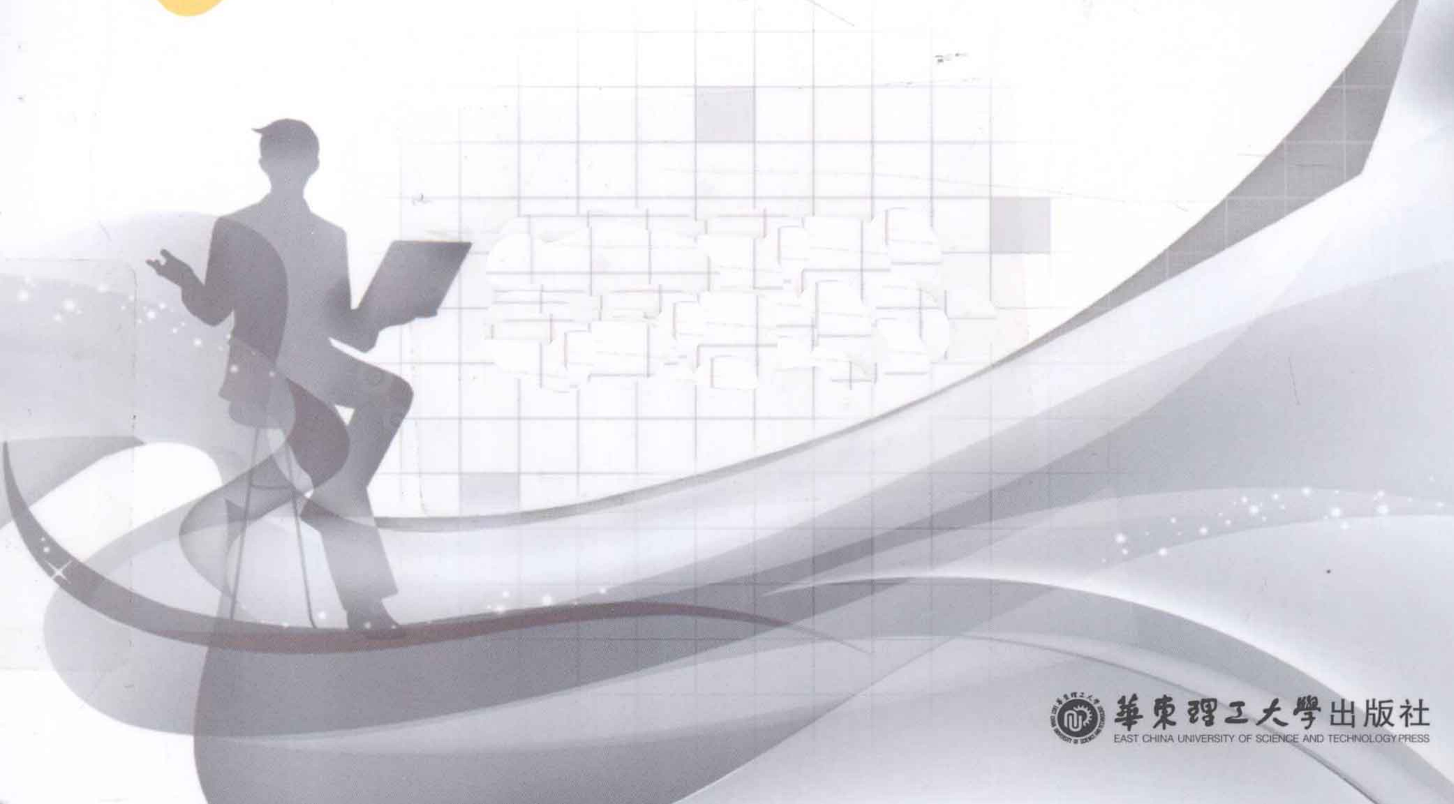
经典教材配套丛书

配套·高教社·吴传生《经济数学——线性代数（第二版）》

线性代数同步辅导与习题全解

（高教社·吴传生·第二版）

胡煜寒 编著



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

经典教材配套丛书

配套·高教社·吴传生《经济数学——线性代数(第二版)》

线性代数同步辅导与习题全解

(高教社·吴传生·第二版)

