王矜奉　苏文斌　王春明　盖志刚/编著

压电振动理论与应用

Piezoelectric Vibration Theory and Application

科学出版社

压电振动理论与应用

王矜奉　苏文斌　王春明　盖志刚　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书论述了各类压电谐振器件的基本理论.前五章从弹性动力学、压电学及电学的基本理论出发,系统地分析了处于各种边界条件或应力条件下的压电器件的谐振特性;第6章论述了压电谐振器的等效参数、压电材料常数与频谱的关系及这些常数的测定方法;第7章讲述了求解压电谐振器谐振频谱的若干实用的近似方法.

本书可作为高等院校功能材料、自动控制、电气工程、应用声学、水声科学、弹性动力学等专业高年级本科生或研究生的专业教科书,也可作为从事谐振器、滤波器、传感器等压电器件研究、设计、应用或制造的科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

压电振动理论与应用/王矜奉等编著.—北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-032182-4

Ⅰ.①压… Ⅱ.①王… Ⅲ.①压电器件-振动 Ⅳ.①TN384

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175402号

责任编辑:胡 凯 杨 锐/责任校对:陈玉凤

责任印制:赵 博/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2011年9月第一次印刷 印张:16

印数:1—2 500 字数:309 000

定价:42.00元

前　言

近几十年来，压电器件的研制和应用一直在蓬勃发展．压电谐振器、压电滤波器、压电换能器及压电传感器在通信、自动控制、计测、电声、水声、超声、航空、航天、医疗卫生等领域得到了广泛的应用．这些压电器件的主要理论大都是源于压电体的振动理论．

本书的前五章从弹性动力学和压电物理学的基本理论出发，系统地分析讨论了棒形压电振子的伸缩振动、弯曲振动、扭转振动，板形压电振子的弯曲振动、径向伸缩振动、面切变振动、厚度切变振动、能陷振动，圆环、圆筒、球壳压电振子的各类振动以及压电体的表面振动．在阐明理论的同时，本书适当地介绍了有关振动模式的实际应用．第 6 章分析了压电振子等效参数、压电材料常数与频谱的关系，并介绍了这些参数和常数的测量方法．第 7 章给出了求解压电振子频谱的若干实用的近似方法．附录中简述了一些矩阵运算的基本知识，以利于线性代数知识不足的读者学习时查用；同时还列出了压电晶体的常数等，可供读者在学习和研究工作中查用．

本书的初稿曾呈请秦自楷教授指正．中国电子学会理事韩锡振高级工程师对本书的修改稿作了审阅，提了不少宝贵意见．现北京七星集团副总裁曹东英在本书的早期版本的出版中给予了大力帮助．鞍山电子陶瓷公司在本书的早期版本的出版中提供了资助．姜祖桐先生和石瑞大先生为早期版本的编写出版做了不少工作．俞淑华同志、孙广珍同志在插图的绘制上做了大量工作．在此，谨向这些同志表示衷心的感谢．

本书的早期版本中存在许多排版和印刷的错误，这些错误给广大读者的学习造成了难以克服的困难．许多读者曾多次向作者提出修订再版的请求．现作者克服了原稿及校稿全部丢失带来的困难，分工合作，对早期样书逐词逐句进行推敲订正，对每一条数学式子进行认真的演算验证，对每幅图进行了重新绘制，对某些欠妥之处进行了剔除．完成对早期版本的全面修订，是作者兑现了对广大读者的承诺．为了更准确地概括本书的内容，本次新版更名为《压电振动理论与应用》．

作者学识水平有限，书中错误和不妥之处在所难免．我们诚恳希望广大读者给予批评指正．

作　者

2011 年 3 月

目　　录

第 1 章　固体弹性的基本理论

1.1　固体弹性的本质及其假定

当固体受外力作用时，固体（介质）中的质点偏离原来平衡位置，与此同时，介质内部产生一种弹性恢复力. 外力撤销后，在弹性恢复力作用下，质点可能会恢复到原平衡位置，也可能恢复不到原平衡位置. 固体介质质点在外力撤销后能恢复到原来平衡位置的性质称为固体的弹性. 弹性是固体介质的一个重要属性.

