来并要求解决。同时，这些问题有着广泛的应用背景。如在计算机图形学及虚拟现实中，从建模到绘制几乎都会用到计算几何的算法；几何搜索可为数据库的搜索提供有效算法；机器人运动规划、碰撞计算等计算几何的重要内容也为大规模集成电路设计、机械加工、虚拟装配、GIS等提供了必不可少的实践和理论基础。此外，计算几何还为线性规划、聚类分析、概率统计方法等提供新的算法。

由于这个领域有着非常广泛的应用背景及深入探讨的理论价值，因此在国际上很快成为学术研究的热点，受到广泛重视。如在美国斯坦福大学、普林斯顿大学等国际著名学府都有专门的计算几何研究团队；目前已有多个计算几何的国际学术期刊；每年也召开若干个国际学术会议。

在国际上热火朝天地研究计算几何的30年中，这门学科在我国几乎是被冷落的，很少有人系统地对其进行研究，开设这门课程的也仅有清华大学、浙江大学、山东大学等少数几个单位。一般地，研究算法的学者多热衷于图论算法的设计与分析；而对研究与计算有关的几何问题的学者而言，在连续的曲线曲面上做研究更是得心应手。然而，人们在很多应用中又不可避免地会碰到各种各样的计算几何问题。尽管在我国的学术刊物上也偶尔会刊登与应用有密切关联的讨论离散几何的文章，但由于国内缺乏对该学科的系统研究和教学的环境，研究水平与国外相比还有一定差距。

为此，我们在多年从事计算几何科研、教学工作的基础上出版了本书，力争比较全面地介绍计算几何的基本问题、基础理论和算法，以促进国内计算几何的研究和教学工作。本书适合作为研究生的教材。若为硕士生上课，可以讲授其中部分章节，如第一章～第九章。对于计算机专业的学生，由于较少学习具有严格逻辑推理的课程，所以可通过本书的学习，弥补这方面能力培养的不足。对于数学或其他专业的学生，通过本书的学习，可以对计算机算法的研究方法有所了解。本书也可作为从事计算几何研究或应用的其他科技工作者的参考用书。

本书的写作特色是在注重介绍计算几何基础理论的同时，也注意介绍简洁、实用和

易编程的算法，力求让读者易读、易懂，能够应用这些理论和算法去研究探索更多的计算几何问题。

计算几何与算法设计与分析密切相关。它们研究的对象虽不尽相同，但它们的研究方法却是一致的。它们都对要解决的问题设计算法并进行分析，通过用时间和空间复杂度、最优算法的证明以及实例计算所占用的时间和空间来评价算法的优劣。它们用的是严格逻辑推理的方法。因此，尽量使读者能够掌握这套方法是本书撰写的主要目的之一，同时，计算几何也是一门应用基础学科，引入各种基本概念和结构介绍各种算法也是本书的重要内容。为此，我们除了把一些经典的算法选入本书外，其他算法也是根据上述评价标准择优选用。这些算法至少已在学术刊物或会议论文集中正式出版过。我们认为只有这样才能使读者掌握计算几何的主要内容，并把学到的知识更好地进行应用。

我们也用了较大篇幅介绍概率算法，因为从实践效果来看，它常常是很有效的方法。另外，由于硬件多核技术和 GPU 的广泛使用，使得并行计算又得到重视，因此，本书专门有一章介绍计算几何的并行算法。该章主要着重于介绍共享存储器模型。虽然并行算法比较烦琐，难以以较少篇幅叙述清楚，但我们还是用了几个比较简洁的例子来进行说明，力图使读者能够学会它们。

从全书来看，我们以使读者能够掌握计算几何的基本内容为主要目的，并不刻意介绍我们自己的研究成果。我们选择了几个有一定理论意义和应用价值、符合上述编著原则的成果放在最后一章，其目的是起到抛砖引玉的作用。读者在学习了计算几何以后，可以了解几个实际研究和应用中的例子，并希望读者能从各种应用领域中不断发现和解决新的计算几何问题。

本书在出版过程中得到了“中创软件基金”的资助，在写作过程中也得到了国家自然科学基金（项目编号：60573181，60703028，61070093）的资助。清华大学教授、澳门科技大学副校长唐泽圣先生在百忙中仔细地审查了本书，并提出了很多宝贵的修改意见，我们在此表示衷心的感谢。

本书由汪嘉业、王文平、屠长河和杨承磊执笔完成，第十五章的部分内容由孙峰和伯彭波执笔，最后由汪嘉业统稿、修改和审定。由于时间仓促，作者水平有限，欠妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

