理工科大学

经济管理类 研究生教学用书

OPERATIONS RESEARCH FOR MANAGEMENT

管理运筹学

线性规划 · 线性规划的对偶理论与灵敏度分析 · 整数规划 · 非线性规划 · 动态规划 · 网络计划技术 · 对策论 · 决策论 · 存储论 · 排队论

张晓冬 主编

周晓光 曹勇 副主编

化学工业出版社

理工科大学
经济管理类研究生教学用书

管理运筹学

张晓冬 主编
周晓光　曹勇 副主编

化学工业出版社
·北京·

本书从管理的角度，介绍了线性规划、对偶理论、整数规划、非线性规划、动态规划、网络计划技术、对策论、决策论、存储论和排队论等运筹学主要分支的基本理论、基本概念和计算方法，并重点给出了运筹学在管理、经济领域中的应用例题和综合案例。每章都附有大量管理相关习题，并配合运筹学应用软件 WinQSB 的详细介绍与应用方法，便于学生应用运筹学的计算机方法解决各类管理运筹问题。

本书可作为高校管理和经济类本科生、硕士生、工商管理硕士（MBA)、公共管理硕士（MPA)、工程硕士（MPM）的运筹学教材，也可作为管理人员和决策人员的学习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学/张晓冬主编. —北京：化学工业出版社，2011.8

理工科大学经济管理类研究生教学用书

ISBN 978-7-122-12012-0

Ⅰ.管… Ⅱ.张… Ⅲ.管理学：运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 152519 号

责任编辑：宋湘玲　　文字编辑：余纪军
责任校对：顾淑云　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京云浩印刷有限责任公司
装　　订：三河市万龙印装有限公司
787mm×1092mm　1/16　印张 17　字数 452 千字　　2011 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：38.00 元

前　　言

运筹学的英文名称是 Operations Research，缩写为 OR，直译的意思是作业研究或运作研究。运筹学是 OR 的意译，取“运筹帷幄之中，决胜千里之外”之意。运筹学作为应用数学的一个分支，致力于将现实世界的各类决策问题抽象成数学模型，并用数学理论和方法求出优化决策方案，在生产管理、工程管理、军事作战、财政经济及社会科学中都得到极为广泛的应用，为人类改造现实世界发挥了重要作用。

本书从经济管理专业的角度，充分吸收国内外已有运筹学教材的长处，并结合多年的专业教学经验，致力于为经济管理专业的本科生及研究生提供具有专业特色的运筹学教材。本书内容全面，由浅入深，覆盖了运筹学的主要分支，包括线性规划及对偶理论、非线性规划、整数规划、网络计划、动态规划、对策论、决策论、存储论、博弈论和排队论。在内容编排上，每一章均设计了运筹学方法在经济管理中的应用环节，提供了大量的例题和应用案例分析，方便进行启发式教学和案例教学。配合理论教学，全书还系统讲解了 WinQSB 软件的应用，以培养学生用计算机解决复杂运筹问题的能力。

本书共十一章，包括绪论、线性规划、对偶理论、整数规划、非线性规划、动态规划、网络计划技术、对策论、决策论、存储论和排队论。全书由张晓冬担任主编，周晓光、曹勇担任副主编，其中第 1、4、7 章由张晓冬编写，第 2、3、5、8、10 章由周晓光编写，第 6 章由王莹编写，第 9 章和第 11 章由曹勇编写，李英姿、潘林也承担了部分编和校对工作。北京科技大学王文彬教授担任主审。

教材配套有电子教案，可为选用本书的教师免费提供，如有需要请登录教学资源网 www. cipedu. com. cn 下载或联系 1172741428@qq. com.