弹性振动理论是弹性动力学的重要组成部分. 它主要研究弹性恢复力与介质形变，以及与质点位移之间的关系，研究波动的规律，特别是驻波的重要性质. 弹性振动理论是以质点位移作为基本研究对象的. 这里所说的质点，在宏观上是极其微小的，而微观上却包含许许多多的分子和原子. 因此，弹性振动理论是关于固体弹性这一属性的宏观理论.

固体弹性这一宏观性质是固体介质微观性质的反映. 从固体物理理论我们知道，固体内两原子（或分子、离子）间的作用力可表示为

$$f=-\frac{A}{r^m}+\frac{B}{r^n}. \tag{1.1}$$

其中 r 为两原子之间的距离；A,B,m,n 是常数.

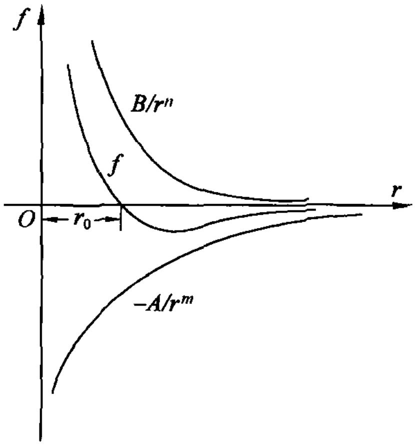

图 1.1　固体中原子间的互作用力

对一些离子晶体和金属，$m=2$，$4<n<12$. (1.1)式中第一项代表两原子间的吸引力，第二项代表排斥力. 图 1.1 表示出了吸引力和排斥力及其合力与 r 的关系曲线. 可以看出，在 $r=r_0$ 处合力为零，这便是原子的平衡位置. 在 $r<r_0$ 时，排斥力是主要的；在 $r>r_0$ 时，吸引力是主要的. 当固体受拉伸时，r 增大，此时原子间的吸引力反抗着这一拉伸形变；当固体受挤压时，r 减小，原子间的排斥力抗击着这一外界的压力.

从(1.1)式可以看出，由于 $n>m$，在 r_0 附近，合力 f 的斜率主要取决于排斥力的斜率. 该斜率越大，固体介质的弹性越强. 因此，我们可以说，固体弹性的强弱主要取决于介质中原子间的排斥力的大小.

对于弹性形变，相邻原子间的距离在 r_0 附近变化. 令 $r=r_0+\Delta r$，则有

$$r^{-m}=(r_0+\Delta r)^{-m}=r_0^{-m}\left(1+\frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-m}\approx r_0^{-m}\left(1-m\frac{\Delta r}{r_0}\right),$$

$$r^{-n}\approx r_0^{-n}\left(1-n\frac{\Delta r}{r_0}\right).$$

因为 $\Delta r/r_0$ 是相对形变，弹性力学称为应变，并计作 S，所以原子间的作用力

$$f=-\frac{A}{r^m}+\frac{B}{r^n}=-\frac{A}{r_0^m}+\frac{B}{r_0^n}+\frac{AmS}{r_0^m}-\frac{BnS}{r_0^n}=\left(\frac{Am}{r_0^m}-\frac{Bn}{r_0^n}\right)S.$$

再令

$$\frac{Am}{r_0^m}-\frac{Bn}{r_0^n}=c,$$

则有

$$f=cS.$$

可见，原子间的相互作用力，与原子间距的相对变化成正比. 原子间的相互作用力是由外力引起的. 因此，在小形变条件下，外力与固体的应变成正比. 这便是弹性力学的基本理论基础.

随着外力的消失而消失的形变叫做固体的弹性形变；去掉外力后仍然保留的形变叫做残余形变或永久形变. 弹性力学研究的形变属弹性形变. 但实验表明，绝对的弹性形变是不存在的，任何外力引起的形变都存在残余形变. 不过，对绝大多数固体而言，当外力引起的形变较小时，残余形变很小，一般不超过0.005%. 也就是说，理想化的弹性固体仅是实际固体的一个近似. 基于这一近似，经典弹性理论假定：

(1) 固体介质是连续的；

(2) 固体介质是均匀的；

(3) 固体介质是完全弹性的；

(4) 弹性体的形变与本身尺寸相比是微小的.