作　者

2011 年 7 月

目　　录

第一章　引　　论

计算几何是研究离散和组合几何算法的一门学科，在本章中我们将对最常用到的一些几何对象和概念给出定义和叙述。算法和数据结构是紧密联系的，只有用了恰当的数据结构才能得到好的算法，因而掌握算法中常用的数据结构及其性质是学会本书各种算法的基础。因为在分析算法时间复杂度时，要多次用到排序算法时间复杂度的下界，在本章中我们也将对排序算法时间复杂度的下界做一些讨论。

1.1　几何基础知识

1.1.1　基本概念

E^d 表示 d 维欧几里得空间。$p=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 表示该空间的一个点。对于该空间中任意两个点 p_1 和 p_2，可以用它们的线性组合生成一条 E^d 中的直线：

$$\alpha p_1+(1-a)p_2,\quad \alpha\in R, \tag{1.1}$$

式中 R 是实数空间。如果把参数 α 限于 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，则式（1.1）是这两个点的凸组合，构成连结这两个点的一条线段 p_1p_2。

凸集：设 D 是 E^d 中的一个点集，如果连接 D 中的任何两点的线段上的点都属于 D，则称点集 D 是凸的集合或凸集。

可以证明两个凸集的交是凸的。E^d 中任何 k 个点 p_1，p_2，…，p_k 的所有凸组合：

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_i,\text{其中 }\alpha_i\geqslant0,\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,$$

构成凸集。例如平面上三个点的所有凸组合构成平面上的三角形。

多边形：在 E^2 中的一个多边形是用一个有限线段的集合 L 来定义的，L 中每一线段的每一个端点是 L 中两条线段且仅是这两条线段的公共端点，L 中任两条线段上的点均可通过集合 L 中的线段连通。

构成多边形的线段称为多边形的边，边的端点称为多边形的顶点。

图 1.1 中的线段集合构成多边形，但图 1.2 中的线段集合不构成多边形。由多边形定义可知多边形是线段集合的一个有序的排列。有公共端点的两条边被称为相邻边。在本书后面的章节会讨论类似图 1.2（b）中图形所围成的区域，为了区分，在那里我们将称这样的图形为多边界多边形。

简单多边形：如果一个多边形的任何不相邻的两条边均不相交，则称这个多边形为简单多边形（simple polygon）。

图 1.1（a）是多边形但不是简单多边形，图 1.1（b）是简单多边形。简单多边形把平面分割成内部和外部两个不连通的区域。如果一个简单多边形的内部是凸集，则这个简单多边形是凸的。