本书可以作为经济管理相关学科的本科生、硕士生和工商管理硕士（MBA）、公共管理硕士（MPA）、工程硕士（MPM）的运筹学教材，也可作为其他相关学科的运筹学辅助教材，并可作为管理人员和决策人员的参考书。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者予以批评指正。

编者

2011 年 6 月

目　　录

第1章 绪　论

本章学习目的

- *了解运筹学的发展历史*
- *掌握运筹学的研究步骤和研究内容*
- *了解运筹学在经济管理中的应用*

运筹学（Operational Research）是20世纪40年代初发展起来的一门新兴学科，其主要目的是在决策时为管理人员提供科学和定量化依据，是实现有效管理、正确决策和现代化管理的重要理论和技术之一。我国运筹学和系统工程专家、中国工程院院士许国志教授指出，运筹学有三个来源："军事、管理、经济"。可见，运筹学在经济管理中的重要性。

运筹学的思想在古代就已经出现。敌我双方交战，要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上，做出最优的对付敌人的方法，这就是"运筹帷幄之中，决胜千里之外"的说法。现在普遍认为，运筹学是近代应用数学的一个分支，主要是将生产、管理等事件中出现的一些带有普遍性的优化问题加以提炼，然后利用数学方法进行解决。

1.1 运筹学的历史

1.1.1 运筹学历史简介

运筹学作为一门现代科学，是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的。P. M. Morse与G. E. Kimball在他们的奠基作中给运筹学下的定义是："运筹学是在实行管理的领域，运用数学方法，对需要进行管理的问题统筹规划，作出决策的一门应用科学。"运筹学的另一位创始人康托洛维奇（H. B. Kahtopob）定义运筹学是："管理系统的人员为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。"总而言之，运筹学强调使用数学工具（包括概率统计、数理分析、线性代数等）和逻辑判断方法，来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题，以期发挥系统的最大效益。

现在普遍认为，运筹学的活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始的。当时迫切需要把各项稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事经营及在每一经营内的各项活动，所以美国及随后美国的军事管理当局号召大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题，实际上这便是要求他们对种种（军事）经营进行研究，这些科学家小组正是最早的运筹小组。

第二次世界大战期间，运筹学成功地解决了许多重要作战问题，显示出了巨大的生命力，并为其后续的发展奠定了基础。当战后的工业恢复繁荣时，由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题，使人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似，只是具有不同的现实环境而已。于是，运筹学拓展到工商企业和其他部门，在20世纪50年代以后得到了广泛的应用。通过对于系统配置、聚散、竞争的运用机理的深入研究和应用，迄今已形成了比较完备的一套理论，如规划论、排队论、存储论、决策论等。由于其理论上的成熟，计算机和信息技术的突飞猛进，又大大促进了运筹学的发展。目前，世界上许多国家已成立了致力于该领域及相关活动的专门学会，如美国于1952年成立了运筹学会，并出版期刊《运筹学》，世界

其他国家也先后创办了运筹学会与期刊，1957 年成立了国际运筹学协会。

随着科学技术和生产的发展，运筹学已渗入很多领域里，发挥了越来越重要的作用。运筹学本身也在不断发展，现在已经包含了许多分支，比如：数学规划（又包含线性规划、非线性规划、整数规划、组合规划等）、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学理论、库存论、对策论、搜索论、模拟等。其应用领域也已渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面。

1.1.2 运筹学的历史经典案例

（1）鲍德西（Bawdsey）雷达站的研究

20 世纪 30 年代，德国内部民族沙文主义及纳粹主义日渐抬头。以希特勒为首的纳粹势力夺取了政权，开始为以战争扩充版图，以武力称霸世界的构想作战争准备。欧洲上空战云密布。1935 年，英国科学家沃森·瓦特（R. Watson-Wart）发明了雷达。当时的英国海军大臣丘吉尔敏锐地认识到它的重要意义，并下令在英国东海岸的 Bawdsey 建立了一个秘密的雷达站。当时，德国已拥有一支强大的空军，起飞 17 分钟即可到达英国。在如此短的时间内，如何预警及做好拦截，甚至在本土之外或海上拦截德机，就成为一大难题。雷达技术帮助了英国，即使在当时的演习中已经可以探测到 160km 之外的飞机，但空防中仍有许多漏洞。

