普通高等院校“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

张云霞 程晓红 主编

3

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十二

高等数学

主　编　张云霞　程晓红
副主编　张步英　沈　玲
参　编　郑俊玲　齐冠宏　张兵兵
主　审　申玉发　刘继发

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本教材是在充分研究目前高等教育中高等数学教育现状，从教学实际情况出发，研究专业需要及学生状况的基础上编写的。主要内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学及二重积分、无穷级数、微分方程。附录部分包括常用数学公式、常用积分公式、习题答案。

本教材是在编者多年来教学实践及教学思考的基础上编写而成的，力求语言简练，结构合理，通俗易懂。不同章节也选取了一定的应用实例，从而加强学生理论联系实际的能力。

本教材可作为经管类、农学类本专科及工科专科类学生的教材，还可作为高职高专及成人电大、函授、自考类教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／张云霞，程晓红主编. —北京：国防工业出版社，2011.8

普通高等院校“十二五”规划教材

ISBN 978－7－118－07606－6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②程… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 153825 号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 15¾ **字数** 362 千字

2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 32.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

恩格斯说：在一切理论成就中，未必再有像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那就正是这里。

华罗庚说：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

由于计算机技术的飞跃发展，现代数学更是直接走到了前台，在运筹优化、工程控制、信息处理、数理统计、科学计数、模式识别、图像处理等方面大显身手，数学的重要作用在信息时代为更多人所认识，学好数学对大学生来说至关重要。

"高等数学"是一门逻辑性较强而又较抽象的重要基础课程，是我国大多数本专科大学生必修的一门基础课，但是，对于理科、工科、管理类、农学类等不同学科而言，高等数学的教学要求是不一样的。针对不同专业的本科生和专科生，合理把握高等数学教学的难度和深度，一直是高等学校广大师生的重要课题。

由于教学的需要，长期以来我们一直想编写一本适用于大多数经管类学生使用的高等数学教材。于是在河北科技师范学院领导及有关部门的支持下，终于在今年完成了本教材的编写工作。我们希望，这本教材的出版，能对相关院校的高等数学的教学和研究工作提供帮助和参考。

在编写本教材时，我们参考了国内外众多院校教师编写的《高等数学》教材及书籍，充分考虑了河北科技师范学院有关专业学生的实际，并参考了有关教师历年来在河北科技师范学院从事数学类课程教学的经验和教训。删除了一些偏难的例题和习题，增加了一些基础性的题目和题型；适当降低了一些理论的深度和难度，加强了对基本概念、基本方法的要求，加强了对计算能力的要求。另外，编写本书时，在语言上我们采取简洁、通俗、易懂的文字；在内容的安排及知识点的讲解过程中，也力求做到形式简洁，内容精练，避免出现繁琐、冗长、复杂的语句，使初学者能够很容易读懂并领悟教材内容。每章最后精心编排了适量、难易程度均衡的练习题，并给出了习题答案作为参考。

本书可以作为经管类、农学类本专科及工科专科类学生的教材，也可作为高职高专及成人电大、函授、自考类教材或教学参考。

本书由河北科技师范学院欧美学院的教师张云霞、程晓红、张步英、沈玲编写，此外河

北科技师范学院欧美学院郑俊玲、河北民族师范学院齐冠宏及张家口教育学院张兵兵等教师对本书的编写也提出了许多切实可行的意见，并在例题及习题的选择、解答方面做了许多工作。河北科技师范学院教授申玉发副教授、刘继发主审了本书。另外，在本书编写的过程中，参考了诸多文献，受到很大启发，在此表示衷心的感谢，篇幅所限，不再一一列举。

限于编者的水平，书中必有考虑不周之处，难免会有一些缺点或错误，希望读者批评、指正，以利于本教材的不断修正。

编 者

2011 年 7 月

目 录

第一章 函数与极限

高等数学主要是以变量为研究对象. 研究变量时,主要考察变量之间的依赖关系,即所谓的函数关系,并由函数关系考察当某个变量变化时,与它相关的变量的变化情况. 这种研究的基本方法就是极限方法. 本章主要介绍函数、极限和函数极连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、函数的概念与性质

1. 区间和邻域

在中学里我们已经学习了集合的概念,现在来学习在高等数学中常用到的一类数集,即所谓的区间. 对于实数 a,b,且 $a<b$,则数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点,统称为开区间 (a,b) 的端点.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

同样 a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点.

类似地,有

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}, \quad (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

统称为半开区间.

以上这些区间从数轴上来看,是一条不包括端点或包括一个、两个端点这样的线段,其长度是有限的,称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

另外还有无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则区间

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, \quad (a,+\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}, \quad (-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

在数轴上表现为射线,称为无限区间.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可记作 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

需要注意的是,记号 $+\infty$、$-\infty$ 只是表达无限性的一个符号,它们都不是确定的数,因此不能进行数的运算.