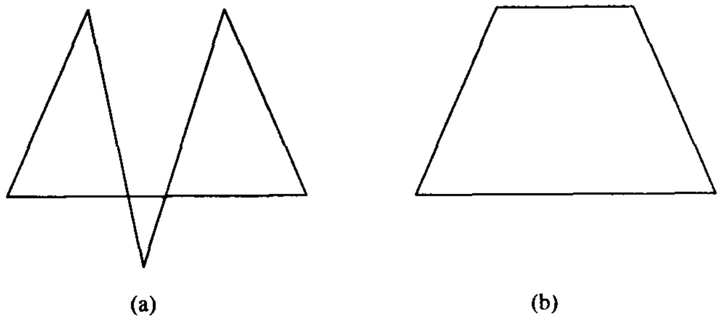


图 1.1　(a) 和 (b) 都是多边形的例子
(a) 不是简单多边形；(b) 是简单多边形

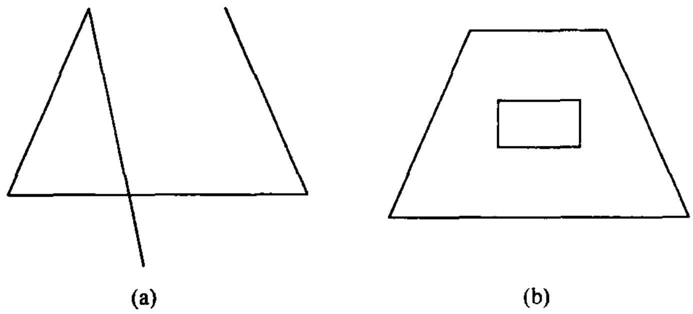


图 1.2　(a) 和 (b) 都不是多边形的例子
(a) 和 (b) 都不是多边形

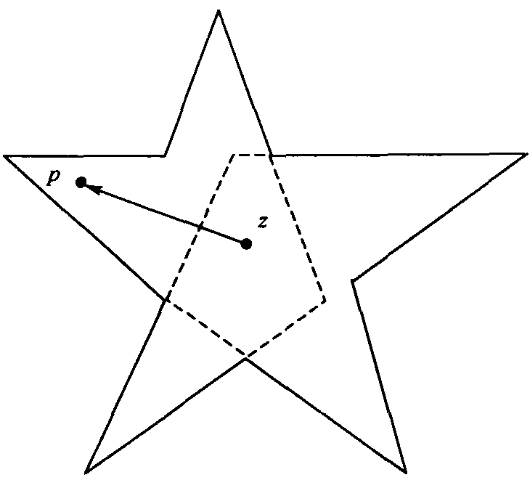


图 1.3　星形多边形及其核（虚线围成的部分）

星形多边形：在一个简单多边形 P 中如果存在这样一个点 z，对 P 内任意一点 p，都使线段 zp 完全位于 P 内，则称 P 为星形多边形。

星形多边形的核：所有满足星形多边形定义的点 z 的集合称为核（kernel）（图 1.3 虚线围成的部分）。

凸多边形是星形多边形，且其核为该凸多边形自身。星形多边形和凸多边形是有一些共性的，有些针对凸多边形的算法可推广到星形多边形。

图论中的图 $G=(V,E)$ 是由顶点集合 V 和边的集合 E 组成的。若能把 V 的所有顶点映射到一个平面上，对 E 中的每条边的端点在该平面上的两个映像点，都有该平面上的一条对应的曲线连接，且如果除了在顶点处外，这些简单曲线之间不再有交点，则这个图 $G=(V,E)$ 被称为可嵌到平面上。

平面图：可嵌到平面上的图被称为平面图。

平面直线图：边为直线的平面图被称为平面直线图 $PSLG$[1]。

可以证明平面图都可以这样嵌入到平面上：图的边在平面上的映像是直线，也就是说通过一定的嵌入方法，平面图可成为平面直线图 *PSLG*。

定理 1.1 平面图满足 Euler 公式：

$$v-e+f=2, \tag{1.2}$$

其中 v，e 和 f 分别表示图中顶点、边及区域的个数。在计算 f 时，要把连接无界的部分算成一个区域。

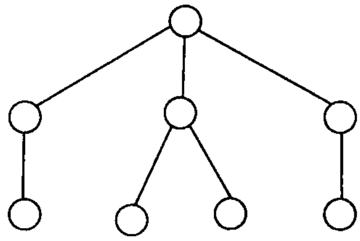
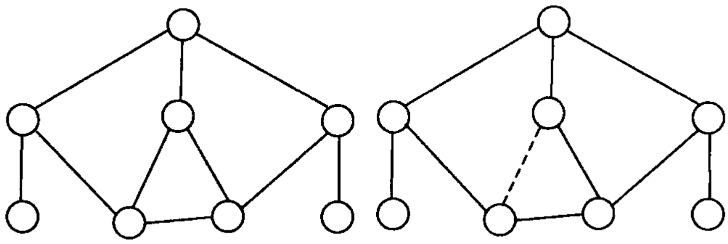


图 1.4 不含环的平面图：树

证明 现用归纳法证。对区域个数 f 作归纳。当 $f=1$ 时，图中只有一个区域，它是连接无界的区域，这时图是一棵树。对树有 $v=e+1$（图 1.4），可得 $v-e+f=1+1=2$，因此式（1.2）成立。

现来证明任意一个平面图 $G=(V,E)$ 满足式（1.2）。不妨假设图 G 是有环的，否则它是一棵树，用上面方法已证明树是满足 Euler 公式（1.2）的。在任一环上删除一条边［参图 1.5（b）中虚线］，得到了修改后的图 $G_1=(V,E_1)$，它的边数为 $e-1$。由于删除了环上的一条边，和这边相邻的两个区域会合成了一个区域（图 1.5），因此区域个数成为 $f-1$。由归纳法假设，区域数为 $f-1$ 时结论成立，即 v，$e-1$ 和 $f-1$ 应满足 Eular 公式，即 $v-(e-1)+(f-1)=2$。由此便得 $v-e+f=2$，也就是区域个数成为 f 时，$G=(V,E)$ 也满足式（1.2）。 □



(a) (b)