1939 年，由曼彻斯特大学物理学家、英国战斗机司令部科学顾问、战后获诺贝尔奖金的 P. M. S. Blackett 为首，组织了一个小组，代号为“Blackett 马戏团”，专门就改进空防系统进行研究。这个小组包括三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官、一名陆军军官及一名测量人员。研究的问题是：设计将雷达信息传送给指挥系统及武器系统的最佳方式；雷达与防空武器的最佳配置；对探测、信息传递、作战指挥、战斗机与防空火力的协调。经过系统的研究，该项目获得了成功，大大提高了英国本土防空能力，在以后不久对抗德国对英伦三岛的狂轰滥炸中，发挥了极大的作用。第二次世界大战史专家评论说，如果没有这项技术及研究，英国就不可能赢得这场战争，甚至在一开始就被击败。

“Blackett 马戏团”是世界上第一个运筹学小组。在他们就此项研究所写的秘密报告中，使用了“Operational Research”一词，意指“作战研究”或“运作研究”，这就是现在所说的运筹学。Bawdsey 雷达站的研究是运筹学的起源与典范，项目的巨大实际价值、明确的目标、整体化的思想、数量化的分析、多学科的协同、最优化的结果，以及简明朴素的表述，都展示了运筹学的本色与特色。

（2）Blackett 备忘录

1941 年 12 月，Blackett 以其巨大的声望，应盟国政府的要求，写了一份题为“Scientists at the Operational Level”（作战位置上的科学家）的简短备忘录，建议在各大指挥部建立运筹学小组，这个建议迅速被采纳。据不完全统计，第二次世界大战期间，仅在英国、美国和加拿大，参加运筹学工作的科学家就超过 700 名。

1943 年 5 月，Blackett 写了第二份备忘录，题为“关于运筹学方法论某些方面的说明”。他写道：“运筹学的一个明显特性，正如目前所实践的那样，是它具有强烈的实际性质。它的目的是帮助找出一些方法，以改进正在进行中的或计划在未来进行的作战的效率。为了达到这一目的，要研究过去的作战来明确事实，要得出一些理论来解释事实，最后，利用这些事实和理论对未来的作战作出预测。”这些 OR 的早期思想至今仍然有效。

（3）大西洋反潜战

美国投入第二次世界大战后，吸收了大量科学家协助作战指挥。1942 年，美国大西洋舰队反潜战官员 W. D. Baker 舰长请求成立反潜战运筹组，麻省理工学院的物理学家

P. W. Morse 被请来担任计划与监督。

Morse 最出色的工作之一，是协助英国打破了德国对英吉利海峡的海上封锁。1941—1942 年，德国潜艇严密封锁了英吉利海峡，企图切断英国的“生命线”。海军数次反封锁，均不成功。应英国的要求，美国派 Morse 率领一个小组去协助。Morse 小组经过多方实地调查，最后提出了两条重要建议。

① 将反潜攻击由反潜舰艇投掷水雷，改为飞机投掷深水炸弹，起爆深度由 100m 左右，改为 25m 左右，即当德方潜艇刚下潜时攻击效果最佳。

② 运送物资的船队及护航舰艇编队，由小规模多批次，改为加大规模、减少批次，这样，损失率将减少。

丘吉尔采纳了 Morse 的建议，最终成功地打破了德国的封锁，并重创了德国潜艇舰队。由于这项工作，Morse 同时获得了英国及美国战时的最高勋章。

(4) 英国战斗机中队援法决策

第二次世界大战开始后不久，德国军队突破了法国的马奇诺防线，法军节节败退。英国为了对抗德国，派遣了十几个战斗机中队，在法国国土上空与德国空军作战，且指挥、维护均在法国进行。由于战斗损失，法国总理要求增援 10 个中队。已出任英国首相的丘吉尔决定同意这个请求。

英国运筹人员得悉此事后，进行了一项快速研究，其结果表明：在当时的环境下，当损失率、补充率为现行水平时，仅再进行两周左右，英国的援法战斗机就连一架也不存在了。这些运筹学家以简明的图表、明确的分析结果说服了丘吉尔。丘吉尔最终决定：不仅不再增换新的战斗机中队，而且还将在法的英国战机大部分撤回英国本土，以本土为基地，继续对抗德国。局面有了大的改观。