胡煜寒　编著

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

前　言

线性代数是高等院校理工科和经济管理类学科相关专业的一门重要基础课，同时，作为处理离散问题的工具，线性代数也是从事自然科学研究的科研人员、从事经济金融行业的定量分析专业人士的必备的数学工具之一。因此，学好线性代数对广大同学是非常有意义的。

为了帮助广大在校生和自学者学好线性代数这门课程，掌握这个有力的数学工具，作者总结了教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套吴传生主编的《经济数学——线性代数(第二版)》同步辅导书。本书对原教材内容进行了归纳总结并逐章编写，对部分知识点作了有益的扩展延伸，对重点难点进行了剖析，对所有的习题进行了详尽的解答。每章包括：大纲基本要求、本章知识结构图、本章基本内容、重点难点剖析及典型例题解析、习题全解、总习题全解等六个栏目。

大纲基本要求——符合国家教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》，同时根据教学实践作了个别适当修改。

本章知识结构图——将知识点有机地联系起来，从整体到细节呈现知识点之间的关系。

本章基本内容——按照既“由浅入深、系统全面、脉络清晰”，又“突出重点、简明扼要、详略得当”的理念，对内容和方法进行归纳总结。

重点难点剖析及典型例题解析——对每章的重点、难点内容进行具体分析，并通过具有代表性的典型例题的分析、求解，使抽象的知识变得具体。

习题全解、总习题全解——对每章的习题、总复习题均给出了详细解答，解答过程详细而具体，跳跃度很小，大部分题目在解答之前给出了“解题指导”。同时，对部分题目给出了两种或三种不同的解法，从不同的角度对同一个问题进行

不同的分析求解，有利于知识的综合、交叉应用，从而使读者开阔视野，真正地锻炼数学思维，提高对知识掌握的熟练程度。

由于作者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，还望各位专家、读者不吝赐教，斧正谬误，以期本书能及时进行修正并不断完善。

作者

2011 年 9 月

目　录

1 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

一 大纲基本要求

1. 理解线性方程组及其相关概念.
2. 了解消元法解线性方程组的基本思想,熟练掌握线性方程组的消元法.
3. 理解矩阵及其相关概念.
4. 理解初等变换的概念,能够用初等变换化行阶梯形、行最简形、标准形矩阵.
5. 熟练掌握用初等变换求解线性方程组.

二 本章知识结构图

- 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换
  - 线性方程组的消元法
    - 线性方程组的基本概念
      - 定义 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$
      - 分类
        - 齐次线性方程组:常数项均为零
        - 非齐次线性方程组:常数项不全为零
      - 线性方程组的线性组合 → 线性方程组的等价(可互推) → 线性方程组的同解变换
    - 消元法
      - 线性方程组的初等变换(三种)
      - 初等变换解线性方程组 → 化为行阶梯形方程组
      - 线性方程组的解
        - 非齐次:无解、唯一解、无穷多解
        - 齐次:零解、非零解
  - 矩阵的初等变换
    - 矩阵的概念
      - 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
      - 特殊的矩阵:行矩阵、列矩阵、零矩阵、转置矩阵等
      - 线性方程组的系数矩阵、增广矩阵

- 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换
  - 矩阵的初等变换
    - 矩阵的初等变换
      - 初等行变换
        - 对调两行
        - 某行乘以非零常数
        - 某行倍数加到另一行
      - 初等列变换：将上面三种变换中的“行”换成“列”
      - 矩阵的等价
        - 定义：$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等变换}}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 等价
        - 性质
          - 自反性
          - 对称性
          - 传递性
      - 行初等变换解线性方程组：增广矩阵 $\xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 行最简形矩阵
      - 初等变换化矩阵为标准形

二 本章基本内容

1. 线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

当 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 全为零时，方程组称为齐次线性方程组；当 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为零时，方程组称为非齐次线性方程组.

2. 矩阵的定义：由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表，称为 $m\times n$ 矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

3. 同型矩阵：两个矩阵的行数相等，列数也相等时，就称它们是同型矩阵.

4. 矩阵相等：如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

5. 零矩阵：元素都是零的矩阵，称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{0}$.