图 1.5 含环的平面图

(a) 有环的平面图；(b) 删除环上的一条边（虚线），减少一个区域

由式（1.2）可证明，若每个顶点处度不小于 3，则有下列不等式：

$$v\leqslant 2e/3, \quad e\leqslant 3f-6, \quad v\leqslant 2f-4。 \tag{1.3}$$

若每个区域至少有三条边围成，则下列不等式成立：

$$f\leqslant 2e/3, \quad e\leqslant 3v-6, f\leqslant 2v-4。 \tag{1.4}$$

1.1.2 几何对偶

在计算几何中，几何对偶（geometry duality）是很有用的方法。我们常在两个不同的几何对象空间之间对其几何元素建立对偶，借用对偶空间中对偶元素的性质，可有效地去解决原空间中的问题。在应用这种方法时，根据实际应用的需要，可建立很多不同的对偶，在这里仅以多面体和高斯球面的对偶为例说明这种方法的重要性。

高斯球（Gaussian sphere）是半径为单位长度的球。把多面体上每一个面的外法线

的起点移到高斯球的球心，法线和高斯球面存在一个交点，这个交点便和多面体上的那个面对偶。如图 1.6 中三角形 ABC 和高斯球上 E 点对偶，三角形 ADC 和高斯球上 F 点对偶。三角形 ABC 和三角形 ADC 的交线 AC 则和高斯球面上 E 点和 F 点的连线 EF 对偶。E 和 F 在高斯球面上可有无限多条连线，这里连线是指测地线。E 和 F 把高斯球面上通过 E 和 F 的大圆分成二段，测地线是其中较短的那条弧。顶点 A 是三角形 ABC，ADC 和 ADB 的公共顶点，它和 EF，FG 及 GE 三条弧包围的球面（图 1.6 中球面顶上的部分）对偶。这样便建立了多面体和高斯球上的点、线、面间的对偶。

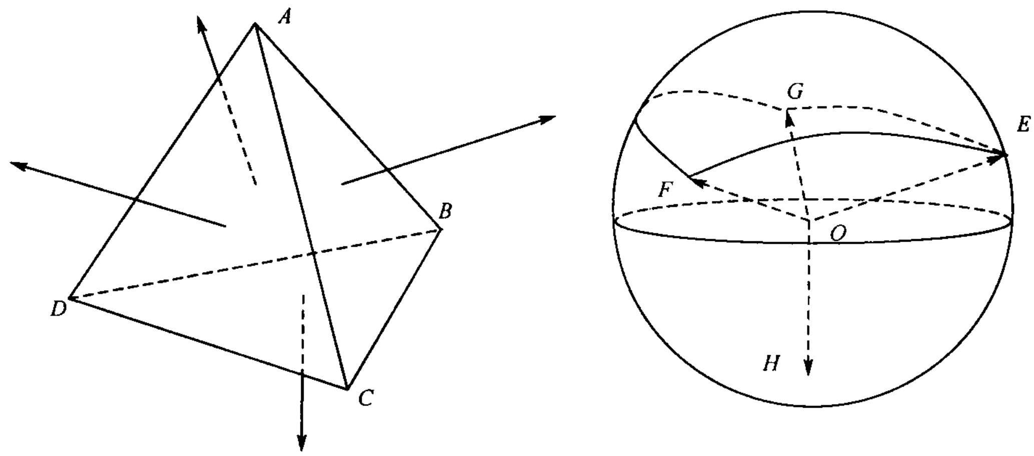


图 1.6　多面体和高斯球的点、线、面的对偶

圆锥面和圆柱面上的点在高斯球上的对偶是球面上的一个圆，圆柱面的对偶是球面上的一个大圆，平面的对偶是球面上的一个点。反向工程中可以用三维扫描仪得到对象表面的点云，把点云中的点变换到高斯球面上，根据圆锥面、圆柱面及平面上的点在高斯球面上的分布规则，可以把点云中位于不同面上的点分类，由此对这三类曲面解决了反向工程中的很困难的点云分割（segmentation）问题。

1.2　算法的复杂度

1.2.1　算法复杂度的度量方法

一般地，计算几何要解决的问题是规模大的问题，规模常指参与计算的点、线或面的数目。例如，对有 n 个点的集合在其凸包内作三角剖分，这个问题的规模便是 n。从计算机系统角度考虑，要解决好这类问题必须要考虑两个因素：①计算机系统存储器能否容纳算法执行时需要存放在计算机内的数据；②计算机能否在希望的时间内完成算法的执行。这样，算法需要的存储空间和执行操作的数量就成为衡量算法优劣的两个主要指标：它们分别被称为空间复杂度和时间复杂度。累计算法中执行的操作数直接关系得到计算的执行时间，但这只是算法的表象，也不能从本质上反映算法好坏。我们把时间和空间复杂度和问题的规模结合起来，并定义为问题规模的两个函数 $t(n)$ 和 $s(n)$。只要知道了问题的规模 n，便可估计出算法需要的时间和空间。例如，为了对边数分别为 n 和 m 的两个多边形求交，我们可用一个两重循环执行边边求交的方法来实现。这个方