这些假定,使弹性力学的数学处理变得简单明了,使外力与弹性恢复力、外力与介质形变、弹性恢复力与形变成为一一对应的线性关系.

1.2　固体弹性力学的基本概念

弹性力学中有四个重要的物理量,它们是:外力、应力、应变和质点位移. 对于压电弹性介质来说,由于力学量与电学量相互耦合,还有两个基本物理量,即电场强度和电位移矢量.

1. 外力

作用在弹性体上的外力分为体力和表面力. 体力作用于物体的内部,例如重力、磁性力和惯性力等. 一般情况下,物体均处于重力场中,重力引起的形变不随时间变化,是弹性体稳定的形变. 因此,在讨论弹性体的振动问题时,我们将不考虑重力对弹性体质点的应变和位移等的影响.

一般情况下,不同位置的质点受到的体力可能是不同的,也就是说,体力可能是质点位置坐标的函数. 为了描述某一点的体力的大小和方向,我们称极限

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{F}$$

为体积元 $\Delta\tau$ 趋于零时该点的体力密度.

表面力是指分布在物体表面上的力. 只有当弹性体与其他物体或物质相接触时,才可能存在表面力. 同样,我们称极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}'}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}'}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{F}'$$

为面积元 Δs 趋于零时该点的表面力密度.

2. 应力

所谓弹性体的应力,是指弹性体受到外力时,内部产生的抵抗形变的弹性恢复力. 当有外力作用于弹性体表面时,外力并没有直接作用于物体内部的质点上,而是借助于作用在相邻质点间的弹性力传递给内部质点. 由于弹性体是连续介质,我们必须找出一个描述连续介质弹性恢复力的办法.

设想在弹性体内有一面积为 Δs 的截面. 截面两边的质点相互受到对方传递的作用力. 根据牛顿第三定律可知,这两方的力大小相等、方向相反. 由于力是矢量,可以想象得出,所取面积元 Δs 的方位不同,面积元两边的作用力随 Δs 的方位而

异. 如果面积元 Δs 的某一面的外法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，我们称极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{T}_n}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}_n}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{T}_n$$

为 Δs 趋于零这一点外法线为 $\boldsymbol{n}$ 的截面上的应力.

因为在弹性体中某一点的面积元的方位有无数个选取方法，所以在弹性体内某一点可以定义无数个应力向量. 但是，如果已知过某点的三个相互垂直面积元上的应力向量，则过该点任何其他面积元上的应力向量，均可由这三个应力向量求出. 亦即，这三个应力向量能够完全确定该点的应力状态.

在直角坐标中，在 (x,y,z) 这一点，$+x$ 方向面积元上的应力为

$$\boldsymbol{T}_x=\boldsymbol{i}T_{xx}+\boldsymbol{j}T_{yx}+\boldsymbol{k}T_{zx}. \tag{1.2}$$

$+y$ 和 $+z$ 方向面积元上的应力分别为

$$\boldsymbol{T}_y=\boldsymbol{i}T_{xy}+\boldsymbol{j}T_{yy}+\boldsymbol{k}T_{zy}, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{T}_z=\boldsymbol{i}T_{xz}+\boldsymbol{j}T_{yz}+\boldsymbol{k}T_{zz}. \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x,y,z 轴的单位矢量；T_{xx},T_{yy},T_{zz} 是垂直于作用截面的应力分量，称之为正应力；其他应力分量均处于作用截面内，称之为切应力.