以后论述中如不涉及区间的具体类型，为方便就简称为“区间”，并用 I 表示.

与这间相关联的是邻域的概念. 设 a 是实数，则以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

如图 1－1 所示，$U(a,\delta)$ 表示的是与点 a 距离小于 δ 的一切点的全体. 点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.

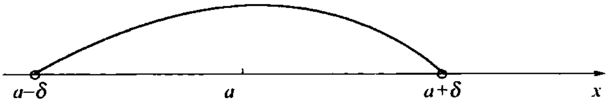

图 1－1

如果将 $U(a)$ 的中心 a 去掉，则称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a)$. 同样，$U(a,\delta)$ 去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1－2 所示.

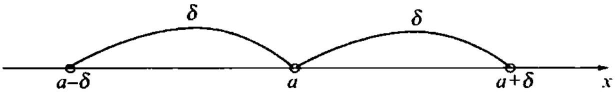

图 1－2

2. 函数的概念

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集. 如果按照某一法则 f，对于任意的 $x\in D$，变量 $y\in \mathbf{R}$ 有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，或称 f 为定义在 D 上的一个**函数关系**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

数集 D 称为这个函数的定义域，记作 $D(f)$ 或 D_f，x 称为自变量，y 称为因变量.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值. 例如当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，相对应的 y 的值就是 $f(x_0)$，或记作 $y\big|_{x=x_0}$. 当 x 取遍定义域 D 中的所有数值时，对应的函数值的全体组成的集合称为函数的值域，记作 $R(f)$、R_f 或 $f(D)$，即

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),\quad x\in D\}.$$

但是严格来说，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值. 只是为了叙述方便，习惯上常用 $f(x)$ 或 $y=f(x)$，$x\in D$ 来表示函数.

表示函数的记号，除了常用的 f 外，还可用其它英文字母或希腊字母，如 g,h,F,φ 等. 但在同一个问题中，为了区别，对几个不同的函数，需用不同的记号表示它们. 另外，有时还直接用因变量 y 的记号来表示函数，即表示为 $y=y(x)$，这时字母 y 既表示因变量，又表示函数.

函数两要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，且对应法则也相同，那么就说这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

在实际问题中,函数的定义域是根据实际意义确定的. 例如圆的面积 $A=\pi r^2$,其定义域为 $D=(0,+\infty)$.

在数学中,通常研究用算式表示的函数居多,此时约定其定义域就是使算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域也称为函数的自然定义域. 例如函数 $y=\sqrt{1-x}$的定义域是$(-\infty,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$的定义域是$\{x\mid x\neq1\}$.

常用的表示函数方法有三种:解析法(公式法、即算式表示法)、表格法、图像法,这些在中学里都已经熟悉了,这里也就不再重复说明了.

下面举几个特殊函数的例子.

例 1 函数 $y=1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是$\{1\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线. 类似地,这样的函数 $y=C$(其中 C 为常数),称为常函数.

例 2 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是$[0,+\infty)$,称为绝对值函数,它的图形如图 1-3 所示。

例 3 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$,称为符号函数,它的图形如图 1-4 所示.

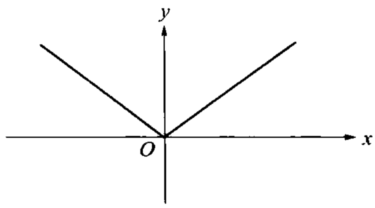

图 1-3

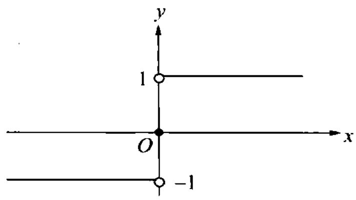

图 1-4

例 4 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$. 例如$[\sqrt{2}]=1$,$\left[\dfrac{\pi}{2}\right]=1$,$[\pi]=3$,$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$,$[-1]=-1$,$[-1.2]=-2$. 函数$y=[x]$的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$,称为取整函数,它的图形如图 1-5 所示.

从例 2 和例 3 可以看到,有时一个函数在其定义域的不同部分,对应法则要用不同的式子表达,这样的函数称为分段函数. 在实际问题中,常会遇到分段函数的情形.

例 5 旅客乘火车时,对随身携带物品,重量不超过 20kg 时免费. 超重部分收费,对超过 20kg 且不超过 50kg 的部分,按每千克 0.20 元收费,对超过 50kg 的部分,按每千克 0.30 元收费. 试写出收费与物品重量之间的函数关系.