在第二次世界大战中，定量化、系统化的方法迅速发展，且很有特点。由上面几个例子可以看出这一时期军事运筹的特点：①真实的实际数据；②多学科密切协作；③解决方法渗透着物理学思想。

1.2 运筹学的研究步骤

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题。运筹学可以根据问题的要求，通过数学上的建模、分析、运算，得出各种各样的结果，最后提出综合性的合理安排，以达到最好的效果。运筹学作为一门用来解决实际问题的学科，一般分为以下 5 个阶段。

① 规定目标和明确问题　包括把整个问题分解成若干子问题，确定问题的目标和约束、可控变量和不可控变量，以及用来表示变量界限和变量间关系的常数和参数。

② 收集数据和建立模型　收集建立数学模型所需的相关数据，建立描述决策目标和决策约束的数学模型。

③ 求解模型和优化方案　确定求解模型的数学方法，程序设计和调试，仿真运行和方案选优。

④ 检验模型和评价　检验模型的一致性、灵敏度、似然性和工作能力，并用试验数据来评价模型的解。一致性是指主要参数变动时（尤其是变到极值时）模型得出的结果是否合理；灵敏度是指输入发生微小变化时输出变化的相对大小是否合适；似然性是指对于真实数据的案例，模型是否适应；工作能力则是指模型是否容易解出，即在规定时间内算出所需的结果。通过模型评价，可能会返回到前面的步骤进行修改，或对模型的解进行进一步处理。

⑤ 方案实施和不断优化　应用所得的解来解决实际问题，并在方案实施过程中发现新的

问题和不断进行优化。

上述 5 个阶段往往需要交叉进行，不断反复。

1.3 运筹学的研究内容

运筹学研究的内容十分广泛，其主要分支有：线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、图论、对策论、决策论、排队论、存储论等。

（1）线性规划

线性规划（Linear Programming，简称 LP）是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。线性规划所研究的是在一定条件下，合理安排人力、物力等资源，使效益达到最好或成本最低。一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题。满足线性约束条件的解叫做可行解，由所有可行解组成的集合叫做可行域。决策变量、约束条件、目标函数是线性规划的三要素。

（2）非线性规划

非线性规划（Nonlinear Programming）是具有非线性约束条件或目标函数的数学规划，是运筹学的一个重要分支。它研究的是一个 n 元实函数在一组等式或不等式的约束条件下的极值问题，且目标函数和约束条件至少有一个是未知量的非线性函数。常用的方法有一维最优化方法、无约束最优化方法、约束最优化方法、二次规划和几何规划。

（3）整数规划

整数规划（Integer Programming）研究的是当未知量是整数时的规划问题。整数规划是从 1958 年由 R. E. 戈莫里提出割平面法之后形成独立分支的，30 多年来发展出很多方法解决各种问题。目前比较成功又流行的方法是分枝定界法和割平面法。整数规划的一种特殊情形是 0-1 规划，它的未知量仅限于 0 或 1。不同于线性规划问题，整数和 0-1 规划问题至今尚未找到一般的多项式解法。

（4）动态规划

动态规划（Dynamic Programming）是运筹学的一个分支，是求解决策过程（Decision Process）最优化的数学方法。动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用。例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其他方法求解更为方便。

（5）图论

图论（Graph Theory）是一个古老的但又十分活跃的分支，它是网络技术的基础。图论的创始人是数学家欧拉。1736 年他发表了图论方面的第一篇论文，解决了著名的哥尼斯堡七桥难题。相隔一百年后，在 1847 年基尔霍夫第一次应用图论的原理分析电网，从而把图论引进到工程技术领域。20 世纪 50 年代以来，图论的理论得到了进一步发展，将复杂庞大的工程系统和管理问题用图描述，可以解决很多工程设计和管理决策的最优化问题。例如，完成工程任务的时间最少，距离最短，费用最省等。图论受到数学、工程技术及经营管理等各方面越来越广泛的重视。