6. 矩阵的转置：把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到的一个新矩阵，叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

7. 线性方程组的系数矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

8. 线性方程组的增广矩阵：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

9. 线性方程组的消元法包括两个步骤：消元过程、回代过程.

(1) 消元过程：通过消去变元，将方程组化为同解的上三角方程组；

(2) 回代过程：从最后一个方程求出 x_n，代入倒数第二个方程，求出 x_{n-1}，依此类推，继续回代，直至求出 x_3、x_2、x_1.

10. 矩阵的初等变换：对矩阵进行以下三种变换，分别称为矩阵的第一、第二、第三种初等行(列)变换，统称为矩阵的初等变换.

(1) 互换矩阵的某两行(或列)；

(2) 用一个非零的常数 k 乘矩阵的某一行(或列)；

(3) 把矩阵的某一行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)上.

11. 矩阵的等价：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

等价矩阵具有的性质：①自反性　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；②对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；③传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

12. 行阶梯形矩阵：其特点是，可画出一条阶梯线，线的下方全为零；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元为非零元，也就是非零行的第一个非零元，或称非零行的非零首元.

13. 行最简形矩阵：其特点是，行阶梯形矩阵中，非零行的第一个非零元为 1，且非零行的第一个非零元所在的列的其他元都为零.

14. 矩阵的标准形：其特点是，矩阵的左上角元 $a_{ii}=1(i=1,2,3\cdots)$，其他元均为零.

任何矩阵都可以通过初等变换化为标准形矩阵.

四　重点难点剖析及典型例题解析

1. 消元法求解线性方程组

消元法的基本思想是通过方程组的同解变形，使各方程中所含未知量的个数依次减少，把方程组化为容易求解的同解方程组，从而达到求解的目的. 用消元法求解线性方程组的具体做法就是对方程组反复进行以下三种变换：

(1) 交换两个方程的次序；

(2) 用一个非零的常数乘某个方程；

(3) 把一个方程的适当倍数加到另一个方程上.

以上这三种变换称为线性方程组的初等变换. 可以证明：线性方程组的初等变换是将方程组化为同解方程组.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2=-3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=2. \end{cases} \tag{①}$$

解题指导：利用方程组的同解变换，先消元，再回代.

解 将方程组①中第 1 个方程的(-2)倍、$(+1)$倍和(-4)倍分别加到第 2、第 3、第 4 个方程上，消去这三个方程中的未知量 x_1，得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ -3x_2-2x_3=2 \\ 3x_2+2x_3=-2 \\ -3x_2-4x_3=-2 \end{cases} \tag{②}$$

将方程组②中第 2 个方程的$(+1)$倍和(-1)倍分别加到第 3 和第 4 个方程上，消去这两个方程中的未知量 x_2；这时第 3 个方程两边全为零，即为恒等式，交换第 3、第 4 个方程，得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ -3x_2-2x_3=2 \\ -2x_3=-4 \\ 0=0 \end{cases} \tag{③}$$

显然，方程组③中的第 4 个方程多余，去掉该方程；并将方程组③中的第 3 个方程两边乘以$\left(-\frac{1}{2}\right)$，得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ -3x_2-2x_3=2 \\ x_3=2 \end{cases} \tag{④}$$

从方程组④的第 3 个方程可得 $x_3=2$，将 $x_3=2$ 依次代入前 2 个方程(也就是把第 3 个方程的适当倍数分别加到前两个方程上，消去这两个方程中的 x_3)，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ -3x_2=6 \\ x_3=2 \end{cases} \tag{⑤}$$

将方程组⑤中的第 2 个方程两边乘以$\left(-\frac{1}{3}\right)$，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_2=-2 \\ x_3=2 \end{cases} \tag{⑥}$$

将方程组⑥中的第 2 个方程的(-1)倍加到第 1 个方程上，得

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-2 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad ⑦$$

显然，方程组①～⑦都是同解方程组，故方程组⑦的解即为原方程组的解.

思路总结：在上述求解过程中，①～③称为消元过程，④～⑦称为回代过程，形如③式的方程组称为阶梯(形)方程组. 消元法的思想就是利用方程组的初等变换将原方程组化为阶梯(形)方程组，而这个阶梯(形)方程组与原线性方程组同解，解这个阶梯(形)方程组即可求得原方程组的解.