$\boldsymbol{T}_x,\boldsymbol{T}_y,\boldsymbol{T}_z$ 三个应力向量能够完全确定 (x,y,z) 点的应力状态，也就是说一个应力状态对应 9 个应力分量. 由 9 个分量决定的量是一个二阶张量，所以应力是一个二阶张量，可用矩阵表示之，

$$[T]=\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

设在弹性体内某一点 (x,y,z) 处有一任意取向的面积元，其外法线方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}n_x+\boldsymbol{j}n_y+\boldsymbol{k}n_z,$$

该面积元上的应力为

$$\boldsymbol{T}_n=\boldsymbol{i}T_{xn}+\boldsymbol{j}T_{yn}+\boldsymbol{k}T_{zn}. \tag{1.6}$$

今取如图 1.2 所示的四面体体积元，由图示可得 x 轴方向上的合力为

$$T_{xn}\Delta s_n-T_{xx}\Delta s_x-T_{xy}\Delta s_y-T_{xz}\Delta s_z+F_x\Delta\tau=0.$$

其中 $F_x\Delta\tau$ 为四面体所受体力在 x 轴方向上的量. 当面积元 Δs_n 趋于零时，$\Delta\tau$ 比 Δs_n 更快地趋于零，所受体力一项可以忽略.

利用关系式

$$\Delta s_x=n_x\Delta s_n,$$

$$\Delta s_y=n_y\Delta s_n,$$

$$\Delta s_z = n_z \Delta s_n,$$

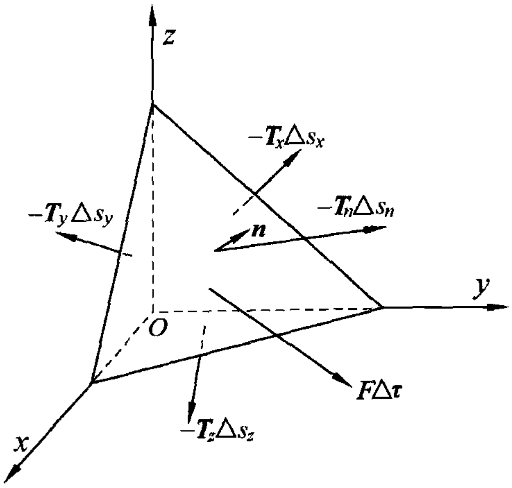

图 1.2　四面体体积元所受应力及体力

可得四面体表面上所受应力在 x 方向的分量关系式

$$T_{xn} = T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z, \tag{1.7}$$

同样有

$$T_{yn} = T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z, \tag{1.8}$$

$$T_{zn} = T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z. \tag{1.9}$$

用矩阵形式表示，则为

$$\begin{bmatrix} T_{xn} \\ T_{yn} \\ T_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

简记之为

$$[T_n] = [T][n].$$

3. 位移与应变

弹性力学中质点位移的定义与质点力学中质点的位移的定义相同，即质点的位移描述的是质点于每一时刻在空间的位置. 设质点位移在直角坐标中的位移分量分别是 u,v,w，则其位移矢量为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v + \boldsymbol{k}w. \tag{1.11}$$

但是，弹性介质的形变指的是介质质点间发生的相对位移. 而在刚体的平动或转动中，虽然质点的位移发生了变化，但介质质点间并未发生位移. 这就是说，位移

本身不能用来衡量弹性介质的形变. 在弹性力学中,用来描述介质形变的物理量称为应变.

如图 1.3 所示,在介质中取一平面,P 为弹性体中的某一点,$PA=\Delta x$,$PB=\Delta y$,Δx,Δy 是两条微小线段. 由于介质形变,设 P,A,B 三点分别移动到 P',A',B'.

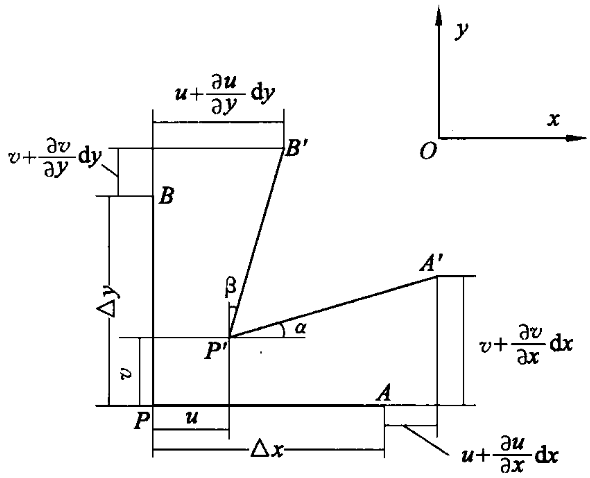

图 1.3　弹性体的形变

线段在长度上的相对伸长(或缩短)量称为正应变,由图 1.3 可知,PA 的正应变是

$$S_{xx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)-u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.12}$$