解 设物品重量为 x 千克,收费为 y 元. 则

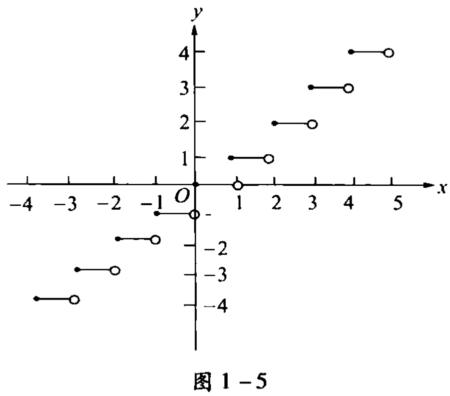

图 1-5

按题设中的规定：

当 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 时，$y = 0$；当 $20 < x \leqslant 50$ 时，$y = 0.20(x - 20) = 0.2x - 4$；

当 $x > 50$ 时，$y = 0.20(50 - 20) + 0.30(x - 50) = 0.3x - 9$.

从而可得

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 20, \\ 0.2x - 4, & 20 < x \leqslant 50, \\ 0.3x - 9, & x > 50. \end{cases}$$

需要注意的是，分段函数是用几个式子表达的一个函数，而不是几个函数.

3. 函数的几种特性

1）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果存在正数 M，使得对任一 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界；如果不存在这样的正数 M，就称 $f(x)$ 在 I 内无界. 例如，对任何实数 x，$|\sin x| \leqslant 1$ 恒成立，所以，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，这里 $M = 1$（当然这里还可取大于 1 的任何实数作为 M）. 再如函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 有界，这里可取 $M = 1$；而 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

如果存在常数 M_1（不一定是正数），使得对任一 $x \in I$，恒有 $f(x) \leqslant M_1$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界.

如果存在常数 M_2（不一定是正数），使得对任一 $x \in I$，恒有 $f(x) \geqslant M_2$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界.

显然，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

2）函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于 I 内任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $y = f(x)$ 在区间 I 内是单调增加（或单调减少）的.

单调增加或单调减少的函数，统称为单调函数.

例如，函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的；在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的；在 $(-\infty, +\infty)$ 不是单调的. 而函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，D 关于原点对称（即若 $x \in D$，必有 $-x \in D$）. 如果对于任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$（或 $f(-x) = -f(x)$），则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

例如，$f(x) = x^2$ 是偶函数，$f(x) = \sin x$ 是奇函数，而 $f(x) = x^2 + \sin x$ 既不是奇函数，又不是偶函数.

奇函数的图形是关于原点对称的；偶函数的图形是关于 y 轴对称的.

4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，对任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$，且恒

有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. 并把 T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常说的周期函数的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

二、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域是 W. 如果对任一 $y\in W$，都有唯一的 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立，这时将 y 看作是自变量，那么就得到一个定义在 W 上的新函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于习惯上一般用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此常将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 它们的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的单调函数，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 必存在，且在 $f(D)$ 上也是单调的.

三、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1；函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W. 那么对于每个 $x\in D_2$，有唯一确定的 $u\in W$ 与之对应. 如果 $W\subset D_1$，则这个 $u\in D_1$，因此有唯一确定的 y 与之对应. 从而对于每个 $x\in D_2$，通过 u 有唯一确定的 y 与 x 对应，这样就得到了一个以 x 为自变量，y 为因变量的新函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D_2$，这个函数就称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，变量 u 称为复合函数的中间变量.

例如，函数 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 可复合成 $y=\sin\sqrt{x}$.

在进行函数复合时，要注意函数需要满足的条件：内层函数 $g(x)$ 的值域与外层函数 $f(u)$ 的定义域的交集为非空数集. 例如函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$ 就不能进行复合.

两个以上的函数也可以复合成一个新的函数. 例如，由函数 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合可得 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$. 函数 $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可看作是由 $y=\arctan u$，$u=2^v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

四、初等函数

1. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

常函数：$y=C$（C 为常数）；

幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 为任意实数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），特别地 $y=\log_e x=\ln x$；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤所构成的且是用一个式

子表示的函数,叫做初等函数.

例如,

$$y = \sqrt{1 + x^2}, \quad y = e^{\sin x}, \quad y = \sqrt{1 - \cos x}$$

都是初等函数. 本书中所讨论的函数主要是初等函数.

第二节　极限的概念

极限概念是微积分最基本的概念,微积分的其它概念都是用极限来表达的. 极限方法是高等数学研究变量变化趋势的一种基本方法.

一、数列的极限

先说明数列的概念. 按下标从小到大依次排列的一列数

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_n, \quad \cdots$$

称为数列,简记为数列$\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的一般项(或通项). 例如:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \cdots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \cdots; \tag{1}$$

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad \cdots, \quad 2^n, \quad \cdots; \tag{2}$$

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad \cdots, \quad (-1)^{n+1}, \quad \cdots; \tag{3}$$

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \cdots, \quad \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \quad \cdots \tag{4}$$

都是数列,它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1}, \quad 2^n, \quad (-1)^{n+1}, \quad \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上,数列$\{x_n\}$,可以看作数轴上的一个动点,它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$.