2. 矩阵的初等变换

对矩阵作如下三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对调矩阵的任意两行(对调第 i,j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2) 以非零常数 k 乘矩阵某一行的各元(第 i 行乘 k，记作 $r_i\times k$)；

(3) 把某一行所有的元的 k 倍加到另一行对应的元上(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j).

把定义中的“行”换成“列”，即得初等列变换的定义(所用记号是把“r”换成“c”). 矩阵的初等行变换与矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换.

注意：(1) 矩阵的三种初等变换都是可逆的；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 等价关系具有以下性质：

(ⅰ) 自反性　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

(ⅱ) 对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

(ⅲ) 传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

数学中把具有上述三条性质的关系称为等价关系. 例如，两个线性方程组同解，就称这两个线性方程组等价.

例 2　试用初等变换将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$化为行阶梯形.

解　$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$，矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 即为行阶梯形矩阵.

若将 $\boldsymbol{B}_1$ 再作初等行变换，则化为如下形状

$$\boldsymbol{B}_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_2.$$

其中 $\boldsymbol{B}_2$ 称为行最简形矩阵，其特点是非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其他元全为零.

注意：(1) 用数学归纳法可以证明，任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

(2) 再经过初等列变换，$\boldsymbol{B}_1$ 或 $\boldsymbol{B}_2$ 可化为

$$\boldsymbol{B}_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{F},$$

矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形，其特点是 $\boldsymbol{F}$ 的左上角为一个单位矩阵，其他元全为零.

(3) 一般地，对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，可以通过初等变换(行变换和列变换)化为下面的标准形

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$

此标准形由 m,n,r 三个数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

3. 利用矩阵的初等变换求解线性方程组

对于一般的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$，有三种可能情况：无解，有唯一解或有无穷多个解. 也就是说，对于任意一个线性方程组，其求解的结果必然为这三种情况之一.

而对于一般的齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$，恒有解，因为它至少有零解. 当然，也可能有非零解.

在具体求解线性方程组时，对其增广矩阵($\boldsymbol{Ab}$)进行初等行变换化为行阶梯形矩阵即可判断线性方程组解的情况，将行阶梯形矩阵进一步化为行最简形矩阵，即可得到方程组的一般解.

例 3 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

解题指导:齐次线性方程组一定有解,只需要注意它是否有非零解,不用考虑无解的情况.

解 将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&5&-1\\1&2&-2&3\\3&4&8&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5&-1\\0&1&-7&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&12&-5\\0&1&-7&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得出同解方程组 $\begin{cases}x_1+12x_3-5x_4=0,\\x_2-7x_3+4x_4=0.\end{cases}$

取 x_3,x_4 作为自由未知量,得 $\begin{cases}x_1=-12x_3+5x_4,\\x_2=7x_3-4x_4.\end{cases}$

令 $x_3=k_1,x_4=k_2$,则原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-12k_1+5k_2,\\x_2=7k_1-4k_2,\\x_3=k_1,\\x_4=k_2.\end{cases}$ (k_1,k_2 为任意实数)

例 4 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-x_4=4,\\3x_1-2x_2-x_3+2x_4=2,\\2x_1+3x_2-5x_3-3x_4=10.\end{cases}$

解题指导:对于非齐次线性方程组,在对增广矩阵作初等行变换时,一旦发现有无解的方程,就不用再化简了.

解 对增广矩阵作初等行变换化为行阶梯形矩阵.

$$(\boldsymbol{A}b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&4\\3&-2&-1&2&2\\2&3&-5&-3&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&4\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ 方程组有无穷多解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2+x_3,\\x_2=2+x_3+x_4.\end{cases}$ (x_3,x_4 为自由未知量)

令 $x_3=k_1,x_4=k_2$,原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2+k_1,\\x_2=2+k_1+k_2,\\x_3=k_1,\\x_4=k_2.\end{cases}$ (k_1,k_2 为任意实数)

例 5 λ 取何值时,线性方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有解?并求出它的解.

解题指导：先利用矩阵的行初等变换，将线性方程组所对应的增广矩阵化成行阶梯形矩阵，然后根据线性方程组有解的要求来讨论未知参数的取值. 另外，在对含参数的矩阵作初等变换时，含参变量的式子一般不宜作分母. 若作分母，则使分母为零的参数值需另行讨论.