同样线段 PB 的正应变为

$$S_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.13}$$

从图 1.3 可知,线段 PA,PB 在发生正应变的同时,其方向也发生了变化. PA 偏转的角度为

$$\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)-v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.14}$$

PB 偏转的角度为

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.15}$$

我们称线段 PA 和 PB 偏转角之和为切应变,并定义

$$S_{xy}=S_{yx}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.16}$$

弹性力学规定,正的正应变对应着线段的伸长,负的正应变对应着线段的缩短. 使 PA 与 PB 间的直角变成锐角的切应变为正,使 PA 与 PB 间的直角变成钝角的切应变为负.

对于 xz 平面和 yz 平面同样有

$$S_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1.17}$$

$$S_{yz}=S_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \tag{1.18}$$

$$S_{xz}=S_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{1.19}$$

用矩阵表示,弹性体的应变为

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

由于应变矩阵是对称矩阵,所以 9 个量中只有 6 个是独立的.

从(1.12)～(1.19)式可以看出,所有的应变分量都具有质点位移的梯度的物理意义,所以有的教科书称应变矩阵为位移梯度矩阵.

4. 电场强度和电位移矢量

对于压电弹性介质,当它受到外力作用时,在它的某些表面将出现电荷. 反之,在压电弹性介质上加上电场时,压电弹性体将发生形变. 也就是说,在压电弹性体中,电学量与力学量相互耦合,介质中储存的能量由两部分构成:一部分是应变能,另一部分是电磁能.

在非压电弹性介质中,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的关系是

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \tag{1.21}$$

或简记之为

$$[D]=[\varepsilon][E].$$

其中 $[\varepsilon]$ 是介质的介电常数矩阵.

对于压电弹性介质,电位移不仅与电场有关,还与介质的形变有关. 电学量与

力学量间的依存关系将在后面的压电方程一节中介绍.

1.3 固体弹性动力学方程

1.3.1 弹性动力学方程

设想在弹性体内有一微小体积元 $\Delta\tau$,其表面积为 Δs,体积元受到的力为

$$\int_{\Delta s} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s + \boldsymbol{F}\Delta\tau = \rho\Delta\tau \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}. \tag{1.22}$$

其中 ρ 为弹性体的质量密度.

设所取的体积元 $\Delta\tau=\Delta x\Delta y\Delta z$,它是 $x, x+\Delta x, y, y+\Delta y, z, z+\Delta z$ 六个平面所围成的六面体. 在 x, y, z 平面处,六面体外法线一侧的应力分别为 $-\boldsymbol{T}_x$, $-\boldsymbol{T}_y$, $-\boldsymbol{T}_z$,而在 $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ 平面处,六面体外法线一侧的应力分别为 $\boldsymbol{T}_x+\frac{\partial \boldsymbol{T}_x}{\partial x}\Delta x, \boldsymbol{T}_y+\frac{\partial \boldsymbol{T}_y}{\partial y}\Delta y, \boldsymbol{T}_z+\frac{\partial \boldsymbol{T}_z}{\partial z}\Delta z$,所以在六面体表面上的应力积分为

$$\int_{\Delta s} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s = \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_z}{\partial z}\right)\Delta\tau.$$

根据散度定义式可知,极限

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\int_{\Delta s} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s}{\Delta\tau} \tag{1.23}$$

具有散度定义形式,不妨称其为应力的散度,并记之为$\nabla \cdot \boldsymbol{T}$. 于是(1.22)式化为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}. \tag{1.24}$$

(1.24)式便是弹性体的动力学方程. 写成分量形式,则为

$$\frac{\partial}{\partial x}T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{xz} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_x, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{yz} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - F_y, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}T_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zz} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - F_z. \tag{1.27}$$

1.3.2 应力矩阵的对称性

从应变的定义我们已经知道,弹性体的应变矩阵是一个对称矩阵. 应力矩阵是

否也具有对称性？下面讨论这一问题.