法的执行时间正比于 k_1mn，其中 k_1 为常数且与 n、m 无关，它只和执行一次两条边的求交操作有关。这种算法的时间复杂度记为 $t(n)=O(mn)$。在第九章中我们会给出一个求交算法，它需要的操作时间正比于 $k_2(m+n)$，其中 k_2 为常数且与 n、m 无关。这种算法的时间复杂度记为 $t(n)=O(m+n)$。当 n 和 m 很大时，后一种算法比前一种算法快很多。这时常数 k_1 和 k_2 的大小已不重要了。当有些算法的时间复杂度和规模成指数关系时，如果规模较大，用计算机已不能在一定时间内算出精确解。因此，我们把算法执行时所需要的时间或空间和规模的函数关系看成是复杂度的本质。上面用的大$O()$记法是由 Knuth[2]引入的，它和极限论中的相应记号类似。它和其他一些符号的意义如下：

若存在常数 C_1 和 N_0，当 $n>N_0$，便有 $|f(n)|<C_1g(n)$，记成 $f(n)=O(g(n))$。

若存在常数 C_1 和 N_0，当 $n>N_0$，便有 $f(n)\geqslant C_1|g(n)|$，记成 $f(n)=\Omega(g(n))$。

若存在常数 C_1，C_2 和 N_0，当 $n>N_0$，便有 $C_1f(n)\leqslant C_1g(n)\leqslant C_2f(n)$，记成 $f(n)=\theta(g(n))$。

若对任何正数 C_1，存在常数 N_0，当 $n>N_0$，便有 $|f(n)|<C_1g(n)$，记成 $f(n)=o(g(n))$。

$f(n)=\theta(g(n))$表示 $f(n)$和 $g(n)$有相同阶。$f(n)=o(g(n))$表示 $\lim_{N\to\infty}f(N)/g(N)=0$。

由式（1.3）和式（1.4）可知，对一个平面图，若每一顶点的度不小于 3，每个区域至少有三条边围成，则可得

$$f=O(v),e=O(v),v=O(f),e=O(f),f=O(e),v=O(e)。\qquad(1.5)$$

1.2.2 排序时间复杂度的下界

设有 n 个数要排序，以比较两个数大小为基础的排序过程常用一决策树（decision tree）来表示。决策树是一个二叉树（参图 1.7）。二叉树的非叶结点是对第 i 和第 j 个数作比较，其中 i 和 j 是满足 $1\leqslant i$，$j\leqslant n$ 的任两个数，其叶结点为 n 个数的一个排列

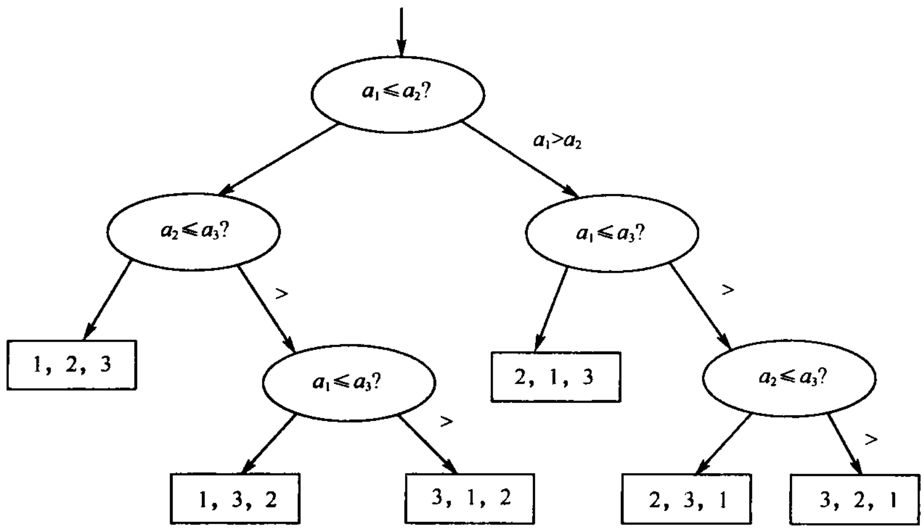


图 1.7 决策树