（6）对策论

对策论（Game Theory）也叫博弈论。作为运筹学的一个分支，博弈论的发展也只有几十年的历史。系统地创建这门学科的数学家，现在一般公认为是美籍匈牙利数学家、计算机之父——冯·诺依曼。最初用数学方法研究博弈论是在国际象棋中开始的，旨在用来如何确定取

胜的算法。由于是研究双方冲突、制胜对策的问题，所以这门学科在军事方面有着十分重要的应用。近年来，数学家还对水雷和舰艇、歼击机和轰炸机之间的作战、追踪等问题进行了研究，提出了追逃双方都能自主决策的数学理论。随着人工智能研究的进一步发展，对博弈论提出了更多新的要求。

（7）决策论

决策论（Decision Theory）是研究决策问题。所谓决策就是根据客观可能性，借助一定的理论、方法和工具，科学地选择最优方案的过程。决策问题是由决策者和决策域构成的，而决策域又由决策空间、状态空间和结果函数构成。研究决策理论与方法的科学就是决策科学。决策所要解决的问题是多种多样的，从不同角度有不同的分类方法，按决策者所面临的自然状态的确定与否可分为：确定型决策、风险型决策和不确定型决策；按决策所依据的目标个数可分为：单目标决策与多目标决策；按决策问题的性质可分为：战略决策与策略决策，以及按不同准则划分成的种种决策问题类型。不同类型的决策问题应采用不同的决策方法。

（8）排队论

排队论（Queuing Theory）又叫做随机服务系统理论。它的研究目的是要回答如何改进服务机构或组织被服务的对象，使得某种指标达到最优的问题。比如一个港口应该有多少个码头，一个工厂应该有多少维修人员等。因为排队现象是一个随机现象，因此在研究排队现象的时候，主要采用的是研究随机现象的概率论作为主要工具。排队论把它所要研究的对象形象地描述为顾客来到服务台前要求接待，通过数学方法求得顾客的等待时间、排队长度等的服务指标。

（9）存储论

存储论（inventory theory）又称库存理论，是运筹学中发展较早的分支。早在 1915 年，哈李斯针对银行货币的储备问题进行了详细的研究，建立了一个确定性的存储费用模型，并求得了最佳批量公式。它是一种研究物质最优存储及存储控制的理论。物质存储是工业生产和经济运转的必然现象，如果物质存储过多，则会占用大量仓储空间，增加保管费用，使物质过时报废从而造成经济损失；如果存储过少，则会因失去销售时机而减少利润，或因原料短缺而造成停产。因而如何寻求一个恰当的采购、存储方案就成为存储论研究的对象。

1.4 运筹学的应用

运筹学的应用领域非常广阔，在经济管理领域的典型应用包括如下各方面。

① 市场销售　在广告预算和媒体的选择、竞争性定价、新产品开发、销售计划的制定等方面。如美国杜邦公司在 20 世纪 50 年代起就非常重视将作业研究用于研究如何做好广告工作、产品定价和新产品的引入；通用电力公司对某些市场进行模拟研究等。

② 生产计划　在总体计划方面主要是从总体确定生产、储存和劳动力的配合等计划以适应变动的需求计划，主要用线性规划和仿真方法等。此外，还可用于生产作业计划、日程表的编排等。还有在合理下料、配料问题、物料管理等方面的应用。

③ 库存管理　存货模型将库存理论与物料管理信息系统相结合，主要应用于多种物料库存量的管理，确定某些设备的能力或容量，如工厂的库存、停车场的大小、新增发电设备容量大小、计算机的主存储器容量、合理的水库容量等。

④ 运输问题　涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、捷运、管道运输和厂内运输等，包括班次调度计划及人员服务时间安排等问题。