解　对方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行阶梯形矩阵，得

$$(\boldsymbol{A}b)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & -3 & 3 & 2\lambda-2\\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda-1)\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

要使方程组有解，则需满足$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，故可得$\lambda=1$或$\lambda=-2$，此时方程组有无穷多解.

当$\lambda=1$时，$(\boldsymbol{A}b)\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得到方程组的一般解为$\begin{cases}x_1=1+x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=1+c\\ x_2=c\\ x_3=c\end{cases}$　(c为任意常数)；

当$\lambda=-2$时，$(\boldsymbol{A}b)\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

方程组的一般解为$\begin{cases}x_1=2+x_3\\ x_2=2+x_3\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=2+c\\ x_2=2+c\\ x_3=c\end{cases}$($c$为任意常数).

例 6　a,b取何值时，下面的方程组无解、有唯一解或有无穷多个解？在有解时，求出方程组的全部解.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$$

解题指导：先利用矩阵的行初等变换，将线性方程组所对应的增广矩阵化成行阶梯形矩阵，然后根据线性方程组有解的要求来讨论未知参数的取值. 对于像本题这样含有两个未知参数的线性方程组，要综合考虑当两个参数取不同值时，线性方程组解面临的不同情况.

解 对方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行阶梯矩阵，得

$$(\boldsymbol{Ab})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a\neq-1$ 时，有唯一解. 由于 $a+1\neq0$，可将 $(\boldsymbol{Ab})$ 继续化为行最简形矩阵，即

$$(\boldsymbol{Ab})\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\dfrac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&\dfrac{a+b+1}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以，当 $a\neq-1$ 时，原方程组有唯一解，为

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{2b}{a+1},\frac{a+b+1}{a+1},\frac{b}{a+1},0\right)^{\mathrm{T}}$$

(2) 当 $a=-1$ 且 $b\neq0$ 时，原方程组无解.

(3) 当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时，有无穷多个解. 此时将 $(\boldsymbol{Ab})$ 继续化为行最简形矩阵，有

$$(\boldsymbol{Ab})\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，原方程组的一般解为 $\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=1+x_3-2x_4\end{cases}$，$x_3$ 和 x_4 为自由未知量.

令 $x_3=C_1$，$x_4=C_2$，则原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-2C_1+C_2\\x_2=1+C_1-2C_2\\x_3=C_1\\x_4=C_2\end{cases}$ (C_1，C_2 为任意常数).

五 习题全解

习题 1-1 (见原书 P10)

1. 用消元法解线性方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+\ \ x_3=3,\\-2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=-3,\\x_1-4x_2+2x_3=-5;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 3x_1+x_2+6x_3+2x_4=3, \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ x_1+3x_2=8. \end{cases}$

解 (1) 用初等变换消去第 2,第 3 个方程中的 x_1,得$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 5x_2+x_3=3 \\ -6x_2+x_3=-8 \end{cases}$,

将第 2 个方程的$\frac{6}{5}$倍加到第 3 个方程,消去第 3 个方程中的 x_2,得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 5x_2+x_3=3 \\ \frac{11}{5}x_3=-\frac{22}{5} \end{cases},$$

将第 3 个方程两边乘以$\frac{5}{11}$,得$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 5x_2+x_3=3 \\ x_3=-2 \end{cases}$,

用第 1,第 2 个方程分别减去第 3 个方程,得$\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ 5x_2=5 \\ x_3=-2 \end{cases}$,

将第 2 个方程两边乘$\frac{1}{5}$,得$\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ x_2=1 \\ x_3=-2 \end{cases}$,

将第 1 个方程减去第 2 个方程的 2 倍,得$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \\ x_3=-2 \end{cases}$,

即方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(2) 用初等变换消去第 2,第 3 个方程中的 x_1,得$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+4x_4=3 \\ -2x_2-10x_4=-6, \\ 3x_2+5x_4=4 \end{cases}$

将第 2 个方程乘以$\frac{3}{2}$加到第 3 个方程,消去第 3 个方程中的 x_2,得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+4x_4=3 \\ -2x_2-10x_4=-6, \\ -10x_4=-5 \end{cases}$$