设想在弹性体中取一体积元，如图 1.4 所示. 对于以前后两面中心 A、B 的连线为转轴的转动，其转动运动的方程为

$$\left(T_{zy}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z\,\frac{\Delta y}{2}+T_{zy}\,\Delta x\Delta z\,\frac{\Delta y}{2}-\left(T_{yz}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y\,\frac{\Delta z}{2}$$

$$-T_{yz}\,\Delta x\Delta y\,\frac{\Delta z}{2}+M_x\,\Delta x\Delta y\Delta z=I_{AB}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta_{AB}. \tag{1.28}$$

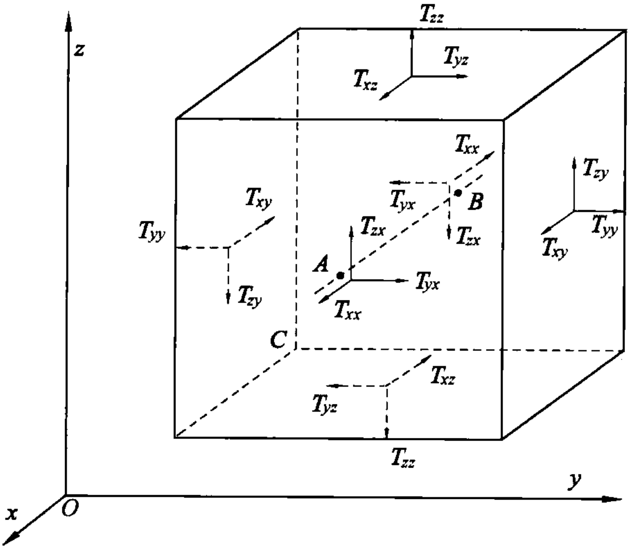

图 1.4　六面体体积元表面上的应力

其中 M_x 是体力矩密度在 x 方向的分量；θ_{AB} 是体积元绕 AB 轴的转动角；I_{AB} 是体积元绕 AB 轴的转动惯量，其值为

$$I_{AB}=\rho\Delta x\Delta y\Delta z\left[\frac{(\Delta y)^2}{12}+\frac{(\Delta z)^2}{12}\right].$$

当 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 趋于零时，I_{AB} 比体积元体积更快地趋于零. 因此(1.28)式中等式右端 I_{AB} 项可忽略. 另外，当体积元趋于零时，体力趋于均匀且单值，因而构不成力矩，所以 M_x 一项趋于零. 于是(1.28)式变成

$$T_{zy}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}-T_{yz}-\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}=0.$$

当体积元趋于零时，可得

$$T_{yz}=T_{zy}. \tag{1.29}$$

同理有

$$T_{xz}=T_{zx}, \quad T_{xy}=T_{yx}. \tag{1.30}$$

将(1.29)和(1.30)两式代入(1.5)式可知，应力矩阵也是一个对称矩阵.

从本节的讨论又可看出，质点转动运动在弹性动力学中是不予考虑的.

1.3.3 应力和应变的下标缩写表示

因为应力应变矩阵都是对称矩阵，它们仅有 6 个独立的分量. 如果把独立分量的双下标按下列对应关系换成单下标

$$\begin{aligned}
xx &\longrightarrow 1,\\
yy &\longrightarrow 2,\\
zz &\longrightarrow 3,\\
yz,zy &\longrightarrow 4,\\
xz,zx &\longrightarrow 5,\\
xy,yx &\longrightarrow 6.
\end{aligned}$$

并规定

$$\begin{aligned}
S_{yz}&=\frac{1}{2}S_4,\\
S_{xz}&=\frac{1}{2}S_5,\\
S_{xy}&=\frac{1}{2}S_6,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

则与应力和应变有关的许多公式可进一步得到简化，运算中应力和应变可用六元直列阵来表示，

$$[S]=\begin{bmatrix} S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\\ S_5\\ S_6 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$