⑤ 财政和会计　涉及预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等。用

得较多的方法是：统计分析、数学规划、决策分析。此外，还有盈亏点分析法、价值分析法等。

⑥ 人事管理　人员的获得和需求估计，人才的教育和训练，人员的各种指派问题，各类人员的合理利用问题，人才的评价、测定问题，人员薪资和津贴的确定等。

⑦ 设备维修、更新和可靠度、项目选择和评价　如电力系统的可靠度分析、核能电厂的可靠度以及风险评估等。

⑧ 工程的最佳化设计　在土木工程、建筑、水利、信息、电子、电机、光学、机械、环境和化工等领域均涉及运作研究的应用。

⑨ 计算机和信息系统　将作业研究应用于计算机的主存储器配置，研究排队理论在不同排队规则对磁盘、磁鼓和光盘工作性能的影响，例如利用整数规划寻找满足一组需求档案的寻找次序，利用图论、数学规划等方法研究计算机信息系统的自动设计。

⑩ 城市管理　例如各种紧急服务救难系统的设计和运用，包括消防队救火站、救护车、警车等分布点的设立。美国曾用等候理论方法来确定纽约市紧急电话站的值班人数。加拿大亦曾研究城市警车的配置和负责范围，事故发生后警车应走的路线等。此外，诸如城市垃圾的清扫、搬运和处理；城市供水和污水处理系统的规划等问题。

1.5 本章小结

运筹学（Operations Research）是 20 世纪 40 年代初发展起来的一门新兴学科，它强调使用数学工具（包括概率统计、数理分析、线性代数等）和逻辑判断方法，来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题，以期发挥系统的最大效益。本章主要介绍了运筹学的发展历史、研究步骤、研究内容、应用方向和未来展望，帮助读者对运筹学这门课程有一个整体的认识，为后面的学习打下基础。

第 2 章　线 性 规 划

本章学习目的

- 掌握线性规划的基本概念，能根据实际问题建立线性规划模型
- 掌握线性规划的标准型，以及将非标准形式转化为标准型
- 熟练掌握线性规划的图解法
- 熟练掌握线性规划的单纯形法、大 M 法和两阶段法

2.1　线性规划的数学模型

2.1.1　线性规划概述

线性规划（Linear Programming，LP）是运筹学规划论的一个重要分支，研究线性约束条件下线性目标函数极值问题的数学理论和方法。它发展较早，理论上比较成熟，广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面。能为合理利用有限的人力、物力、财力等资源作出最优决策提供科学的依据。

法国数学家傅里叶和瓦莱-普森分别于 1832 年和 1911 年独立地提出线性规划的想法，但未引起注意。1939 年，苏联数学家康托洛维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，也未引起重视。1947 年，美国数学家 G. B. 丹捷格提出线性规划的一般数学模型和求解线性规划问题的通用方法——单纯形法，为这门学科奠定了基础。丹捷格由于提出了单纯形法，被誉为“线性规划”之父。1951 年，美国经济学家 T. C. 库普曼斯把线性规划应用到经济领域，因此与康托洛洛奇一起获 1975 年诺贝尔经济学奖。

20 世纪 50 年代后对线性规划进行了大量的理论研究，并涌现出一大批新的算法。例如，1954 年，C. 莱姆基提出对偶单纯形法；1954 年，S. 加斯和 T. 萨迪等人解决了线性规划的灵敏度分析和参数规划问题；1956 年，A. 塔克提出互补松弛定理；1960 年，G. B. 丹捷格和 P. 沃尔夫提出分解算法等。线性规划的研究成果还直接推动了其他数学规划问题，包括整数规划、随机规划和非线性规划的算法研究。

关于线性规划的研究与应用工作，我国开始于 20 世纪 50 年代初期。中国科学院数学所筹建了运筹室，最早应用在物资调运方面。目前，国内高等学校已将其列为运筹学中必选的课程内容之一，在实际应用方面也已列入重点企业试点和研究项目之一。

随着强有力算法的发展与应用，线性规划所能解决的问题也越来越多。在波斯湾战争期间，美国军方利用线性规划，有效地解决了部队给养和武器调运问题，对促进战争的胜利，起了十分重要的作用。有人说，因为使用炸药，第一次世界大战可称为“化学的战争”；因为使用原子弹，第二次世界大战可称为“物理的战争”；因为使用线性规划，波斯湾战争可称为“数学的战争”。在历史上，没有哪种数学方法可以像线性规划那样，直接为人类创造如此巨额的财富，并对历史的进程发生如此直接的影响。