按照函数定义,数列也可以看作是自变量为正整数 n 的函数 $x_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*$,(称为整标函数),当自变量 n 按正整数 1,2,3,…依次增大的顺序取值时,相应的函数值就排成数列$\{x_n\}$.

下面就来讨论极限的概念.

先看一个具体例子,我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法:割圆术生动体现了极限的思想. 刘徽说:"割之弥细,所失弥少. 割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣."

设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;循此下去,每次边数加倍. 一般地把内接正 $6 \times 2^{n-1}$边形的面积记为 $A_n (n \in N)$. 这样,就得到一系列内接正多边形的面积:

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \cdots,\quad A_n,\quad \cdots.$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大,只要 n 取定了,A_n 就只是多边形的面积,还不是圆的面积. 因此,设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋于无穷大),即无限增加内接正多边形的边数,在这个过程中,图形上内接正多边形无限接近于圆,而对应的面积值 A_n 将无限接近于某一确定的数值,这个确定的数值就是圆的面积. 在数学上,这个确定的数值就称为上面这个数列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 在圆面积问题中可看到,正是这个数列的极限精确地表达了圆的面积.

这样对于极限的概念,就可直观地说成是:如当 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 对应项 x_n 的值无限地趋向(接近)于某一确定的常数 a,那么常数 a 就称为数列 $\{x_n\}$ 的极限.

例如,前面的数列(1),当 $n\to\infty$ 时,它的一般项 $x_n=\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n}$ 无限趋向于 1,因此数列(1)的极限就是 1. 类似地,当 $n\to\infty$ 时,数列(4)的一般项 $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1,所以数列(2)的极限也是 1. 而数列(2)的一般项 $x_n=2^n$,当 $n\to\infty$ 时 x_n 的值无限增大,并不接近任何一个确定的常数,所以数列(2)不存在极限. 再如数列(3),在 $n\to\infty$ 过程中,虽然 x_n 轮流取值 $1,-1$,但不是接近某个确定的常数,所以数列(3)也不存在极限.

对简单的数列,可以根据上面对极限的描述凭观察来判定数列是否存在极限. 但对于变化趋势仅凭观察很难确定的数列,是很难得出结论的. 特别是在极限的严格论证中观察结果是不能作为推理依据的. 因此,有必要寻求用数学的精确语言描述数列极限的严格定义.

以数列(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$ 为例,来深入探讨"当 $n\to\infty$ 时,x_n 无限地趋向(接近)于某一确定的常数 a"的数学含义.

我们知道,数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量,$|b-a|$ 越小,数轴上看 a 与 b 之间的距离也就越小,也就是 a 与 b 越接近. 那么我们所说的 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 无限趋向于 1,就是说 $|x_n-1|$ 无限的小. 所谓"无限的小",也就是说小的程度没有限制,即要多小有多小.

比如,如果要求 $|x_n-1|<\dfrac{1}{10^2}$,由于 $|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$,因此只要 $n>10^2$,即从第 10^2+1 项起以后所有的项都能满足这个要求;

如果要求 $|x_n-1|<\dfrac{1}{10^5}$,由于 $|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$,因此只要 $n>10^5$,即从第 10^5+1 项起以后所有的项都能满足这个要求;

……

一般地,我们引入一个希腊字母 ε 来代表任意给定的正数,其小的程度没有任何限

制，这样$|x_n-1|<\varepsilon$就表达了x_n与1无限接近的意思. 于是数列(1)的极限是1就可精确表述为：无论事先指定一个多么小的正数ε，在n无限增大的过程中，总存在那么一项N，在那一项后，所有的项都满足$|x_n-1|<\varepsilon(n>N)$.

由此给出数列极限的精确定义.

定义1 设有数列$\{x_n\}$，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，那么就称常数a**是数列$\{x_n\}$的极限**，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad 或\quad x_n\to a\quad (n\to\infty).$$

如果这样的常数a不存在，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$是发散的.

几何上来说明数列$\{x_n\}$极限a的含义. 将数列$\{x_n\}$及常数a在数轴上用它们所对应的点表示出来，再作开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

$|x_n-a|<\varepsilon$等价于$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，所以当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，就是说所有的点$x_n$都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多$N$个)点落在这个区间以外.

例1 证明数列$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$的极限是1.

证 根据极限的定义，只需证明对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

恒成立.

因为$|x_n-1|=\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，所以，要使$|x_n-1|<\varepsilon$成立，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon\quad 即\quad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

因此可取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则$n>N$时有

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

恒成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

例2 证明当$|q|<1$时，等比数列$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$的极限是0.

证 因为$|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}$，所以，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$成立，只要

$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

取自然对数，得$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 由于$|q|<1$，$\ln|q|<0$，所以

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$