2.1.2　线性规划模型

线性规划的基本思路就是在满足一定的约束条件下，使预定的目标达到最优。它的研究内

容可归纳为两个方面：一是系统的任务已定，如何合理筹划，精细安排，用最少的资源（人力、物力和财力）去实现这个任务；二是资源的数量已定，如何合理利用、调配，使任务完成得最多。前者是求极小，后者是求极大。线性规划是在满足企业内、外部的条件下，实现管理目标和极值（极小值和极大值）问题，就是要以尽可能少的资源输入来实现尽可能多的社会需要的产品的产出。因此，线性规划是辅助企业“转轨”、“变型”的十分有利的工具，它在辅助企业经营决策、计划优化等方面具有重要的作用。

现代管理问题虽然千变万化，但大致上总是要利用有限的资源去追求最大的利润或最小的成本，所以其中许多都可以转化为线性规划问题。

要对实际规划问题作定量分析，必须先加以抽象，建立数学模型。一般而言，线性规划模型包括以下三个方面的内容。

① 选定决策变量　决策变量有时也称为设计变量，它是待决定问题的未知量，也是决策系统中的可控因素，一组决策变量的取值构成一个规划方案。常用英文字母加下标来表示，如 x_1，x_2，…，x_n。

② 明确问题的目标　一般表示为决策变量的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为目标函数，用 max（min）表示最优。

③ 建立约束条件　约束条件是指实现系统目标的限制因素。一般表示为决策变量的等式或不等式方程，称为约束方程。

线性规划问题就是在决策变量满足若干约束条件的情况下，使目标函数达到极大值或极小值。

线性规划模型的一般形式如下：

$$\max(\min) z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i, & i=1,2,\cdots,m_1 \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n\leqslant b_j, & j=m_1+1,m_1+2,\cdots,m_2 \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=b_k, & k=m_2+1,m_2+2,\cdots,m \\ x_q\geqslant 0, & q=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

【例 2-1】 某工厂生产甲、乙两种产品，每件甲产品要消耗钢材 2kg、煤 2kg、产值为 120 元；每件乙产品要消耗钢材 3kg，煤 1kg，产值为 100 元。现钢厂有钢材 600kg，煤 400kg，试确定甲、乙两种产品各生产多少件，才能使该厂的总产值最大?

解：案例的问题在于如何生产甲、乙两种产品，故两种产品的产量是待决定的决策变量。设甲、乙两种产品的产量分别为 x_1，x_2。问题的目标在于如何使得产值最大。产值可以用决策变量来表示 $f(x_1,x_2)=120x_1+100x_2$，要求最大产值即求 $\max z=120x_1+100x_2$。

对于两种产品的生产，主要受到工厂所有的资源多少的限制，生产必须满足资源的约束条件：

由于钢的限制，应满足 $2x_1+3x_2\leqslant 600$

由于煤的限制，应满足 $2x_1+x_2\leqslant 400$

生产产品的数量应该不小于 0，所以 x_1，$x_2\geqslant 0$。

因此，可以建立该问题的线性规划模型如下：

$$\max z=120x_1+100x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 600 \\ 2x_1+x_2\leqslant 400 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2-2】 某工厂为维修全厂某类设备制造备件，需由一批长 5.5m 的相同直径的圆钢截

取 3.1m、2.1m、1.2m 的坯料。每台设备所需的件数如表 2-1 所示。用 5.5m 长的圆钢截取上述三种规格的零件时，有下列五种截取方法可供选择，如表 2-2 所示。问当设备总数为 100 台时，采取何种方案可使 5.5m 的圆钢用料最省？

表 2-1　每台设备所需的件数

规格/m	每台设备所需件数
3.1	1
2.1	2
1.2	4

表 2-2　五种截取方法

下料方式	3.1m 坯料/根	2.1m 坯料/根	1.2m 坯料/根	余料长/m
1	1	1	0	0.3
2	1	0	2	0
3	0	2	1	0.1
4	0	1	2	1
5	0	0	4	0.7

解： 假设按 1、2、3、4、5 下料方式截取的 5.5m 长的圆钢数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，目标函数是要使所需 5.5m 长的圆钢数最少，因而有

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

因为设备总台数为 100 台，而每台设备所需规格为 3.1m、2.1m、1.2m 的坯料件数分别为 1、2、4，故所需这三种坯料总件数分别为 100、200、400。因此，按各方案截取的零件数应满足下列约束条件：

规格为 3.1m 的坯料，应满足 $x_1+x_2=100$；

规格为 2.1m 的坯料，应满足 $x_1+2x_3+x_4=200$；

规格为 1.2m 的坯料，应满足 $2x_2+x_3+2x_4+4x_5=400$。

综合上述，得如下线性规划模型：

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2=100 \\ x_1+2x_3+x_4=200 \\ 2x_2+x_3+2x_4+4x_5=400 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

求得最优解为 $x_1=0$，$x_2=100$，$x_3=100$，$x_4=0$，$x_5=25$，最优值（圆钢最省方案）为 $z=225$ 根。

思考：如果将“用料最省”改为“余料总长最短”，上述模型有变化么？为什么？

【例 2-3】 用三种原料 B_1、B_2、B_3 配制某种食品，要求该食品中蛋白质、脂肪、糖、维生素的含量不低于 15、20、25、30 单位。以上三种原料的单价及每单位原料所含各种成分的数量，如表 2-3 所示。问应如何配制该食品，使所需成本最低？

表 2-3　三种原料所含成分

营养成分	原料			食品中营养成分的最低需要量
	B_1	B_2	B_3	
蛋白质/kg	5	6	8	15
脂肪/kg	3	4	6	20
糖/kg	8	5	4	25
维生素/kg	10	12	8	30
原料单价/(元/kg)	20	25	30	

注：这个问题是在食品的营养要求得到满足的前提下，如何通过适当的原料配比，使食品的成本最低.

解：设 x_1、x_2、x_3 分别表示原料 B_1、B_2、B_3 的用量（kg），z 表示食品的成本（元），则这一食品配制问题的线性规划模型如下：

目标函数为：

$$\min z=20x_1+25x_2+30x_3$$

约束条件为食品中蛋白质、脂肪、糖和维生素的含量分别不能低于最低需要量：

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_1+6x_2+8x_3\geqslant 15\\3x_1+4x_2+6x_3\geqslant 20\\8x_1+5x_2+4x_3\geqslant 25\\10x_1+12x_2+8x_3\geqslant 30\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2-4】 生产计划优化问题

某矿山由 A、B 两个采区组成，共有工人 120 名，共用大型运输设备 10 台，技术经济指标如表 2-4 所示。

表 2-4 A、B 采区的技术经济指标

要素＼采区	A	B	要素＼采区	A	B
工人劳动生产率/(t/人・天)	40	56	矿仓/(t/天)	5000	
运输能力/(t/天・台)	600	380	利润/(元/t)	20	30
提升能力/(t/天)	4000	3000			

问：如何安排生产，可使总利润最大？

解：设 x_1，x_2 分别表示采区 A、B 的日产量，z 表示总利润，目标是使两采区总利润最大，即：

$$\max z=20x_1+30x_2$$

约束条件为：

$\frac{1}{40}x_1+\frac{1}{56}x_2\leqslant 120$（A、B 采区工人总需求不得超过 120 人）；

$\frac{1}{600}x_1+\frac{1}{380}x_2\leqslant 10$（A、B 采区运输设备总需求不得超过 10 台）；

$x_1\leqslant 4000$（A 采区提升能力限制）；

$x_2\leqslant 3000$（B 采区提升能力限制）；

$x_1+x_2\leqslant 5000$（矿仓限制）。

综合起来，约束条件为：

$$\text{s. t.}\begin{cases}\frac{1}{40}x_1+\frac{1}{56}x_2\leqslant 120\\\frac{1}{600}x_1+\frac{1}{380}x_2\leqslant 10\\x_1\leqslant 4000\\x_2\leqslant 3000\\x_1+x_2\leqslant 5000\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$